Вариант № 7

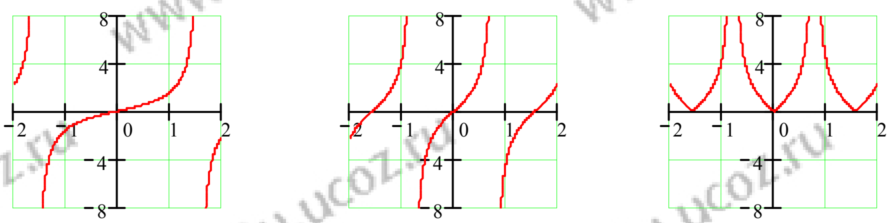
1. Найти область определения функции : $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$.

Область определения данной функции определяется двумя неравенствами: $x^2 - 3x + 2 \ge 0$ и $x^2 + 2x + 3 > 0$. Второе неравенство выполняется при всех значениях x. Корнями уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ являются числа $x_1 = 1, x_2 = 2$. Так как ветви параболы $y = x^2 - 3x + 2$ направлены вверх, то неравенство $x^2 - 3x + 2 \ge 0$ выполняется при $x_1 \le 1$ и $x_2 \ge 2$. **Ответ:** $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

2. Построить график функции: $y = 2|tg\, 2x|$.

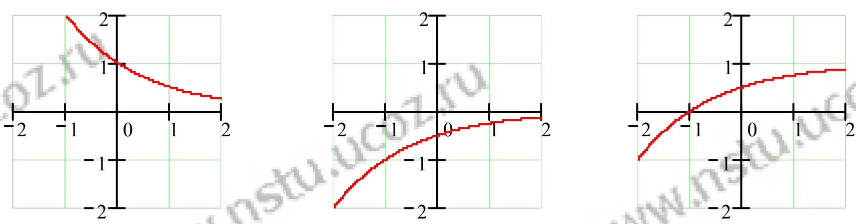
Данная функция определена на всей числовой оси, Точки $x = \dfrac{\pi}{4}(1 \pm 2k),\ k = 0, 1, 2, ...$ являются точками разрыва второго рода. Строим сначала $tg\, x$. Затем увеличиваем график в два раза по оси ОУ и «сжимаем» в два раза по оси ОХ. Получим график функции $2tg\, 2x$. Затем повернем отрицательные ветви графика вверх зеркально по отношению к оси ОХ. Получим график функции $2|tg\, 2x|$.

Ответ: Последовательность построения представлена на рисунках.



3. Построить график функции: $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} + 1$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Строим сначала $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$. Затем повернем график зеркально по отношению к оси ОХ и сдвинем на -1 по оси ОХ. Получим график функции $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$. Затем сдвинем график вверх по оси ОУ на одну единицу. Получим график функции $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} + 1$. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.



4. Построить график функции: $y = \begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = 7\cos^3 t \end{cases}$.

Составим таблицу координат нескольких точек графика в первой четверти:

t	0	π/6	π/4	π/3	π/2
x	0	0.125	0.354	0.65	1
y	7	4.547	2.475	0.875	0

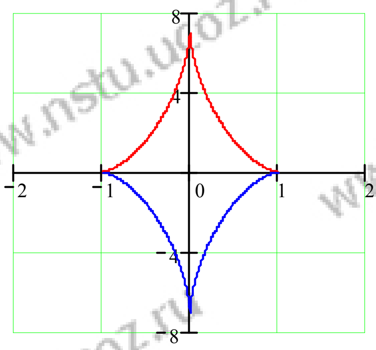
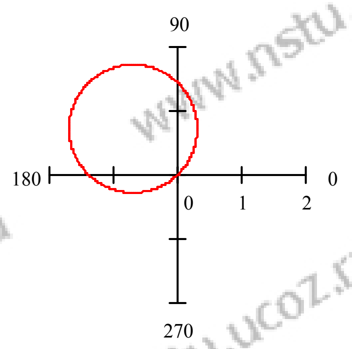


График симметричен относительно осей координат и относительно начала координат. Поэтому нет необходимости вычислять координаты точек в других четвертях координатной плоскости. По точкам строим график и отражаем его симметрично в другие четверти.

Ответ: График представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho = 2\cos(\varphi - 3\pi/4)$.

Поскольку $\rho \geq 0$, то функция существует для тех значений φ, для которых $\cos(\varphi - 3\pi/4) \geq 0$. Это наблюдается при $-\pi/2 \leq \varphi - 3\pi/4 \leq \pi/2$ или $\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{5\pi}{4}$. В этом интервале функция возрастает от 0 до 2 (при $\varphi = 3\pi/4$), затем убывает от 2 до 0. Можно перейти к декартовым координатам. Тогда получим уравнение окружности $(x + 1/\sqrt{2})^2 + (y - 1/\sqrt{2})^2 = 1$, радиус которой равен 1, а центр находится в точке $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ **Ответ:** график представлен на рисунке.



6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$.

Возведём скобки в степени:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 6n + 12n^2 + 8n^3 - 8n^3}{1 + 4n + 4n^2 + 4n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 6n + 12n^2}{1 + 4n + 8n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2 + 6/n + 12}{1/n^2 + 4/n + 8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2} = \dfrac{3}{2}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x^2 - 1} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x+4)}{x+1} = \frac{5}{2}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x^2 - 1} = \dfrac{5}{2}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое по отношению к числителю выражение:

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x\to 8} \frac{(\sqrt{9+2x} - 5)(\sqrt{9+2x} + 5)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt{9+2x} + 5)} = \lim_{x\to 8} \frac{2(x-8)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt{9+2x} + 5)}.$$

Разложим скобку в числителе как разность кубов:

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x\to 8} \frac{2(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt{9+2x} + 5)} = \lim_{x\to 8} \frac{2(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt{9+2x} + 5)} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\dfrac{12}{5}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-tg^2x}{(x-\pi)^4}$ (неопределённость вида (0/0)).

Преобразуем числитель: $\sin^2 x-tg^2x=\dfrac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x(\cos^2 x-1)}{\cos^2 x}=-\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$. Таким образом,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x-tg^2x}{(x-\pi)^4}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^4 x}{(x-\pi)^4\cos^2 x}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^4 x}{(x-\pi)^4}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\cos^2 x}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^4 x}{(x-\pi)^4}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x-\pi=t,\ \ x=t+\pi,\\ если\ x\to\pi,\ то\ t\to 0\end{array}\right|=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin^4(t+\pi)}{t^4}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin^4 t}{t^4}=-\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right]^4=-1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-tg^2x}{(x-\pi)^4}=-1$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n+1}{n^2-3n+6}\right)^{-n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6+8n-5}{n^2-3n+6}\right)^{-n/2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8n-5}{n^2-3n+6}\right)^{-n/2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8n-5}{n^2-3n+6}\right)^{\frac{n^2-3n+6}{8n-5}\cdot\frac{8n-5}{n^2-3n+6}(-n/2)}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8n-5}{n^2-3n+6}\right)^{\frac{n^2-3n+6}{8n-5}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-5}{n^2-3n+6}(-n/2)}.$$

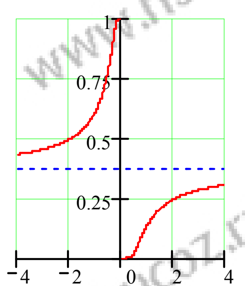
Предел в квадратных скобках равен числу *e*. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-(8n^2-5n)}{2(n^2-3n+6)}=\dfrac{-8}{2}=-4$. Окончательно: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}=e^{-4}$. **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}=e^{-4}$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся эквивалентными величинами (при $t\to 0$): $1-\cos t\sim t^2/2$ и $e^t-1\sim t$. Получим: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(10x)^2}{2\cdot x^2}=\dfrac{100}{2}=50$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}=50$.

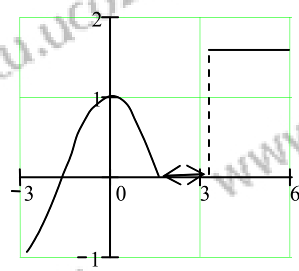
12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=e^{-2^{1/x}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме x=0. В точке x=0 функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim\limits_{x\to 0-0}\left(e^{-2^{1/x}}\right)=e^0=1,\ \lim\limits_{x\to 0+0}\left(e^{-2^{1/x}}\right)=e^{-\infty}=0$. Таким образом, в точке x=0 имеют место разрыв первого рода. Скачёк функции в точке разрыва равен -1. Для построения эскиза графика функции



рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-2^{1/x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-2^{1/x}}\right)=e^{-1}$. **Ответ:** В точке x=0 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:
$$y=\begin{cases}\cos x,\ x\le\pi/2,\\ 0,\ \pi/2<x<\pi,.\\ \pi/2,\quad x\ge\pi.\end{cases}$$



Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to\pi/2-0}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\cos x=0,\quad \lim\limits_{x\to\pi/2+0}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi/2+0}0=0,$

$\lim\limits_{x\to\pi-0}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi-0}0=0,\ \lim\limits_{x\to\pi+0}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi+0}\pi/2=\pi/2$. Таким образом, в точке x=π/2 функция непрерывна, а в точке x= π функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x= π равна π /2.

Ответ: В точке x= π функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x)=tg(x^3+x^2\sin(2/x)),\ x\ne0,\ f(0)=0$.

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0=0,\ f(x_0)=0$, поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg(x^3+x^2\sin(2/x))}{x}$. Но $tg(t)\sim t$ при $t\to0$. Поэтому

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+x^2\sin(2/x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^2+x\sin(2/x))=0$, так как $|\sin(2/x)|\le1$. **Ответ:** $f'(0)=0$.

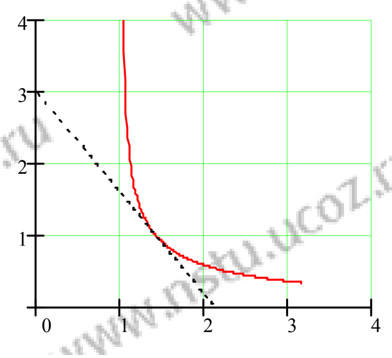
15. Найти производную показательно-степенной функции: $y=(x^3+4)^{tg\,x}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y=tg\,x\cdot\ln(x^3+4)$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{\cos^2x}\ln(x^3+4)+tg\,x\cdot\dfrac{3x^2}{x^3+4}$. Подставляем сюда y:

$y'=(x^3+4)^{tg\,x}\cdot(\dfrac{\ln(x^3+4)}{\cos^2x}+\dfrac{3x^2tg\,x}{x^3+4})$.

Ответ: $y'=(x^3+4)^{tg\,x}\cdot(\dfrac{\ln(x^3+4)}{\cos^2x}+\dfrac{3x^2tg\,x}{x^3+4})$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases}x=\sqrt{t}\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t-1}}\end{cases}\qquad t=2.$$



Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:

$x_0 = x(2) = \sqrt{2}$, $y_0 = y(2) = 1$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $\quad y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{\sqrt{t}}{(t-1)\sqrt{t-1}}$.

Тогда

$y'_x(2) = -\sqrt{2}$. Далее,

$$y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = -\frac{[\frac{1}{2\sqrt{t}}(t-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(t-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}]\cdot 2\sqrt{t}}{2\cdot(t-1)^3} = \frac{\sqrt{t-1}(2t+1)}{(t-1)^3} = \frac{2t+1}{\sqrt{(t-1)^5}},$$

следовательно, $y''_{xx}(2) = 5$. Таким образом, уравнение касательной $y = 1 - \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$, уравнение нормали $y = 1 + (1/\sqrt{2})(x - \sqrt{2})$. Или $\sqrt{2}\,x + y - 3 = 0$ и $x - \sqrt{2}y = 0$.

Ответ: $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, 1)$, $y'_x(x_0) = -\sqrt{2}$, $y''_{xx}(x_0) = -1$, $\begin{cases} \sqrt{2}x + y - 3 = 0 & \textit{касательная} \\ x - \sqrt{2}y = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $y - \cos(x+y) = 0$, принимает в точке $x_0 = \pi/2$ значение $y_0 = 0$. Найти $y'_x, y''_{xx}, y'_x(x_0), y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $y' + (1 + y')\sin(x+y) = 0$. Из этого равенства находим: $y' = -\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = -1 + \dfrac{1}{1+\sin(x+y)}$. Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{(1+y')\cos(x+y)}{(1+\sin(x+y))^2}$. Вычислим производные в точке: $x_0 = \pi/2$: $y'(\pi/2) = -1/2$, $y''(\pi/2) = 0$.

Ответ: $y' = -\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = -1 + \dfrac{1}{1+\sin(x+y)}$, $\quad y'' = \dfrac{(1+y')\cos(x+y)}{(1+\sin(x+y))^2}$,

$y'(\dfrac{\pi}{2}) = -\dfrac{1}{2}$, $y''(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt[3]{4x-1}$, $x = 6{,}73$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0))$, $\Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 7$, $y(x_0) = y(7) = 3$, $y' = \dfrac{4}{3}(4x-1)^{-2/3}$, $y'(x_0) = y'(7) = \dfrac{4}{27}$, $\Delta x = -0{,}27$. Тогда $y(6{,}73) \approx 3 - 0{,}27\cdot 4/27 = 2{,}96$. **Ответ:** $y \approx 2{,}96$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^x$.

Неопределённость вида (∞^0). Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\cdot\ln(-\ln x)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to+0}[x\cdot\ln(-\ln x)]}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(-\ln x)}{x^{-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{[\ln(-\ln x)]'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x\ln x\cdot x^{-2}}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^x=e^0=1$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^x=1$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin 3x}-\frac{1}{3\sin x}\right)$.

Это неопределённость вида (∞-∞):

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin 3x}-\frac{1}{3\sin x}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{\sin 3x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(3\sin x-\sin 3x)'}{(\sin 3x\cdot\sin x)'}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{3\cos 3x\sin x+\sin 3x\cos x}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-9\sin 3x}{-9\sin 3x\sin x+6\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin 3x}-\frac{1}{3\sin x}\right)=0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=x^4+7x^3-12x,\ x_0=3$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x)=4x^3+21x^2-12,\ f''(x)=12x^2+42x,\ f'''(x)=24x+42$, $f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(3)=234,\ f'(3)=285,\ f''(3)=234,\ f'''(3)=114,\ f^{(4)}(3)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=234+285(x-3)+117(x-3)^2+19(x-3)^3+(x-3)^4$.

Ответ: $f(x)=234+285(x-3)+117(x-3)^2+19(x-3)^3+(x-3)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=e^{1/x},\ x_0=2$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(2)=\sqrt{e},\ f'(x)=-x^{-2}e^{1/x},\ f'(2)=-\sqrt{e}/4$,

$f''(x)=2x^{-3}e^{1/x}+x^{-4}e^{1/x}=x^{-4}e^{1/x}(2x+1),\ f''(2)=5\sqrt{e}/16$,

$f'''(x)=-4x^{-5}e^{1/x}(2x+1)-x^{-6}e^{1/x}(2x+1)+2x^{-4}e^{1/x},\ f'''(2)=-37\sqrt{e}/64$.

Ответ: $f(x)=\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{4}(x-2)+\frac{5\sqrt{e}}{32}(x-2)^2-\frac{37\sqrt{e}}{384}(x-2)^3+o((x-2)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=\cos(\sqrt{2}x)+e^{x^2},\ x_0=0$.

Найдём значение функции и её первых четырёх производных в заданной точке:

$f(0)=2,\ f'(x)=-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)+2xe^{x^2},\ f'(0)=0$,

$f''(x)=-2\cos(\sqrt{2}x)+2e^{x^2}+4x^2e^{x^2},\ f''(0)=0,\ f'''(x)=2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)+12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}$,

$f'''(0)=0,\ f^{(4)}(x)=4\cos(\sqrt{2}x)+12e^{x^2}+48x^2e^{x^2}+16x^4e^{x^2},\ f^{(4)}(0)=16$. По формуле Тейлора $f(x)=2x^4/3+o(x^4)$. **Ответ:** В окрестности точки (0, 2) функция ведёт себя как степенная функция четвёртой степени. Точка (0, 2) является точкой минимума функции.

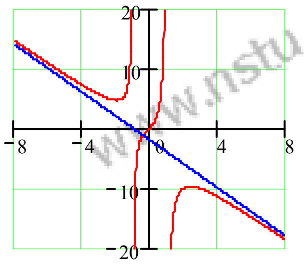
24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2-\ln(x-1)}{(x-2)^2}$.

По формуле Тейлора $\ln(x-1)=\ln(1+(x-2))=x-2-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+o((x-2)^2)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2-\ln(x-1)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2-(x-2-\frac{1}{2}(x-2)^2+o((x-2)^2)}{(x-2)^2}=$

$=-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{2}(x-2)^2+o((x-2)^2))}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{2}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2-\ln(x-1)}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{2}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{2x^3+2x^2+3x}{1-x^2}$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в точках разрыва функции:



$\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{2x^3+2x^2+3x}{1-x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{2x^3+2x^2+3x}{1-x^2}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2x^3+2x^2+3x}{1-x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{2x^3+2x^2+3x}{1-x^2}=-\infty$,

. Отсюда следует, что прямые $x=-1$ и $x=1$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+2x^2+3x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2+\dfrac{5x+2}{1-x^2})=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+2x^2+3x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x-2+\dfrac{5x+2}{1-x^2})=-\infty$

. Отсюда следует, что прямая $y=-2x-2$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

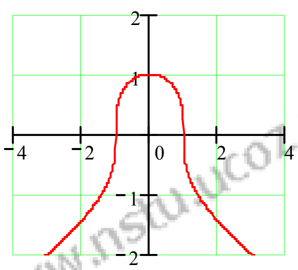
26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=\sqrt[3]{1-x^2}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty]$. 2. Функция чётная, периодичность отсутствует. 3. Функция непрерывна на всей числовой оси. Вертикальных асимптот нет.

4. Наклонных асимптот нет. 5. Первая производная $y'=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$. Производная обращается в нуль в точке $x=0$. При $x\in(-1,0)$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает, при $x\in(0,1)$ производная $y'<0$ - функция убывает. В точках $x=\pm1$ знак производной не меняется. Точка $x=0$ является точкой максимума функции, причём $y_{\max}=y(0)=1$.

6. $y''=\left(-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}\right)'=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}+2x^2\cdot\frac{2}{3}\sqrt[3]{(1-x^2)^{-1}}}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}=-\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{3-3x^2+4x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}=$

$=-\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{x^2+3}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. Вторая производная в нуль не обращается.



В точках $x=\pm1$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty,-1)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции, в интервале $(-1,1)$

производная $y'' < 0$ - интервал выпуклости, в интервале $(1, \infty)$ производная $y'' > 0$ - интервал вогнутости. Точки перегиба (-1, 0) и (1, 0). 7. Точки пересечения оси OX - (-1, 0) и (1, 0), точка пересечения оси OУ - (0, 1). **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке $(0, 1)$ - максимум. Точки перегиба - (-1, 0) и (1, 0).