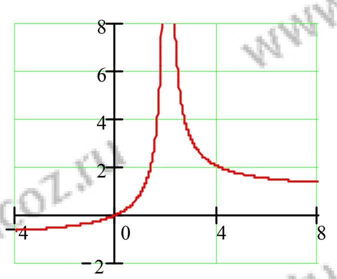
# Вариант № 12

**1.** Найти область определения функции : $y=\dfrac{1}{\lg(5-x)}+\sqrt{x+2}$ .

Область определения данной функции определяется следующими неравенствами: $x+2\ge 0$, т.е. $x\ge -2$, $5-x>0$, т.е. $x<5$. Далее, знаменатель не должен обращаться в нуль: $\lg(5-x)\ne 0$ или $5-x\ne 1$ или $x\ne 4$. Объединяя результаты, получим: $x\ge -2,\ x\ne 4,\ x<5$. **Ответ:** $x\in[-2,4)\cup(4,5)$.

**2.** Построить график функции: $y=\dfrac{x}{|2-x|}$.

Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x=2$. Если $x\to 2\pm 0$, то $y\to+\infty$. В точке $(0,0)$ график функции пересекает обе оси координат. Если $x\to\pm\infty$, то $y\to\pm 1$. Вычисляем значения функции в нескольких точках:

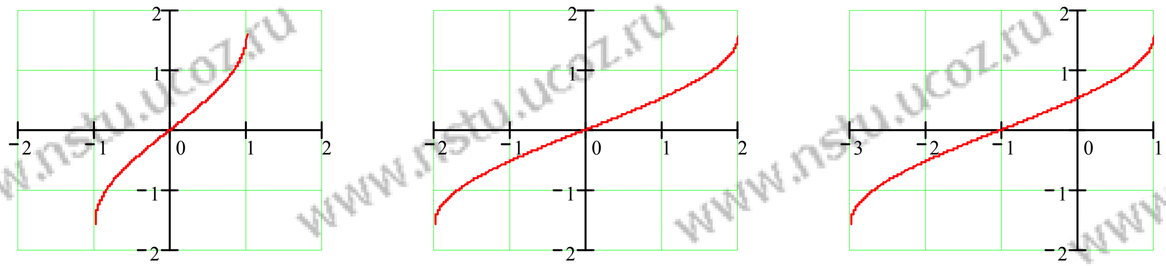


| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -4 | -2 | -1 | -0.5 | 0.5 | 1 | 1.5 |
| -2/3 | -1/2 | -1/3 | -1/5 | 1/3 | 1 | 3 |
| 1.8 | 2.2 | 2.5 | 3 | 4 | 8 | |
| 9 | 11 | 5 | 3 | 2 | 2/3 | |

По всем данным строим график. **Ответ:** График представлен на рисунке.

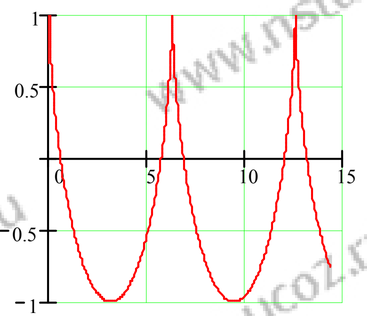
**3.** Построить график функции: $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

Область определения функции: $\left|\dfrac{x+1}{2}\right|\le 1$ или $x\in[-3,1]$. Преобразуем функцию: $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}=\arcsin(0{,}5(x+1))$. Строим сначала $\arcsin x$. Затем «растягиваем» график в два раза по оси OX и сдвигаем его по оси OX на одну единицы влево. Получим график данной функции. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.



**4.** Построить график функции: $y=\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$.

Функция периодическая с периодом 2π. Действительно, функция достигает максимумов в точках $t=2k\pi,\ k=\pm(0,1,2,...)$. При этом $x=2k\pi$, так как $\sin(2k\pi)=0$. Составим таблицу координат нескольких точек графика в первом периоде:



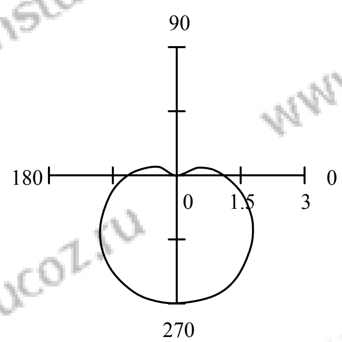
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| t | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 |
| x | 0 | 0.024 | 0.078 | 0.181 | 0.571 |
| y | 1 | 0.866 | 0.707 | 0.5 | 0 |
| t | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π | 7π/6 |
| x | 1.228 | 1.649 | 2.118 | 3.142 | 4.165 |
| y | -0.5 | -0.707 | -0.866 | -1 | -0.866 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 5π/4 | 4π/3 | 3π/2 | 5π/3 | 7π/4 |
| $x$ | 4.634 | 5.055 | 5.712 | 6.102 | 6.205 |
| $y$ | -0.707 | -0.5 | 0 | 00.5 | 0.707 |

График периодичен. Поэтому нет необходимости вычислять координаты точек в других периодах. По точкам строим график и отражаем его симметрично в другие периоды.
**Ответ:** График представлен на рисунке.

**5.** Построить график функции: $\rho = 1 - 2\sin\varphi$.

Поскольку $\rho \geq 0$, то функция существует для тех значений $\varphi$, для которых $\sin\varphi \leq 0.5$. Это наблюдается при $-7\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6$. В этом интервале функция возрастает от 0 до 3 (при $\varphi = -\pi/2$), затем убывает от 3 до 0. Вертикальная ось пересекается графиком в точках (-π/2, 3) и (3π/2, 0.5). Можно перейти к декартовым координатам. Тогда получим уравнение $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}) - 2y$. **Ответ:** график представлен на рисунке.




**6.** Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+3)^3}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+3)^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3 + 9n^2 + 15n + 9}{2n^3 + 21n^2 + 75n + 91} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 + 9n^{-1} + 15n^{-2} + 9n^{-3}}{2 + 21n^{-1} + 75n^{-2} + 91n^{-3}} = 1.$$

**Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+3)^3} = 1$.

**7.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3 - 40}{12 + 4x - 3x^2 - x^3}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3 - 40}{12 + 4x - 3x^2 - x^3} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5(x-2)(x^2+2x+4)}{-(x-2)(x^2+5x+6)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5(x^2+2x+4)}{-(x^2+5x+6)} = -3$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3 - 40}{12 + 4x - 3x^2 - x^3} = -3$.

**8.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Вычислим предел, используя замену переменной:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}[1 - \sqrt{(1-x)/(1+x)}]}{\sqrt[3]{1+x}[1 - \sqrt[3]{(1-x)/(1+x)}]} = \left|\begin{array}{l}(1-x)/(1+x) = t^6, \\ \textit{если}\ \ x \to 0, \textit{то}\ \ t \to 1\end{array}\right| = \lim_{t\to 1}\frac{1 - t^3}{1 - t^2} =$$

$= \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1 + t + t^2}{1 + t} = \dfrac{3}{2}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \dfrac{3}{2}$.

**9.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся заменой переменной и первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x^2 - \pi^2}{\sin x} = \lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)(x+\pi)}{\sin x} = \left|\begin{array}{l}x - \pi = t,\ x = t + \pi,\ \sin(t+\pi) = -\sin t, \\ \textit{если}\ \ x \to \pi, \textit{то}\ \ t \to 0\end{array}\right| = -2\pi\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = -2\pi$$

.

**Ответ:** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}=-2\pi$ .

**10.** Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^n$ (неопределённость вида ($1^\infty$)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n^2+5n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n^2+5n+3}\right)^{\frac{2n^2+5n+3}{4}\cdot\frac{4n}{2n^2+5n+3}}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n^2+5n+3}\right)^{\frac{2n^2+5n+3}{4}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n^2+5n+3}}=\left|t=\frac{2n^2+5n+3}{4}\right|=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n^2+5n+3}}=e^0=1$$

,

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{2n^2+5n+3}=0$. **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^n=1$.

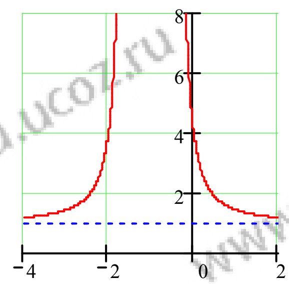
**11.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\cdot\ln 2$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся эквивалентными величинами: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\cdot\ln 2=$

$=\left|\arcsin t\sim t\ \text{ и }\ a^t-1\sim t\cdot\ln a\right|=\ln 2\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{-3x\cdot\ln 2}=-\dfrac{2}{3}$|. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\cdot\ln 2=-\dfrac{2}{3}$.

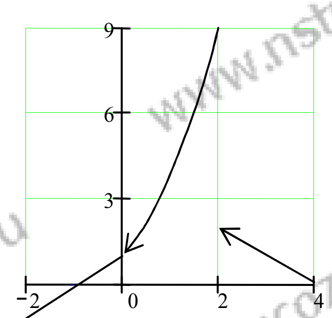
**12.** Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=4^{\frac{1}{(1+x)^2}}$ .

Область определения – все действительные числа, кроме $x=-1$. В точке $x=-1$ функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim\limits_{x\to-1-0}4^{\frac{1}{(1+x)^2}}=\lim\limits_{x\to-1+0}4^{\frac{1}{(1+x)^2}}=4^\infty=\infty$. Таким образом, в точке $x=-1$ имеют место разрыв второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}4^{\frac{1}{(1+x)^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}4^{\frac{1}{(1+x)^2}}=4^0=1$. **Ответ:** В точке $x=-1$ функция имеет разрыв второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.




**13.** Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ (x+1)^2, & 0<x\le 2,\\ -x+4, & x>2.\end{cases}$$




Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут

быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:
$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x+1)=1,\quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x+1)^2=1,$
$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x+1)^2=9,\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(-x+4)=2$. Таким образом, в точке $x$=0 функция непрерывна, а в точке $x$=2 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке $x$=2 равна -7. **Ответ:** В точке $x$=2 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

**14.** Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$$f(x)=\frac{\ln(1+2x^2+x^3)}{x},\ x\neq 0,\ f(0)=0.$$

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим $\Delta x$ на $x$-$x_0$:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0=0,\ f(x_0)=0$, поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2+x^3)}{x\cdot x}$. Но $\ln(1+t)\sim t$, при $t\to 0$. Поэтому

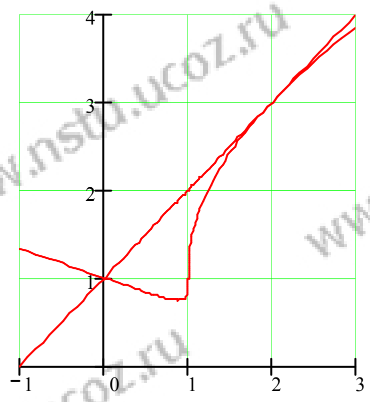
$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(2+x)=2$. **Ответ:** $f'(0)=2$.

**15.** Найти производную показательно-степенной функции: $y=x^{(9+e^x)}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y=(9+e^x)\ln x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y}=e^x\cdot\ln x+\dfrac{xe^x\cdot\ln x+9+e^x}{x}=\dfrac{e^x(x\ln x+1)+9}{x}$. Подставляем сюда $y$:

$y'=x^{(9+e^x)}\cdot\dfrac{e^x(x\ln x+1)+9}{x}=[e^x(x\ln x+1)+9]\cdot x^{e^x}\cdot x^8$. **Ответ:**
$y'=[e^x(x\ln x+1)+9]\cdot x^{e^x}\cdot x^8$.

**16.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить $y''_{xx}$:

$$\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=t^2+t+1 \end{cases}\qquad t=1.$$




Уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ имеют вид $y=y_0+y'_x(x_0)\cdot(x-x_0)$ и $y=y_0-(1/y'_x(x_0))\cdot(x-x_0)$, где $x_0$ и $y_0$ - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:
$x_0=x(1)=2,\ y_0=y(1)=3$. Найдём производные $y'_x$ и $y''_{xx}$: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2t+1}{3t^2}$.

Тогда $y'_x(1)=1$. Далее, $y''_x=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{2\cdot 3t^2-6t\cdot(2t+1)}{3t^2\cdot 9t^4}=\dfrac{-6t^2-6t}{3t^2\cdot 9t^4}=-\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{t+1}{t^5}$, следовательно, $y''_x(1)=-4/9$. Таким образом, уравнение касательной $y=3+(x-2)$, уравнение нормали $y=3-(x-2)$. Или $x-y+1=0$ и $x+y-5=0$.

**Ответ:** $(x_0,y_0)=(2,3),\ y'_x(x_0)=1,\ y''_x(x_0)=-4/9,\ \begin{cases} x-y+1=0 & \textit{касательная} \\ x+y-5=0 & \textit{нормаль} \end{cases}.$

**17.** Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $\sin x\cos y + 2^{\sin x\cos y} = 1$, принимает в точке $x_0 = \pi/2$ значение $y_0 = \pi/2$. Найти $y'_x, y''_{xx}, y'_x(x_0), y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по $x$, предполагая, что $y = y(x)$: $\cos x\cos y - y'\sin x\sin y + 2^{\sin x\cos y}(\cos x\cos y - y'\sin x\sin y)\ln 2 = 0$. Или $2^{\sin x\cos y}(\cos x\cos y - y'\sin x\sin y)(1 + 2^{\sin x\cos y}\ln 2) = 0$. Из этого равенства находим: $y' = \dfrac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y} = ctg\, x\cdot ctg\, y$. Находим вторую производную: $y'' = -(\dfrac{ctg\, y}{\sin^2 x} + \dfrac{y' ctg\, x}{\sin^2 y})$. Вычислим производные в точке: $x_0 = \pi/2$ $\quad y'(\pi/2) = 0,\ y''(\pi/2) = 0$. **Ответ:** $y' = ctg\, x\cdot ctg\, y$, $y'' = -(\dfrac{ctg\, y}{\sin^2 x} + \dfrac{y' ctg\, x}{\sin^2 y})$, $y'(\pi/2) = 0,\ y''(\pi/2) = 0$.

**18.** Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt[3]{x},\ x = 8{,}24$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0)),\ \Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 8,\ y(x_0) = y(8) = 2,\ y' = x^{-2/3}/3,\ y'(x_0) = y'(8) = 1/12,\ \Delta x = 0{,}24$. Тогда $y(8{,}24) \approx 2 + 0{,}24/12 = 2{,}02$. **Ответ:** $y \approx 2{,}02$

**19.** Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$.

Это неопределённость вида ($0^0$). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\cdot\ln(1-\cos x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}[x\cdot\ln(1-\cos x)]}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{x^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1-\cos x))'}{\left(x^{-1}\right)'} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^{-2}(1-\cos x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^{-2}2\sin^2(x/2)} =$$

$= -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^{-2}(x/2)^2} = -4\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x = e^0 = 1$.

**Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x = 1$.

**20.** Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to +0}(\sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x)$.

Это неопределённость вида ($0\cdot\infty$): $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln^2 x}{x^{-1/3}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(x^{-1/3}\right)'} = -\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{2\ln x\cdot 3}{x\cdot x^{-1/3}} =$

$= 6\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{x^{-4/3}} = 6\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{x\cdot 4x^{-7/3}} = \dfrac{9}{2}\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[3]{x^4} = 0$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to +0}(\sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x) = 0$.

**21.** Многочлен по степеням $x$ представить в виде многочлена по степеням $(x - x_0)$: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x,\ x_0 = 3$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 1,\ f''(x) = 12x^2 - 18x,\ f'''(x) = 24x - 18$, $f^{(4)}(x) = 24$. Тогда $f(3) = 3,\ f'(3) = 28,\ f''(3) = 54,\ f'''(3) = 54,\ f^{(4)}(3) = 24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x) = 3 + 28(x-3) + 27(x-3)^2 + 9(x-3)^3 + (x-3)^4$.

**Ответ:** $f(x) = 3 + 28(x-3) + 27(x-3)^2 + 9(x-3)^3 + (x-3)^4$.

**22.** Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки $x_0$ с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=(x^3-1)^{-1}$, $x_0=-1$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(-1)=-1/2$, $f'(x)=-3x^2(x^3-1)^{-2}$, $f'(-1)=-3/4$,

$f''(x)=-6x(x^3-1)^{-2}+18x^4(x^3-1)^{-3}$, $f''(-1)=-3/4$

$f'''(x)=-6(x^3-1)^{-2}+36x^3(x^3-1)^{-3}+72x^3(x^3-1)^{-3}-162x^6(x^3-1)^{-4}$, $f'''(-1)=15/8$.

**Ответ:** $f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}(x+1)-\frac{3}{8}(x+1)^2+\frac{5}{16}(x+1)^3+o((x+1)^3)$

**23.** Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=2x+x^2-(x+1)\ln(x+2)$, $x_0=-1$.

Найдём значение функции и её первых трёх производных в заданной точке: $f(-1)=-1$, $f'(x)=2+2x-\ln(x+2)-(x+1)(x+2)^{-1}$, $f'(-1)=0$, $f''(x)=2-2(x+2)^{-1}+$ $+(x+1)(x+2)^{-2}$, $f''(-1)=0$, $f'''(x)=3(x+2)^{-2}-2(x+1)(x+2)^3$, $f'''(-1)=3$. По формуле Тейлора $f(x)=-1+(x+1)^3/2+o((x+1)^3)$. **Ответ:** В окрестности точки (-1, -1) функция ведёт себя как кубическая функция. Точка (-1, -1) является точкой перегиба: слева - выпуклость, справа - вогнутость.

**24.** Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2xe^{-(x+1)}-x^3-x}{(x+1)^3}$.

По формуле Тейлора $e^{-(x+1)}=1-(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{6}(x+1)^3+o((x+1)^3)$. Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2xe^{-(x+1)}-x^3-x}{(x+1)^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x[1-(x+1)+(x+1)^2/2-(x+1)^3/6+o((x+1)^3)]-x^3-x}{(x+1)^3}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2x-2x^2-2x+x^3+2x^2+x-x(x+1)^3/3+o((x+1)^3)-x^3-x}{(x+1)^3}=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)^3/3+o((x+1)^3)}{(x+1)^3}=$$

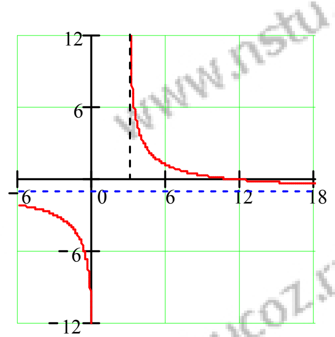
$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x}{3}=-\frac{1}{3}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2xe^{-(x+1)}-x^3-x}{(x+1)^3}=\frac{1}{3}$.

**25.** Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=3\ln\frac{x}{x-3}-1$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения: $\lim\limits_{x\to0-0}(3\ln\frac{x}{x-3}-1)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to3+0}(3\ln\frac{x}{x-3}-1)=\infty$. Отсюда следует, что прямые $x=0$ и $x=3$ являются односторонними вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

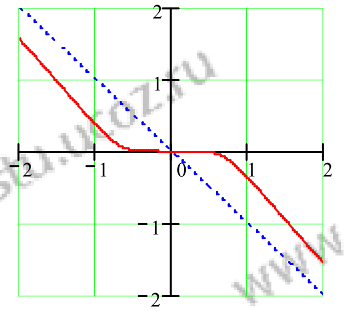
$\lim\limits_{x\to-\infty}(3\ln\frac{x}{x-3}-1)=3\ln1-1=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\ln\frac{x}{x-3}-1)=-1$.

Следовательно, прямая $y=-1$ является горизонтальной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.




**26.** Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=-x\cdot e^{-x^{-2}}$.

1. Область определения: $x \in (-\infty, \infty)$. 2. Функция нечётная, периодичность отсутствует. 3. Функция непрерывна в области определения. Вертикальных асимптот нет. 4. $-\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot e^{-x^{-2}})=\infty,\ \ -\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot e^{-x^{-2}})=-\infty$. Найдём наклонные асимптоты: $y=kx+b$,




$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot e^{-x^{-2}}}{x}=-e^{0}=-1,\ \ b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}(-x\cdot e^{-x^{-2}}+x)=-\lim_{x\to\pm\infty}[x\cdot(e^{-x^{-2}}-1)]=$$

$$=\left|e^{-x^{-2}}-1\sim -x^{-2},\ \textit{так как}\ -x^{-2}\to 0\right|=\lim_{x\to\pm\infty}[x\cdot x^{-2}]=$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{-1}=0$. Следовательно, прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой. 5. Первая производная

$y'=[-x\cdot e^{-x^{-2}}]'=-e^{-x^{-2}}-2x^{-2}e^{-x^{-2}}=-e^{-x^{-2}}(1-2x^{-2})=-e^{-\frac{1}{x^2}}(1+\frac{2}{x^2})$. Производная обращается в нуль в точке $x=0$. Производная остаётся отрицательной на всей числовой оси. Следовательно, функция монотонно убывает и экстремумов не имеет.

6. $y''=\left(-e^{-\frac{1}{x^2}}(1+\frac{2}{x^2})\right)'=-2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot(1+\frac{2}{x^2})+4x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}(1-\frac{2}{x^2})=2e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2-2}{x^5}$.

Вторая производная обращается в нуль в точках $x=-\sqrt{2}$ и $x=\sqrt{2}$. В точке $x=0$ вторая производная не существует. Имеем четыре интервала: в интервале $(-\infty,-\sqrt{2})$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости, в интервале $(-\sqrt{2},0)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции, в интервале $(0,\sqrt{2})$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости, в интервале $(\sqrt{2},\infty)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции. Точки перегиба - $x=-\sqrt{2},\ x=0,\ x=\sqrt{2}$. 7. График функции пересекает оси координат в точке $(0,0)$. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремумов нет. Точки перегиба - $(-\sqrt{2},\sqrt{2/e}),\ (0,0),\ (\sqrt{2},-\sqrt{2/e})$.