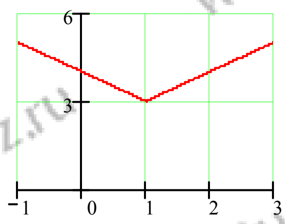
Вариант № 3

1. Найти область определения функции : $y = (|x| - x)^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$.

Область определения данной функции определяется неравенством $|x| - x > 0$. Освободимся от знака модуля: при $x \ge 0$ неравенство $x - x > 0$ никогда не выполняется; при $x < 0$ неравенство $-x - x > 0$ выполняется всегда. Объединяя результаты, получим: $-\infty < x < 0$. **Ответ:** $x \in (-\infty, 0)$.

2. Построить график функции: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 3$.

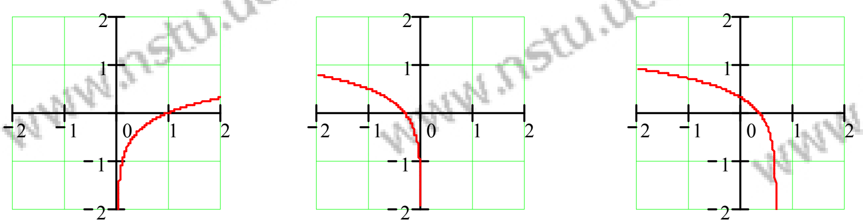


Так как $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \ge 0$ всегда, то данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 3 = \sqrt{(x-1)^2} + 3 = |x - 1| + 3$. Таким образом, $y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \ge 1, \\ 4 - x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$.

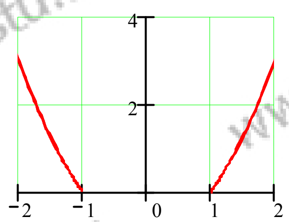
Ответ: график представлен на рисунке.

3. Построить график функции: $y = \lg(2 - 3x)$.

Данная функция определена для x, удовлетворяющих неравенству $2 - 3x > 0$ или $x < 2/3$. Преобразуем функцию. Вынесем за скобки множитель −3: $y = \lg[-3(x - 2/3)]$. Последовательно строим сначала $y = \lg(x)$., затем $y = \lg(-3x)$. (переворачивая график вокруг оси OY и «сжимая» его в три раза по оси OX), затем сдвигаем график вправо по оси OX на величину 2/3. **Ответ:** построения представлены на рисунках.

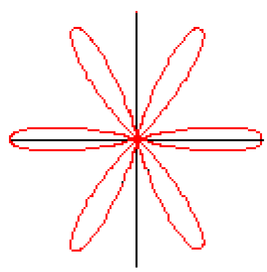


4. Построить график функции: $\begin{cases} x = \cos^{-1} t \\ y = tg^2 t \end{cases}$.



Исключим параметр t, применяя формулу $tg^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1$. Подставляя сюда $x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ $(|x| \ge 1)$, получим: $y = x^2 - 1$. Так как по определению $y \ge 0$, то область определения функции будет $|x| \ge 1$. **Ответ:** график представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho = 2\cos 6\varphi$.



Поскольку $\rho \ge 0$, то функция существует для тех значений φ, для которых $\cos 6\varphi \ge 0$. Это наблюдается при $2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \le 6\varphi \le 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ или $\dfrac{k\pi}{3} - \dfrac{\pi}{12} \le \varphi \le \dfrac{k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12}$. Полагая $k = 0, 1, \ldots, 5$, получим шесть интервалов для φ, в которых ρ изменяется одинаково, возрастая с нуля до двух, затем убывая с 2 до нуля. Таким образом, графиком будет шестилепестковая роза. **Ответ:** график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона $(a+b)^k=\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i a^i b^{k-i}$, где $C_k^i=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{81-108n+54n^2-12n^3+n^4-(16-32n+24n^2-8n^3+n^4)}{1-3n+3n^2-n^3-(1+3n+3n^2+n^3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{65-76n+30n^2-4n^3}{-6n-n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{65/n^3-76/n^2+30/n-4}{-6/n^2-2}=\frac{-4}{-2}=2.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}=2$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-2x^2+4x+6}{x^2+4x+3}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-2x^2+4x+6}{x^2+4x+3}=$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x+3)}=-2\lim_{x\to-1}\frac{x-3}{x+3}=4.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-2x^2+4x+6}{x^2+4x+3}=4$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to1-0}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}}=\lim_{x\to1-0}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x-1}}\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x-1}}=\left|\begin{array}{l}1-x=t^6,\ x-1=-t^6\\ \textit{если } x\to1-0, \textit{ то } t\to0+0, \textit{ т.е. } t>0\end{array}\right|==\lim_{t\to0+0}\frac{t^3}{-t^2}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin2x}{(\pi-4x)^2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся формулой $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$:

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\sin2x}{(\pi-4x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-4x=t,\ x=(\pi-t)/4,\ \ \sin2x=\sin(\pi/2-t/2)=\cos(t/2),\\ \textit{если}\ \ x\to\pi/4,\ \ \textit{то}\ \ t\to0\end{array}\right|=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos(t/2)}{t^2}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{4}}{t^2}=\frac{1}{8}\left[\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}\right]^2=\frac{1}{8}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin2x}{(\pi-4x)^2}=\dfrac{1}{8}$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{-n^4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{-n^4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{-n^4}=\left|\begin{matrix}\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{t},\ \text{если}\ n\to\infty,\\ \text{то}\ t\to\infty,\ n^2=t+1\end{matrix}\right|=$$

$$=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{a},\ \text{где}\ a=-\lim_{t\to\infty}\frac{(t+1)^2}{t}=-\infty.\ \text{Таким образом,}\ =\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{a}=e^{-\infty}=0$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}=0$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctg\,x}$ (неопределённость вида (0/0)).

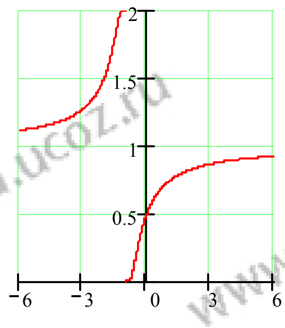
Воспользуемся эквивалентными величинами (при x→∞): $arctg(x)\sim tg(x)\sim x$, $\sqrt{4+x}-2=2(\sqrt{1+x/4}-1)\sim 2\cdot(x/8)$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctg\,x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot(x/8)}{3x}=\dfrac{1}{12}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctg\,x}=\dfrac{1}{12}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=\dfrac{2}{1+3^{\frac{1}{x+1}}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме $x=-1$. В точке $x=-1$ функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

$$\lim_{x\to-1-0}\left(\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x+1}}}\right)=\frac{2}{1+3^{-\infty}}=2,\quad \lim_{x\to-1+0}\left(\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x+1}}}\right)=\frac{2}{1+3^{+\infty}}=0\qquad .$$



Таким образом, в точке $x=-1$ имеют место разрыв первого рода. Скачёк функции в точке разрыва равен (-2). Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x+1}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x+1}}}\right)=\frac{2}{1+3^{0}}=1.$$

Ответ: В точке $x=-1$ функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

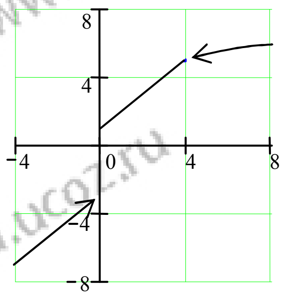
13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y=\begin{cases}x-3, & x<0,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ 3+\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}.$$

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0}(x-3) = -3,\quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0}(x+1) = 1,$

$\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4-0}(x+1) = 5,\ \lim\limits_{x\to 4+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 4+0}(3+\sqrt{x}) = 5$. Таким образом, в точке x=4 функция непрерывна, а в точке x=0 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=0 равна 4.



Ответ: В точке x=0 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = tg(2^{x^2\cos(1/3x)} - 1 + x),\ x \ne 0,\ f(0) = 0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(2^{x^2\cos(1/3x)} - 1 + x)}{x}$. Но $tg(t)$ ~t, а 2^t-1~t·ln(2) при $t\to 0$. Поэтому

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2\cos(1/3x)} - 1 + x}{x} = 1 + \lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2\cos(1/3x)} - 1}{x} = 1 + \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(1/3x)\cdot\ln 2}{x} =$$

$= 1 + \lim\limits_{x\to 0}(x\cos(1/3x))\cdot\ln 2 = 1 + 0 = 1$, так как $|\cos(1/3x)| \le 1$ при любом x. **Ответ:** $f'(0) = 1$.

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = (\ln x)^{3^x}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = 3^x\cdot\ln\ln x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = 3^x\ln 3\cdot\ln\ln x + 3^x\cdot\dfrac{1}{x\ln x} = 3^x(\ln 3\cdot\ln\ln x + \dfrac{1}{x\ln x})$. Подставляем сюда y:

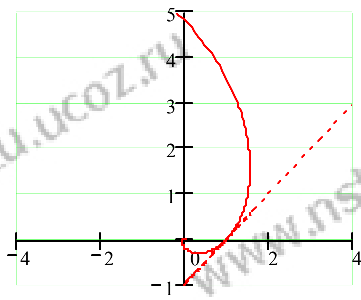
$y' = 3^x(\ln x)^{3^x}(\ln 3\cdot\ln\ln x + \dfrac{1}{x\ln x})$ **Ответ:** $y' = 3^x(\ln x)^{3^x}(\ln 3\cdot\ln\ln x + \dfrac{1}{x\ln x})$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases} \quad t = 0.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:

$x_0 = x(0) = 1$, $y_0 = y(0) = 0$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $\quad y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$. Тогда $y'_x(0) = 1$. Далее,



$$y''_x = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2}{e^t(\cos t - \sin t)^3} = \frac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}$$

, следовательно, $y''_x(0)=2$. Таким образом, уравнение касательной $y=x-1$, уравнение нормали $y=-(x-1)$. Или $x-y-1=0$ и $x+y-1=0$. **Ответ:** $(x_0,y_0)=(1,0),\ y'_x(x_0)=1,\ y''_x(x_0)=2,\ \begin{cases} x-y-1=0 & \textit{касательная} \\ x+y-1=0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $y+\sin(x+y)=1$, принимает в точке $x_0=\pi/2$ значение $y_0=0$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y=y(x)$: $y'+(1+y')\cos(x+y)=0$. Из этого равенства находим: $y'=-\dfrac{\cos(x+y)}{1+\cos(x+y)}=-1+\dfrac{1}{1+\cos(x+y)}$. Находим вторую производную: $y''=\dfrac{(1+y')\sin(x+y)}{(1+\cos(x+y))^2}$. Вычислим производные в точке $x_0=\dfrac{\pi}{2}$: $y'(\frac{\pi}{2})=0,\ y''(\frac{\pi}{2})=1$.

Ответ: $y'=-\dfrac{\cos(x+y)}{1+\cos(x+y)}=-1+\dfrac{1}{1+\cos(x+y)}$, $y''=\dfrac{(1+y')\sin(x+y)}{(1+\cos(x+y))^2}$, $y'(\frac{\pi}{2})=0,\ y''(\frac{\pi}{2})=1$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y=\sqrt{2x+1},\ x=1{,}53$.

По определению дифференциала $y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+dy(x_0)+o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x)=y(x_0)+dy(x_0)+o((x-x_0)),\ \Delta x=dx=x-x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$. В данном случае $x_0=1{,}5,\ y(x_0)=y(1{,}5)=2,\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}),\ y'(x_0)=y'(1{,}5)=0{,}5,\ \Delta x=0{,}03$. Тогда $y(1{,}53)\approx 2+0{,}5\cdot 0{,}03=2{,}015$. **Ответ:** $y\approx 2{,}015$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -1+0}(x+1)^{\sqrt{x+1}}$.

Это неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to -1+0}(x+1)^{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to -1+0}e^{\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to -1+0}\sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1)}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^{-1/2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to -1+0}\frac{[\ln(x+1)]'}{[(x+1)^{-1/2}]'}=\lim_{x\to -1+0}\frac{2}{(x+1)(x+1)^{-3/2}}=2\lim_{x\to -1+0}\sqrt{(x+1)}=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to -1+0}(x+1)^{\sqrt{x+1}}=e^0=1$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to -1+0}(x+1)^{\sqrt{x+1}}=1$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$.

Это неопределённость вида (∞-∞): $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{[x-(1+x)\ln(1+x)]'}{[x^2(1+x)]'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x(1+x)+x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x(2+3x)}.$$

Но $\ln(1+x)\sim x$.

Поэтому

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x(2+3x)}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{(2+3x)}=-\frac{1}{2}.$$ **Ответ:** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=x^4+x^3-3x^2+5,\ x_0=-1$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x)=4x^3+3x^2-6x,\ f''(x)=12x^2+6x-6,\ f'''(x)=24x+6$, $f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(-1)=2,\ f'(-1)=5,\ f''(-1)=0,\ f'''(-1)=-18,\ f^{(4)}(-1)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=2+5(x+1)-3(x+1)^3+(x+1)^4$.

Ответ: $f(x)=2+5(x+1)-3(x+1)^3+(x+1)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=\cos^2(1/x),\ x_0=2/\pi$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно:

$f(2/\pi)=0,\ f'(x)=2\cos(1/x)\sin(1/x)x^{-2}=\sin(2/x)x^{-2},\ f'(2/\pi)=0,$

$f''(x)=-2\cos(2/x)x^{-4}-2\sin(2/x)x^{-3},\ f''(2/\pi)=\pi^4/8,$

$f'''(x)=-4\sin(2/x)x^{-6}+8\cos(2/\pi)x^{-5}+4\cos(2/x)x^{-5}+6\sin(2/x)x^{-4},\quad f'''(2/\pi)=-3\pi^5/8.$

Ответ: $f(x)=\frac{\pi^4}{16}(x-\frac{2}{\pi})^2-\frac{\pi^5}{16}(x-\frac{2}{\pi})^3+o((x-\frac{2}{\pi})^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=6e^{x-2}-x^3+3x^2-6x,\ x_0=2$.

Найдём значение функции и её первых четырёх производных в заданной точке:

$f(2)=-2,\ f'(x)=6e^{x-2}-3x^2+6x-6,\ f'(2)=0,$

$f''(x)=6e^{x-2}-6x+6,\ f''(2)=0,\ f'''(x)=6e^{x-2}-6,\ f'''(2)=0,\ f^{(4)}(x)=6e^{x-2},\ f^{(4)}(2)=6$

. По формуле Тейлора $f(x)=-2+\frac{1}{4}(x-2)^4+o((x-2)^4)$. **Ответ:** В окрестности точки (2, -2) функция ведёт себя как степенная функция четвёртой степени. Точка (2, -2) является точкой минимума функции.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sin^2 x-2\cos x}{x^4}$.

По формуле Тейлора $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$. Аналогично,

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}[1-(1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o((2x)^4))]=x^2-\frac{1}{3}x^4+o((2x)^4).$$

Подставим это в предел: $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sin^2 x-2\cos x}{x^4}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^6)-2(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(4x^4))}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{12}x^4+o(4x^4))}{x^4}=\frac{1}{4}.$$

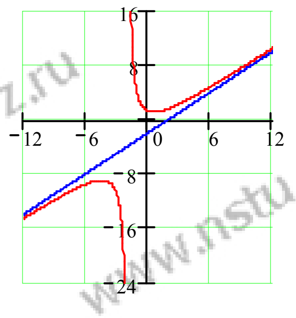
Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sin^2 x-2\cos x}{x^4}=\dfrac{1}{4}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{4x^2+9}{4x+8}$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в точке разрыва функции: $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{4x^2+9}{4x+8}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{4x^2+9}{4x+8}=\infty$. Отсюда следует, что прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+9}{4x+8}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2+\dfrac{25}{4x+8})=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+9}{4x+8}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2+\dfrac{25}{4x+8})=+\infty$. Из этого следует, что имеется наклонная асимптота $y=kx+b$, где k=1. Действительно,



$k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+9}{4x^2+8x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+9}{4x^2+8x}=1$. Тогда

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{4x^2+9}{4x+8}-x)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+9-4x^2-8x}{4x+8}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9-8x}{4x+8}=-2$. Таким образом, прямая $y=x-2$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$.

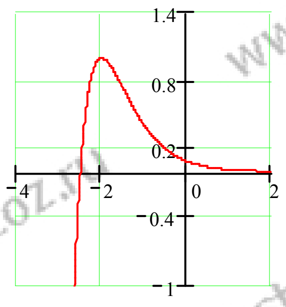
1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют. 3. Функция непрерывна. Вертикальных асимптот нет. 4.

$\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)e^{-2(x+2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{e^{2(x+2)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2e^{2(x+2)}}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+5)e^{-2(x+2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+5}{e^{2(x+2)}}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{2e^{2(x+2)}}=\infty$, следовательно, $y=0$ - односторонняя горизонтальная асимптота, наклонных асимптот нет. 5. Первая производная

$y'=2e^{-2(x+2)}-4(2x+5)e^{-2(x+2)}=$

$=2e^{-2(x+2)}[1-(2x+5)]=-4e^{-2(x+2)}(x+2)$. Производная обращается в нуль в точке $x=-2$. При $x<-2$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает, При $x>-2$ производная $y'<0$, следовательно, функция убывает. Точка $x=-2$ является точкой максимума функции, причём $y_{\max}=y(-2)=1$. 6.



$y''=-4e^{-2(x+2)}(x+2)=8e^{-2(x+2)}(x+2)-4e^{-2(x+2)}=4e^{-2(x+2)}(2x+3)$

. В точке $x=-3/2$ вторая производная равна нулю. Имеем два интервала: в интервале $(-\infty,-3/2)$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости, в интервале $(-3/2,\infty)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости. Точка $(-3/2,2e^{-1})$ - точка перегиба. 7. При $x=0$ функция равна $y=5e^{-4}$, точка $(0,5e^{-4})$ – точка пересечения оси ОУ. При $y=0$ получим $x=-5/2$, точка $(-5/2,0)$ – точка пересечения оси ОХ.

Ответ: График функции представлен на рисунке, экстремум (максимум) в точке (-2, 1), точки перегиба – точка $(-3/2,\, 2e^{-1})$.