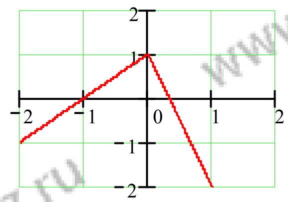
Вариант № 6

1. Найти область определения функции: $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\lg^2 x^2}$.

Область определения данной функции определяется неравенством $x+1 \ge 0$, т.е. $x \ge -1$. Далее, знаменатель не должен обращаться в нуль: $\lg^2 x^2 \ne 0$ или $x \ne \pm 1$. Кроме того, аргумент логарифма не может быть нулём: $x \ne 0$. Объединяя результаты, получим: $x > -1,\ x \ne 1,\ x \ne 0$. **Ответ:** $x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.

2. Построить график функции: $y = -2|x| - x + 1$.



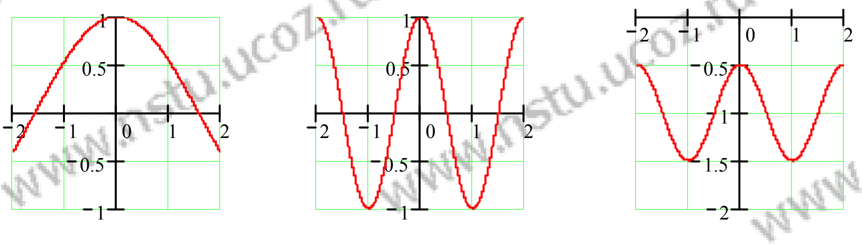
Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: если $x \ge 0$, то $y = -2x - x + 1 = 1 - 3x$. Если $x < 0$, то $y = 2x - x + 1 = x + 1$.

Таким образом, $y = \begin{cases} 1 - 3x, & если\ x \ge 0, \\ x + 1, & если\ x < 0 \end{cases}$.

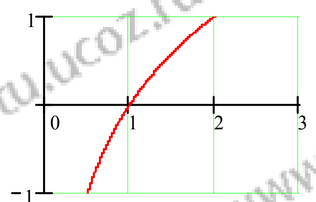
Ответ: график представлен на рисунке.

3. Построить график функции: $y = 0{,}5\cos \pi x - 1$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Последовательно строим сначала $y = \cos(x)$, затем $y = \cos(\pi x)$ («сжимая» график в π раз по оси OX), затем уменьшаем значения функции в 0,5 раза и от полученного значения отнимаем единицу, т.е «сжимаем» график по оси OY в два раза и опускаем весь график на единицу ниже. **Ответ:** построения представлены на рисунках.

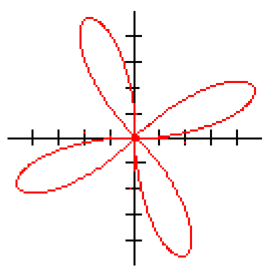


4. Построить график функции: $\begin{cases} x = 2^{\sin t} \\ y = \sin t \end{cases}$



Исключим параметр t: $x = 2^{\sin t} = 2^y$ или $y = \log_2 x$. Функция определена только для $2^{-1} \le x \le 2$, так как $-1 \le \sin t \le 1$ всегда. Это часть графика логарифмической функции с двоичным основанием. **Ответ:** график представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho = \sin 4\varphi$.



Поскольку $\rho \ge 0$, то функция существует для тех значений φ, для которых $\sin 4\varphi \ge 0$. Это наблюдается при $k\pi \le 4\varphi \le (k+1)\pi,\ k = 0, 2, 4, 6, ...$ или $\dfrac{k\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{(k+1)\pi}{4}$.

Полагая $k = 0, 2, 4, 6$, получаем четыре интервала: $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4}$, $\pi \le \varphi \le \dfrac{5\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{7\pi}{4}$. В каждом интервале функция возрастает от 0 до 1, затем убывает от 1 до 0. Получаем четырёхлепестковую «розу». **Ответ:** график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+2(n-1)}{1+2+...+n}$.

Воспользуемся формулой для суммы арифметической прогрессии: $1+3+5+...+2(n-1)=\frac{1+2(n-1)}{2}n=\frac{n}{2}(2n-1)$. Аналогично, $1+2+...+n=\frac{n+1}{2}n=\frac{n}{2}(n+1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+2(n-1)}{1+2+...+n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)\cdot 2}{2\cdot n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-n^{-1}}{1+n^{-1}}=2.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+2(n-1)}{1+2+...+n}=2$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+5x-6}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+5x-6}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+6}=\frac{3}{7}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+5x-6}=\frac{3}{7}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ (неопределённость вида (0/0)).

Вычислим предел, используя замену переменной:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\left|\begin{matrix}x=t^4,\ \textit{если}\ \ x\to 16,\\ \textit{то}\ \ t\to 2\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t+2)}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t+2}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\frac{1}{4}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^3 x}{(2x-\pi)^2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^3 x}{(2x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1-\sin x)}{(2x-\pi)^2}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\sin x+\sin^2 x)=3\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1-\sin x)}{(2x-\pi)^2}=$$

$$=\left|\begin{matrix}x-\pi/2=t,\ \ x=t+\pi/2,\\ \textit{если}\ \ x\to\pi/2,\ \ \textit{то}\ \ t\to 0\end{matrix}\right|=3\lim_{t\to 0}\frac{(1-\sin(t+\pi/2))}{4t^2}=3\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{4t^2}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(t/2)}{t^2}=$$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t/2)}{t/2}\cdot\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t/2)}{t/2}=\frac{3}{8}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^3 x}{(2x-\pi)^2}=\frac{3}{8}$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{1-n}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{1-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+20n-1}{3n^2-6n+7}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{26n-8}{3n^2-6n+7}\right)^{n-1}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{26n-8}{3n^2-6n+7}\right)^{\frac{3n^2-6n+7}{26n-8}\cdot\frac{(n-1)(26n-8)}{3n^2-6n+7}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(26n-8)}{3n^2-6n+7}} = e^{26/3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{1-n} = e^{26/3}$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2})}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим на сопряжённое выражение:

$$\lim_{x\to2}\frac{1-2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2})} = \lim_{x\to2}\frac{(1-2^{4-x^2})(\sqrt{2x}+\sqrt{3x^2-5x+2})}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2})(\sqrt{2x}+\sqrt{3x^2-5x+2})} =$$

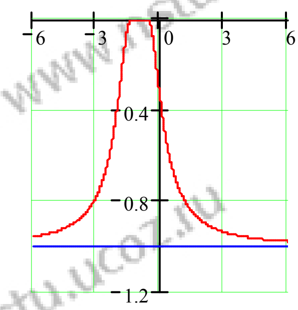
$$= -\lim_{x\to2}\frac{(1-2^{4-x^2})(\sqrt{2x}+\sqrt{3x^2-5x+2})}{2(3x^2-7x+2)} = \left|2^{4-x^2}-1\sim(4-x^2)\ln 2\right| =$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{(4-x^2)\ln 2(\sqrt{2x}+\sqrt{3x^2-5x+2})}{6(x-2)(x-1/3)} = -\lim_{x\to2}\frac{(2+x)\ln 2(\sqrt{2x}+\sqrt{3x^2-5x+2})}{6(x-1/3)} = \frac{8\ln 2}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2})} = -\dfrac{8\ln 2}{5}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=-e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме $x=-1$. В точке $x=-1$ функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim\limits_{x\to-1-0}\left(-e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\right) = \lim\limits_{x\to-1+0}\left(-e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\right) = -e^{-\infty} = 0$. Таким образом, в точке $x=-1$ имеют место устранимый разрыв. Полагая $f(-1)=0$, можно считать функцию непрерывной на всей числовой оси. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}\right) = -e^{0} = -1$. **Ответ:** В точке $x=-1$ функция имеет устранимый разрыв, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

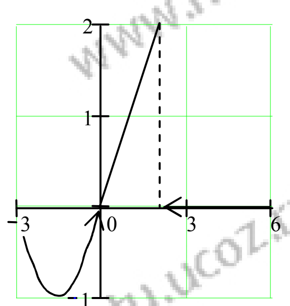


13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to0-0}\sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to0+0} x = 0$,



$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} x = 2,\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} 0 = 0$. Таким образом, в точке x=0 функция непрерывна, а в точке x=2 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=2 равна -2.

Ответ: В точке x=2 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$$f(x) = \frac{\sin(e^{x^2\sin(5/x)} - 1)}{x\sin(5/x)},\ x \neq 0,\ f(0) = 0.$$

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(e^{x^2\sin(5/x)} - 1)}{x\cdot x\sin(5/x)}$. Но $sin(t)$ ~t, а e^t-1~t при $t\to 0$. Поэтому

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2\sin(5/x)} - 1}{x^2\sin(5/x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin(5/x)}{x^2\sin(5/x)} = 1$. **Ответ:** $f'(0) = 1$

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = (x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = 8\ln(x\sin x)\cdot\ln(x\sin x) = 8[\ln(x\sin x)]^2$. Берём производную, как производную неявной функции: $\frac{y'}{y} = 16\ln(x\sin x)\cdot\frac{\sin x + x\cos x}{x\sin x}$.

Подставляем сюда y:

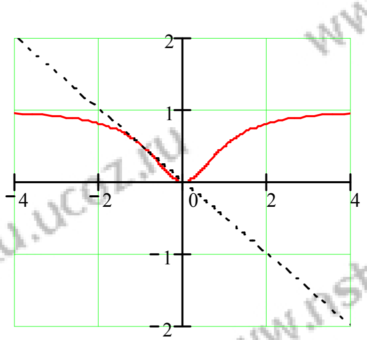
$$y' = 16\ln(x\sin x)\cdot(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}\cdot\frac{\sin x + x\cos x}{x\sin x} = 16\ln(x\sin x)\cdot(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}\cdot(\frac{1}{x} + ctg\, x).$$

Ответ: $y' = 16\ln(x\sin x)\cdot(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}\cdot(\frac{1}{x} + ctg\, x)$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = 1/t \\ y = 1/(1+t^2) \end{cases} \qquad t = -1.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:



$x_0 = x(-1) = -1$, $y_0 = y(-1) = 1/2$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t\cdot t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2t^3}{(1+t^2)^2}$. Тогда $y'_x(-1) = -1/2$. Далее,

$$y''_x = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = -\frac{[6t^2(1+t^2)^2 - 2(1+t^2)\cdot 4t^4]\cdot t^2}{(1+t^2)^4} =$$

$= -\dfrac{2t^4(3-t^2)}{(1+t^2)^3}$, следовательно, $y''_x(-1) = -1/2$. Таким образом, уравнение касательной $y = 1/2 - (1/2)(x+1)$, уравнение нормали $y = 1/2 + 2(x+1)$. Или $x + 2y = 0$ и $4x - 2y + 5 = 0$.

Ответ: $(x_0, y_0) = (-1, 1/2)$, $y'_x(x_0) = -1/2$, $y''_x(x_0) = -1/2$, $\begin{cases} x + 2y = 0 & \textit{касательная} \\ 4x - 2y + 5 = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $1 + y^3 - y(x^2+1) = 0$, принимает в точке $x_0 = 1$ значение $y_0 = 1$. Найти y'_x, y''_{xx}, $y'_x(x_0)$, $y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $3yy' - y'(x^2+1) - 2xy = 0$.

Из этого равенства находим: $y' = \dfrac{2xy}{3y^2 - x^2 - 1}$. Находим вторую производную:

$y'' = \dfrac{2[y + xy'](3y^2 - x^2 + 1) - (6yy' - 2x)2xy}{(3y^2 - x^2 - 1)^2}$. Тогда точке $x_0 = 1$: $y'(1) = 2$, $y''(1) = -14$.

Ответ: $y' = \dfrac{2xy}{3y^2 - x^2 - 1}$, $y'' = \dfrac{2[y + xy'](3y^2 - x^2 + 1) - (6yy' - 2x)2xy}{(3y^2 - x^2 - 1)^2}$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = -14$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$, $x = 1{,}97$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0))$, $\Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 2$, $y(x_0) = y(2) = 3$, $y' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 3}}$, $y'(x_0) = y'(2) = \dfrac{5}{6}$, $\Delta x = -0{,}03$. Тогда $y(1{,}97) \approx 3 - 0{,}03 \cdot 5/6 = 2{,}975$. **Ответ:** $y \approx 2{,}975$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} e^{(1/x^2)\cdot\ln(\sin x/x)} = $

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}[(1/x^2)\cdot\ln(\sin x/x)]}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x/x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\sin x/x)]'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x\cos x - \sin x)}{2x\cdot\sin x\cdot x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x - \sin x)}{2x^2\cdot\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2(2x\cdot\sin x + x^2\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x(2\sin x + x\cos x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2(2\cos x + \cos x - x\sin x)} = -\frac{1}{6}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-1/6}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-1/6}$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\ln^2 x}$.

Это неопределённость вида (∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln^2 x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)'}{(\ln^2 x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1/3)x^{-2/3}}{2x^{-1}\ln x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1/3}}{\ln x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{(1/3)x^{-2/3}}{x^{-1}}=\frac{1}{18}\lim_{x\to\infty}x^{1/3}=\infty$$

. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\ln^2 x}=\infty$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=x^4-2x^2,\ x_0=-1$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x)=4x^3-4x,\ f''(x)=12x^2-4,\ f'''(x)=24x,\ f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(-1)=-1,\ f'(-1)=0,\ f''(-1)=6,\ f'''(-1)=-24,\ f^{(4)}(-1)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=-1+4(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4$.

Ответ: $f(x)=-1+4(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=tg\ln x,\ x_0=e^{\pi/4}$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(e^{\pi/4})=1,\ f'(x)=x^{-1}\cos^{-2}\ln x,\ f'(e^{\pi/4})=2e^{-\pi/4}$,

$f''(x)=-x^{-2}\cos^{-2}\ln x+2x^{-2}\cos^{-3}\ln x\cdot\sin\ln x,\ f''(e^{\pi/4})=2e^{-\pi/2}$,

$f'''(x)=2x^{-3}\cos^{-2}\ln x-2x^{-3}\cos^{-3}\ln x\cdot\sin\ln x-4x^{-3}\cos^{-3}\ln x\cdot\sin\ln x+6x^{-3}\cos^{-4}\ln x\cdot\sin^2\ln x+$
$+2x^{-3}\cos^{-2}\ln x=2x^{-3}\cos^{-2}\ln x\cdot(2-5tg\ln x+6tg^2\ln x),\ f'''(e^{\pi/4})=8e^{-3\pi/4}$.

Ответ: $f(x)=1+2e^{-\pi/4}(x-e^{\pi/4})+e^{-\pi/2}(x-e^{\pi/4})^2+\dfrac{4e^{-3\pi/2}}{3}(x-e^{\pi/4})^3+o((x-e^{\pi/4})^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=e^{-(x+1)^2}+x^2+2x,\ x_0=-1$.

Найдём значение функции и её первых четырёх производных в заданной точке:

$f(-1)=0,\ f'(x)=-2(x+1)e^{-(x+1)^2}+2x+2,\ f'(-1)=0,$

$f''(x)=-2e^{-(x+1)^2}+4(x+1)^2e^{-(x+1)^2}+2,\ f''(-1)=0,\ f'''(x)=12(x+1)e^{-(x+1)^2}-8(x+1)^3e^{-(x+1)^2}$,

$f'''(-1)=0,\ f^{(4)}(x)=12e^{-(x+1)^2}-24(x+1)^2e^{-(x+1)^2}+12(x+1)^4e^{-(x+1)^2},\ f^{(4)}(-1)=12$. По формуле Тейлора $f(x)=(x+1)^4/2+o((x+1)^4)$. **Ответ:** В окрестности точки (-1, 0) функция ведёт себя как степенная функция четвёртой степени. Точка (-1, 0) является точкой минимума функции.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x+0.5x^2}{x^3}$.

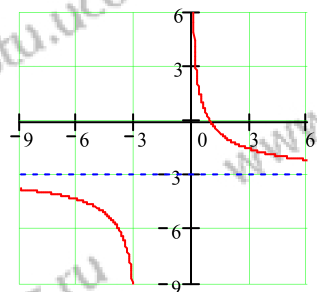
По формуле Тейлора $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$. Аналогично,

$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x+0.5x^2}{x^3}=$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^5))+0.5x^2}{x^3} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3))}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x+0.5x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=2\ln\frac{x+3}{x}-3$.



Область определения функции: $x\in(-\infty,-3)\cup(0,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения:

$\lim\limits_{x\to -3-0}(2\ln\frac{x+3}{x}-3)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0}(2\ln\frac{x+3}{x}-3)=\infty$. Отсюда следует, что прямые $x=-3$ и $x=0$ являются односторонними вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to -\infty}(2\ln\frac{x+3}{x}-3)=2\ln 1-3=-3$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(2\ln\frac{x+3}{x}-3)==2\ln 1-3=-3$.

Следовательно, прямая $y=-3$ является горизонтальной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=xe^{\frac{1}{4x^2}}$.

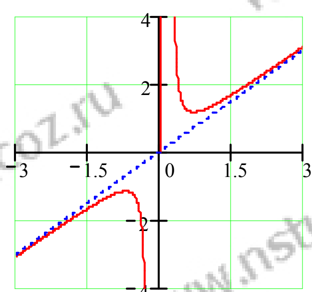
1. Область определения: $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. 2. Функция нечётная, периодичность отсутствует. 3. Функция непрерывна в области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения:

$$\lim_{x\to 0-0}(xe^{\frac{1}{4x^2}})=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{4x^2}=t,\ x=\frac{1}{-2\sqrt{t}},\ \textit{так как } x<0,\\ \textit{если}\ \ x\to 0,\ \textit{то}\ \ t\to\infty\end{array}\right|=-\lim_{t\to\infty}(\frac{e^t}{2\sqrt{t}})=-\lim_{t\to\infty}(\frac{e^t}{t^{-1/2}})=-\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t}e^t)=-\infty.$$

Аналогично, $\lim\limits_{x\to 0+0}(xe^{\frac{1}{4x^2}})=\infty$ Отсюда следует, что прямая $x=0$ являются вертикальной асимптотой. 4. $\lim\limits_{x\to -\infty}xe^{\frac{1}{4x^2}}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}xe^{\frac{1}{4x^2}}=\infty$. Найдём наклонные асимптоты: $y=kx+b$,

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(xe^{\frac{1}{4x^2}}/x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{4x^2}}=1$, $b=\lim\limits_{x\to +\infty}(xe^{\frac{1}{4x^2}}-x)=$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}x(e^{\frac{1}{4x^2}}-1)==\lim\limits_{x\to +\infty}x\cdot\frac{1}{4x^2}=0$. Следовательно, $y=x$ - наклонная асимптота. 5. Первая производная



$y'=e^{\frac{1}{4x^2}}-\frac{1}{4}\cdot x\cdot 2x^{-3}e^{\frac{1}{4x^2}}=e^{\frac{1}{4x^2}}(1-\frac{1}{2x^2})$. Производная обращается в нуль в точках $x=-1/\sqrt{2}$ и $x=1/\sqrt{2}$. При $x\in(-\infty,-1/\sqrt{2})$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает, при $x\in(-1/\sqrt{2},0)$ производная $y'<0$ - функция убывает, при $x\in(0,1/\sqrt{2})$ производная $y'<0$, следовательно, функция убывает, При $x\in(1/\sqrt{2},\infty)$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает. Точка $x=-1/\sqrt{2}$ является точкой максимума функции, причём

$y_{\max} = y(-1/\sqrt{2}) = -\sqrt{e/2}$. Точка $x = 1/\sqrt{2}$ является точкой минимума функции, причём $y_{\min} = y(1/\sqrt{2}) = \sqrt{e/2}$.

6.

$$y'' = \left(e^{\frac{1}{4x^2}} (1 - \frac{1}{2x^2}) \right)' = -\frac{1}{2x^3} e^{\frac{1}{4x^2}} (1 - \frac{1}{2x^2}) + e^{\frac{1}{4x^2}} \frac{1}{x^3} = e^{\frac{1}{4x^2}} \frac{1}{4x^3} (-2 + \frac{1}{x^2} + 4) = e^{\frac{1}{4x^2}} \frac{(1+2x^2)}{4x^5}.$$

Вторая производная в нуль не обращается. В точке $x = 0$ вторая производная не существует. Имеем два интервала: в интервале $(-\infty, 0)$ производная $y'' < 0$ - интервал выпуклости, в интервале $(0, \infty)$ производная $y'' > 0$ - интервал вогнутости. Точек перегиба нет. 7. График функции не пересекает осей координат. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке $(-1/\sqrt{2}, -\sqrt{e/2})$ - максимум, экстремум в точке $(1/\sqrt{2}, \sqrt{e/2})$ - минимум. Точек перегиба нет.