Вариант № 4

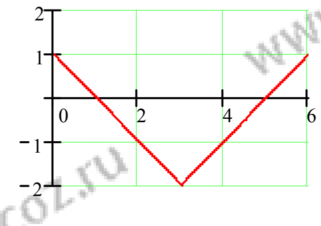
1. Найти область определения функции : $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$.

Область определения данной функции определяется неравенством $x \ge 0$. Кроме того, знаменатель не должен обращаться в нуль. Найдём корни знаменателя: $x_1=1, x_2=2$. Объединяя результаты, получим: $x \ge 0, x \ne 1, x \ne 2$. **Ответ:** $x \in [0,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$**.**

2. Построить график функции: $y=\sqrt{x^2-6x+9}-2$.

Так как $x^2-6x+9=(x-3)^2 \ge 0$ всегда, то данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: $y=\sqrt{x^2-6x+9}-2=\sqrt{(x-3)^2}-2=|x-3|-2$.

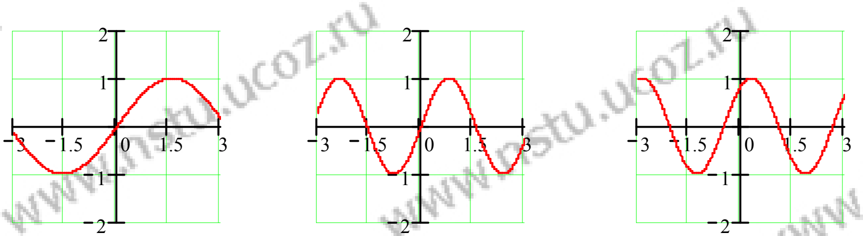
Таким образом, $y=\begin{cases} x-5, & если\ x \ge 3, \\ 1-x, & если\ x<3 \end{cases}$.



Ответ: график представлен на рисунке.

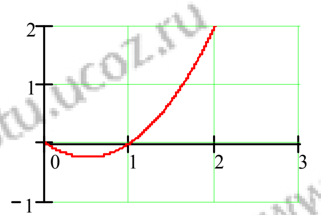
3. Построить график функции: $y=\sin(2x+1)$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию. Вынесем за скобки множитель 2: $y=\sin[2(x+\frac{1}{2})]$. Последовательно строим сначала $y=\sin(x)$, затем $y=\sin(2x)$ («сжимая» график в два раза по оси OX), затем сдвигаем график влево по оси OX на величину 1/2. **Ответ:** построения представлены на рисунках.



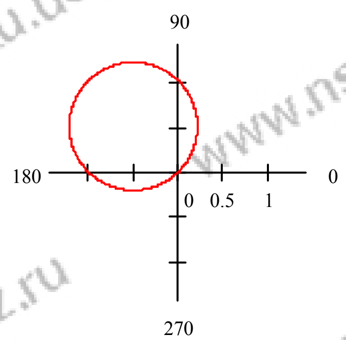
4. Построить график функции: $\begin{cases} x=3^t \\ y=9^t-3^t \end{cases}$

Исключим параметр t: $y=9^t-3^t=(3^t)^2-3^t=x^2-x$ или $y=x(x-1)$. Функция определена только для $x>0$, так как $e^t>0$ всегда. Это часть параболы, вершина которой находится в точке (1/2, -1/4), а ветви направлены вверх. **Ответ:** график представлен на рисунке.



5. Построить график функции: $\rho=\sqrt{2}\sin(\varphi-\pi/4)$.

Поскольку $\rho \ge 0$, то функция существует для тех значений φ, для которых $\sin(\varphi-\pi/4) \ge 0$. Это наблюдается при $0 \le \varphi-\pi/4 \le \pi$ или $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{5\pi}{4}$. Строим график, изменяя φ в этих пределах. Получим окружность. Можно строить график другим способом. Так как $y=\rho\sin\varphi, x=\rho\cos\varphi$, то $x^2+y^2=\rho^2$, $\cos\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Кроме того,



$\rho = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4) = \sqrt{2}\sin\varphi \cdot \cos(\pi/4) - \sqrt{2}\cos\varphi \cdot \sin(\pi/4) = \sin\varphi - \cos\varphi = \dfrac{y}{\rho} - \dfrac{x}{\rho}$.

Или $\rho^2 = y - x$ или $x^2 + y^2 = y - x$. Это уравнение окружности. Его можно привести к канонической форме: $(x+1/2)^2 + (y-1/2)^2 = 1/2$.

Ответ: график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$ (неопределённость вида (∞/∞)).

Воспользуемся формулой бинома Ньютона $(a+b)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i}$, где $C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-4n+6n^2-4n^3+n^4-(1+4n+6n^2+4n^3+n^4)}{1+3n+3n^2+n^3-(1-3n+3n^2-n^3)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-8n-8n^3}{6n+2n^3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-8/n^2-8}{6/n^2+2} = \dfrac{-8}{2} = -4$. **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3} = -4$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(2-x)(4+2x+x^2)} = -\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x^2+4)}{4+2x+x^2} = -\dfrac{32}{12} = -\dfrac{8}{3}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3} = -\dfrac{8}{3}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое по отношению к числителю выражение: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$ или

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3x+9}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -3\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$

$= -\dfrac{1}{16}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = -\dfrac{1}{16}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Перейдём к синусу в знаменателе: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\sin^2\pi x}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\cos^2\pi x = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\sin^2\pi x}$.

Далее, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\sin^2\pi x} = \left|\begin{matrix} x-1=t,\ \ x=t+1,\ \ \cos\pi x = \cos\pi(t+1) = -\cos\pi t, \\ \text{если}\ \ x\to 1,\ \ \text{то}\ \ t\to 0,\ \ \sin\pi x = \sin\pi(t+1) = -\sin\pi t \end{matrix}\right| = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos\pi t}{\sin^2\pi t}$.

Воспользуемся формулой $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{\sin^2\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi t}{2}}{\sin^2\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi t}{2}}{[2\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}]^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi t}{2}}=\frac{1}{2}.$$ **Ответ:** $\lim_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}=\dfrac{1}{2}$.

10. Вычислить предел: $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{-(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+4}{n-1}\right)^{-(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^{-(n+2)}=$$

$$=\left|\frac{4}{n-1}=\frac{1}{t},\ \text{если } n\to\infty,\ \text{то } t\to\infty,\ n=4t+1\right|==\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-(4t+3)}=$$

$$=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-4}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-3}=e^{-4}.$$ **Ответ:** $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}=e^{-4}$.

11. Вычислить предел: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$ (неопределённость вида (0/0)).

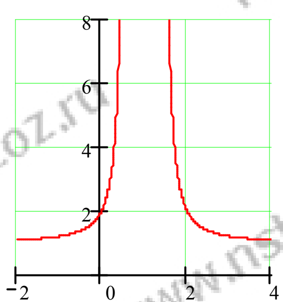
Воспользуемся эквивалентностью (при $x\to 0$): $\arcsin 2x \sim \sin(2x) \sim 2x$. Получим: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln(e-x)-1}$. Сделаем замену переменной: $\ln(e-x)-1=t$. Тогда $\ln(e-x)=t+1,\ e-x=e^{t+1},\ x=e(1-e^t)$, если $x\to 0$, то $t\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\ln(e-x)-1}=\lim_{t\to 0}\frac{2e(1-e^t)}{t}=-\lim_{t\to 0}\frac{2e(e^t-1)}{t}.$$ Далее, $e^t-1\sim t$. Таким образом,

$$-\lim_{t\to 0}\frac{2e(e^t-1)}{t}=-2e.$$ **Ответ:** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}=-2e$.

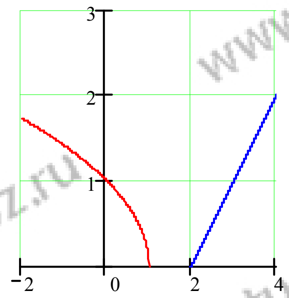
12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=2^{\frac{1}{(x-1)^2}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме $x=1$. В точке $x=1$ функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim_{x\to 1-0}\left(2^{\frac{1}{(x-1)^2}}\right)=\lim_{x\to 1+0}\left(2^{\frac{1}{(x-1)^2}}\right)=2^\infty=\infty$. Таким образом, в точке $x=1$ имеют место разрыв второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim_{x\to -\infty}\left(2^{\frac{1}{(x-1)^2}}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(2^{\frac{1}{(x-1)^2}}\right)=2^0=1$. **Ответ:** В точке $x=1$ функция имеет разрыв второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.



13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$.

Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:



$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} \sqrt{1-x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} 0 = 0$,

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} (x-2) = 0$. Таким образом, в точке x=2 функция непрерывна, а в точке x=1 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=1 равна (-1).

Ответ: В точке x=1 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = arctg(x^3 - x^{3/2}\sin(1/3x)),\ x \ne 0,\ f(0) = 0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg(x^3 - x^{3/2}\sin(1/3x))}{x}$. Но $arctg(t)$ ~t, а 2^t-1~t·ln(2) при $t\to 0$. Поэтому

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x^{3/2}\sin(1/3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 - \sqrt{x}\sin(1/3x)) = 0$, так как $|\sin(1/3x)| \le 1$ при любых значениях x. **Ответ:** $f'(0) = 0$

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = (ctg\,3x)^{2e^x}$.

Прологарифмируем функцию: $\ln y = 2e^x \cdot \ln ctg\,3x$.

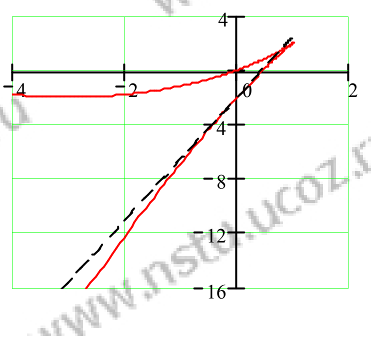
Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = 2e^x \cdot \ln ctg3x - 2e^x \cdot \dfrac{1}{ctg\,3x} \cdot \dfrac{3}{\sin^2 3x} = 2e^x(\ln ctg3x - \dfrac{6}{2\sin 3x \cdot \cos 3x})$. Подставляем сюда y:

$y' = 2e^x(ctg3x)^{2e^x}(\ln ctg3x - \dfrac{6}{\sin 6x})$ **Ответ:** $y' = 2e^x(ctg3x)^{2e^x}(\ln ctg3x - \dfrac{6}{\sin 6x})$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ $t = 2$.

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:



$x_0 = x(2) = 0$, $y_0 = y(2) = -2$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \dfrac{3}{2}(1+t)$.

Тогда $y'_x(2) = \dfrac{9}{2}$. Далее, $y''_x = \dfrac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \dfrac{3}{2\cdot 2(1-t)}$, следовательно, $y''_{xx}(0) = -\dfrac{3}{4}$. Таким образом, уравнение касательной $y = -2 + (9/2)x$, уравнение нормали $y = -2 - (2/9)x$. Или $9x - 2y - 4 = 0$ и $2x + 9y + 18 = 0$.

Ответ: $(x_0, y_0) = (0, -2)$, $y'_x(x_0) = 9/2$, $y''_{xx}(x_0) = -3/4$, $\begin{cases} 9x - 2y - 4 = 0 & \textit{касательная} \\ 2x + 9y + 18 = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $\cos(xy) + y = 1$, принимает в точке $x_0 = 0$ значение $y_0 = -1$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $-(y + xy')\sin(xy) + y' = 0$.

Из этого равенства находим: $y' = \dfrac{y\sin(xy)}{1 - x\sin(xy)}$. Находим вторую производную:

$$y'' = \frac{[y'\sin(xy) + y(y + xy')\cos(xy)](1 - x\sin(xy)) + [\sin(xy) + x(y + xy')\cos(xy)]y\sin(xy)}{(1 - x\sin(xy))^2}.$$

Вычислим производные в точке $x_0 = 0$: $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. **Ответ:** $y' = \dfrac{y\sin(xy)}{1 - x\sin(xy)}$,

$$y'' = \frac{[y'\sin(xy) + y(y + xy')\cos(xy)](1 - x\sin(xy)) + [\sin(xy) + x(y + xy')\cos(xy)]y\sin(xy)}{(1 - x\sin(xy))^2},$$

$y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$, $x = 0{,}97$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0))$, $\Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 1$, $y(x_0) = y(1) = 2$, $y' = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 5)^{-2/3}(2x + 2)$, $y'(x_0) = y'(1) = \dfrac{1}{3}$, $\Delta x = -0{,}03$.

Тогда $y(1{,}53) \approx 2 - 0{,}03/3 = 1{,}99$. **Ответ:** $y \approx 1{,}99$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{1/(x-e)}$.

Это неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{1/(x-e)} = \lim\limits_{x\to e} e^{[1/(x-e)]\cdot\ln\ln x}$.

Найдём предел в показателе степени: $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\ln x}{x - e} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{[\ln\ln x]'}{[x - e]'} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{1}{x\ln x} = e^{-1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{1/(x-e)} = e^{1/e}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{1/(x-e)} = e^{1/e}$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{\sin^2 x} - \dfrac{arctg\, x}{tg^2 x}\right)$.

Это неопределённость вида (∞-∞). Здесь $\arcsin x \sim x$ и $arctg\, x \sim x$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{\sin^2 x} - \frac{arctg\, x}{tg^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{tg\, x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{\sin^2 x} - \dfrac{arctg\, x}{tg^2 x}\right) = 0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=x^4-21x^3-640,\ x_0=-3$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dfrac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$.

Найдём все производные: $f'(x)=4x^3-63x^2$, $f''(x)=12x^2-126x$, $f'''(x)=24x-126$, $f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(-3)=8,\ f'(-3)=-675,\ f''(-3)=486,\ f'''(-3)=-198,\ f^{(4)}(-3)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=8-675(x+3)+243(x+3)^2-33(x+3)^2+(x+3)^4$.

Ответ: $f(x)=8-675(x+3)+243(x+3)^2-33(x+3)^3+(x+3)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=\dfrac{1}{\ln x+1},\ x_0=e^2$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(e^2)=1/3,\ f'(x)=-(1+\ln x)^{-2}x^{-1},\ f'(e^2)=-e^{-2}/9$,

$f''(x)=2(1+\ln x)^{-3}x^{-2}+(1+\ln x)^{-2}x^{-2},\ f''(e^2)=5e^{-4}/27$,

$f'''(x)=-6(1+\ln x)^{-4}x^{-3}-4(1+\ln x)^{-3}x^{-3}-2(1+\ln x)^{-3}x^{-3}-2(1+\ln x)^{-2}x^{-3}$,

$f'''(e^2)=-42e^{-6}/81$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{e^{-2}}{9}(x-e^2)+\dfrac{5e^{-4}}{54}(x-e^2)^2-\dfrac{7e^{-6}}{81}(x-e^2)^3+o((x-e^2)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=2x\ln(1+x)-2x^2+x^3,\ x_0=0$.

Найдём значение функции и её первых четырёх производных в заданной точке: $f(0)=0,\ f'(x)=2\ln(1+x)+2x(1+x)^{-1}-4x+3x^2,\ f'(0)=0$, $f''(x)=4(1+x)^{-1}-2x(x+1)^{-2}-4+6x,\ f''(0)=0,\ f'''(x)=-6(x-1)^{-2}+4x(x+1)^{-3}+6$, $f'''(0)=0,\ f^{(4)}(x)=16(x-1)^{-3}-12x(x+1)^{-4},\ f^{(4)}(0)=16$. По формуле Тейлора $f(x)=2x^4/3+o(x^4)$. **Ответ:** В окрестности точки (0, 0) функция ведёт себя как степенная функция четвёртой степени. Точка (0, 0) является точкой минимума функции.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xe^{x-1}-x^2}{(x-1)^2}$.

По формуле Тейлора $e^{x-1}=1+(x-1)+\dfrac{1}{2!}(x-1)^2+o((x-1)^2)$. Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to1}\frac{xe^{x-1}-x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x[1+(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+o((x-1)^2)]-x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xe^{x-1}-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}$.

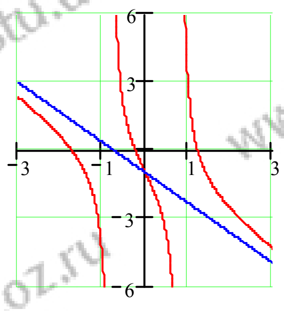
Область определения функции: $x\in(-\infty,-2/3)\cup(-2/3,2/3)\cup(2/3,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения: $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2/3}-0}\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{2/3}+0}\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{2/3}-0}\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2/3}+0}\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}=\infty$. Отсюда следует, что прямые $x=-\sqrt{2/3}$ и $x=\sqrt{2/3}$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{4}{3}x-1-\dfrac{16}{3}\cdot\dfrac{x}{2-3x^2})=\infty$,

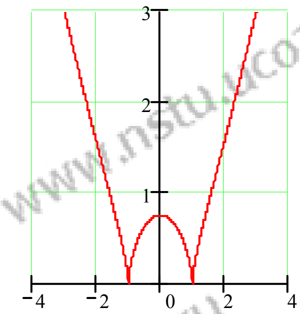
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{4}{3}x-1-\dfrac{16}{3}\cdot\dfrac{x}{2-3x^2})=-\infty$.



Следовательно, прямая $y=-\dfrac{4}{3}x-1$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty)$. 2. Функция чётная, периодичность отсутствует. 3. Функция непрерывна. Вертикальных асимптот нет. 4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=\infty$, следовательно, наклонных асимптот нет. 5. Первая производная $y'=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Производная обращается в нуль в точке $x=0$. Кроме того, производная терпит разрывы в точках $x=-1$ и $x=1$. При $x<-1$ производная $y'<0$, следовательно, функция убывает, при $-1<x<0$ производная $y'>0$ - функция возрастает, при $0<x<1$ производная $y'<0$, следовательно, функция убывает.



Точка $x=0$ является точкой максимума функции, причём $y_{\max}=y(0)=3/4$. При $x>1$ производная $y'>0$, следовательно, функция снова возрастает. 6.

$y''=\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\right)'=\dfrac{(x^2-1)^{1/3}-(1/3)x(x^2-1)^{-2/3}\cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=\dfrac{x^2-3}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$. В точках $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ вторая производная равна нулю. Кроме того, в точках $x=-1$ и $x=1$ вторая производная не существует. Имеем пять интервалов: в интервале $(-\infty,-\sqrt{3})$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости, в интервале $(-\sqrt{3},-1)$, в интервале $(-1,1$ и в интервале $(1,\sqrt{3})$ производная $y''<0$ - интервалы выпуклости, в интервале $(\sqrt{3},\infty)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости. Точки $(-\sqrt{3},\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{4})$ и $(\sqrt{3},\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{4})$ являются точками перегиба. 7. При $x=0$ функция равна $y=\dfrac{3}{4}$. Точка (0, 3/4) – точка пересечения оси ОУ.

С осью OX график не пересекается. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке (0, 3/4) - максимум, точки перегиба $(-\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt[3]{4})$ и $(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt[3]{4})$.