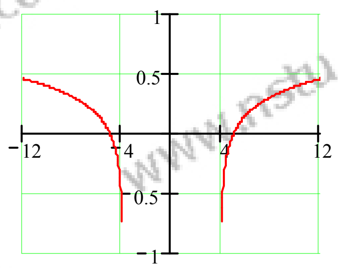
Вариант № 14

1. Найти область определения функции : $y = \lg\dfrac{x-3}{x^2-5x+4}$.

Область определения данной функции определяется неравенством $\dfrac{x-3}{x^2-5x+4} > 0$. Найдём корни знаменателя: $x_1 = 1, x_2 = 4$. Так как ветви параболы $y = x^2 - 5x + 4$ направлены вверх, то $x^2 - 5x + 6 < 0$ при $1 < x < 4$. Дробь будет положительной, если одновременно $x - 3 < 0$, т.е. $x < 3$. Отсюда находим первый интервал: $x \in (1,3)$. Далее, $x^2 - 5x + 6 > 0$ при $x < 1$ или $x > 4$. Дробь будет положительной, если одновременно $x - 3 > 0$, т.е. $x > 3$. Отсюда находим второй интервал: $x \in (4,\infty)$. Точки, в которых знаменатель обращается в нуль, исключаем. **Ответ:** $x \in (1,3) \cup (4,\infty)$.

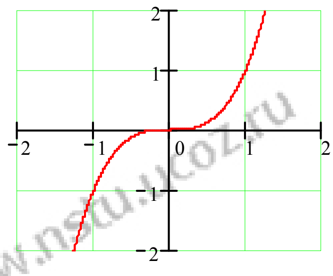
2. Построить график функции: $y = \lg\sqrt{|x| - 4}$.

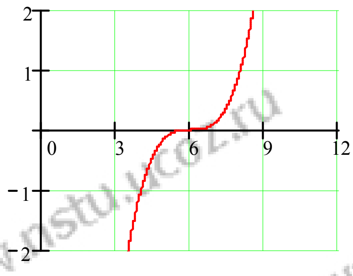


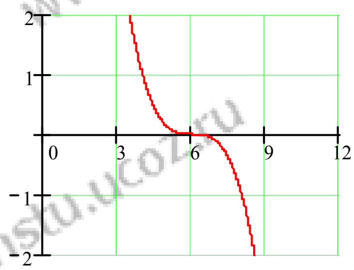
Функция определена в интервале на множестве $x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$. Функция обращается в нуль в точках (-5, 0) и (5, 0). Преобразуем функцию при *x*>4: $y = \lg\sqrt{|x| - 4} = \dfrac{1}{2}\lg(x-4)$. Сначала строим график функции $y = \lg x$, затем сдвигаем его по оси OX на 4 единицы, затем отображаем полученную ветвь графика в левую полуплоскость симметрично по отношению к оси OY. **Ответ:** График представлен на рисунке.

3. Построить график функции: $y = (3 - 0{,}5x)^3$.

Функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: $y = (3 - 0{,}5x)^3 = -(0{,}5(x-6))^3$. Строим сначала x^3. Затем «растягиваем» график в два раза по оси OX и сдвигаем его по оси OX на 6 единиц вправо.

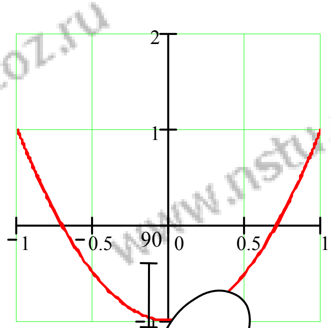






Получим график функции $y = (0{,}5(x-6))^3$. Затем отображаем график зеркально по отношению к оси OX. Получим график данной функции. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.

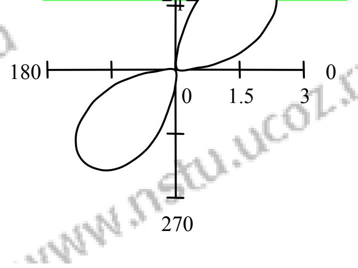
4. Построить график функции: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t \end{cases}$.



Исключим параметр *t*: $y = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 2x^2 - 1$. Получили уравнение параболы $y = 2x^2 - 1$ с вершиной в точке (0, -1), ветви которой направлены вверх. Область определения функции - (-1, 1), так как всегда $|\cos t| \le 1$. Графиком функции является часть параболы.

Ответ: График представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho = 3\sin 2\varphi$.



Функция существует при $\rho \geq 0$ т.е. $\sin 2\varphi \geq 0$. Это наблюдается при $0 \leq 2\varphi \leq \pi$, т.е. $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ и при $2\pi \leq 2\varphi \leq 3\pi$ т.е. $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$. Функция возрастает в интервале (0, π/4) от 0 до 1, затем убывает в интервале (π/4, π/2) от 1 до 0. Аналогично изменяется функция в интервале $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$. **Ответ:** График представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+8n}{2n^3+6n}=4\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n}{n^3+3n}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^{-2}}{1+3n^{-2}}=4.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}=4$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1-x^3)}{x^3-2x^2-x+2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1-x^3)}{x^3-2x^2-x+2}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1-x)(1+x+x^2)}{(x-1)(x-2)(x+1)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1+x+x^2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{6}{2}=3$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1-x^3)}{x^3-2x^2-x+2}=3$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое к числителю выражение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\frac{1}{4}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos(x/2)}{x-\pi}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной: $x-\pi=t,\ x=t+\pi,\ \textit{если}\, x\to\pi,\ \textit{то}\ t\to 0$. Получим:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x/2)}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t/2+\pi/2)}{t}=\left|\cos(t/2+\pi/2)=-\sin(t/2\right|=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t/2)}{t/2}=-\frac{1}{2}.$$

Здесь воспользовались первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos(x/2)}{x-\pi}=-\frac{1}{2}$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n-1+4}\right)^{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{5n^2+3n-1}\right)^{-n^3}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{5n^2+3n-1}\right)^{\frac{5n^2+3n-1}{4}\cdot\left(-\frac{4n^3}{5n^2+3n-1}\right)} = \left|t=\frac{5n^2+3n-1}{4}\right| = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4n^3}{5n^2+3n-1}} = e^{-\infty} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3} = 0$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin(5x/2)\cos x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся эквивалентными величинами:

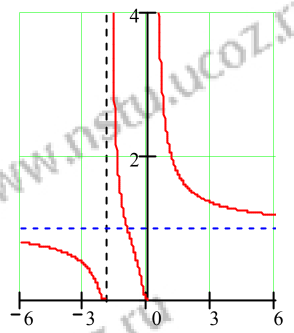
$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin(5x/2)\cos x} = -\sqrt{2}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(2x/\pi)}{\cos x} = \left|\begin{matrix} x-\pi/2=t,\ 2x=2t+\pi, \\ если\ x\to\pi/2,\ то\ t\to 0\end{matrix}\right| = -\sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(2t/\pi+1)}{\cos(t+\pi/2)} =$$

$$= \sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(2t/\pi+1)}{\sin t} = \left|\sin t\sim t \text{ и } \ln(2t/\pi+1)\sim 2t/\pi\right| = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ |.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin(5x/2)\cos x} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = 3^{\frac{x+1}{x(x+2)}}$.

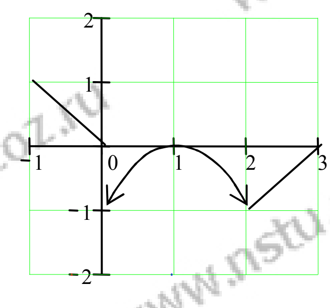
Область определения – все действительные числа, кроме x=0 и x=−2. В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точек разрыва: $\lim\limits_{x\to -2-0} 3^{\frac{x+1}{x(x+2)}} = 0$, $\lim\limits_{x\to -2+0} 3^{\frac{x+1}{x(x+2)}} = \infty$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to 0-0} 3^{\frac{x+1}{x(x+2)}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} 3^{\frac{x+1}{x(x+2)}} = \infty$. Таким образом, в точках x=0 и x=−2 имеют место разрывы второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\frac{x+1}{x(x+2)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\frac{x+1}{x(x+2)}} = 3^0 = 1$.



Ответ: В точках x=0 и x=−2 имеют место разрывы второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y = \begin{cases} -x, & x\le 0, \\ -(x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$$



Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}(-x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = -\lim_{x\to 0+0}(x-1)^2 = -1,$$

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -\lim\limits_{x\to 2-0}(x-1)^2 = -1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(x-3) = -1$. Таким образом, в точке x=2 функция непрерывна, а в точке x=0 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=0 равна −1. **Ответ:** В точке x=0 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = 6x + x\sin(1/x),\ x \neq 0,\ f(0) = 0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x + x\sin(1/x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}[6 + \sin(1/x)]$, следовательно, производная не существует.

Ответ: $f'(0)$ не существует.

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = (\arcsin x)^{e^x}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = e^x \ln\arcsin x$. Берём производную, как производную неявной функции:

$\dfrac{y'}{y} = e^x \ln\arcsin x + \dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x} = e^x(\ln\arcsin x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x})$. Подставляем сюда y:

$y' = e^x(\ln\arcsin x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x})\cdot(\arcsin x)^{e^x}$.

Ответ: $y' = e^x(\ln\arcsin x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x})\cdot(\arcsin x)^{e^x}$.

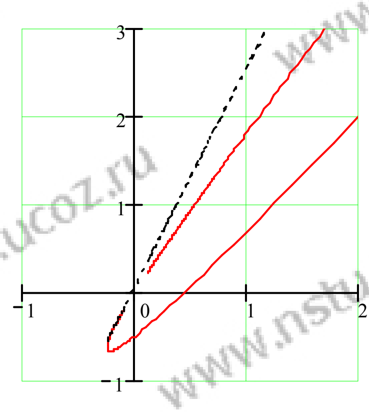
16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = (1+t)/t^2 \\ y = 3/(2t^2) + 2/t \end{cases} \quad t = -4.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:

$x_0 = x(-4) = -3/16$, $y_0 = y(-4) = -13/32$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} =$

$= (\dfrac{-3\cdot 2}{2t^3} - \dfrac{2}{t^2})\cdot\dfrac{t^4}{t^2 - 2t(1+t)} = \dfrac{3+2t}{2+t}$. Тогда



$y'_x(-4) = 5/2$. Далее, $y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} =$

$= \dfrac{2(2+t) - (3+2t)}{(2+t)^2}\cdot\dfrac{t^3}{(2+t)} = -\dfrac{t^3}{(2+t)^3}$, следовательно, $y''_x(-4) = -8$. Таким образом, уравнение касательной $y = -13/32 + (5/2)(x + 3/16)$, уравнение нормали $y = -13/32 - (2/5)(x + 3/16)$. Или $40x - 16y + 1 = 0$ и $64x + 160y + 77 = 0$.

Ответ: $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{-3}{16}, \dfrac{-13}{32}\right)$, $y'_x(x_0) = \dfrac{5}{2}$, $y''_x(x_0) = -8$, $\begin{cases} 40x - 16y + 1 = 0 & \textit{касательная} \\ 64x + 160y + 77 = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $xy+\ln(x+y)+2=0$, принимает в точке $x_0=2$ значение $y_0=-1$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y=y(x)$: $y+xy'+\dfrac{1+y'}{x+y}=0$. Из этого равенства находим: $y'=-\dfrac{xy+y^2+1}{xy+x^2+1}$. Находим вторую производную: $y''=-\dfrac{(y+xy'+2yy')(xy+x^2+1)-(y+xy'+2x)(xy+y^2+1)}{(xy+x^2+1)^2}$. Вычислим производные в точке: $x_0=2\ \ y'(2)=0,\ \ y''(2)=\dfrac{1}{3}$. **Ответ:** $y'=-\dfrac{xy+y^2+1}{xy+x^2+1}$,

$y''=-\dfrac{(y+xy'+2yy')(xy+x^2+1)-(y+xy'+2x)(xy+y^2+1)}{(xy+x^2+1)^2}$, $y'(2)=0,\ \ y''(2)=\dfrac{1}{3}$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y=\sqrt[4]{x},\ \ x=81{,}8$.

По определению дифференциала $y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+dy(x_0)+o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x)=y(x_0)+dy(x_0)+o((x-x_0)),\ \ \Delta x=dx=x-x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$. В данном случае $x_0=81,\ \ y(x_0)=y(81)=3,\ \ y'=x^{-3/4}/4,\ \ y'(x_0)=y'(81)=1/108,\ \ \Delta x=0{,}8$. Тогда $y(81{,}8)\approx 3+0{,}8/108\approx 3{,}007$. **Ответ:** $y\approx 3{,}007$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+0}\left(ctg\,x\right)^{1/\ln x}$.

Это неопределённость вида (∞^0). Преобразуем предел:
$\lim\limits_{x\to+0}\left(ctg\,x\right)^{1/\ln x}=\lim\limits_{x\to+0}e^{(1/\ln x)\cdot\ln(ctg\,x)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}[(1/\ln x)\cdot\ln(ctg\,x)]}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(ctg\,x)}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln(ctg\,x))'}{(\ln x)'}=-\lim_{x\to+0}\frac{x}{ctg\,x\cdot\sin^2 x}=-\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x\cdot\cos x}=-1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}\left(ctg\,x\right)^{1/\ln x}=e^{-1}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+0}\left(ctg\,x\right)^{1/\ln x}=e^{-1}$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+0}xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Это неопределённость вида ($0\cdot\infty$): $\lim\limits_{x\to+0}xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\left|\begin{matrix}1/\sqrt{x}=t,\ x=1/t^2,\\ \text{если } x\to+0,\ \text{то } t\to\infty\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{(e^t)'}{(t^2)'}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{2}=\infty.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+0}xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\infty$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=4x^4+2x^3-x-3,\ \ x_0=1$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x)=16x^3+6x^2-1,\ f''(x)=48x^2+12x,\ \ f'''(x)=96x+12$, $f^{(4)}(x)=96$. Тогда $f(1)=2,\ \ f'(1)=21,\ f''(1)=60,\ \ f'''(1)=108,\ \ f^{(4)}(1)=96$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=2+21(x-1)+30(x-1)^2+18(x-1)^3+4(x-1)^4$.

Ответ: $f(x)=2+21(x-1)+30(x-1)^2+18(x-1)^3+4(x-1)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=\ln\cos x,\ x_0=\pi/3$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(\pi/3)=-\ln 2,\ f'(x)=-tgx,\ f'(\pi/3)=-\sqrt{3}$,

$f''(x)=-\cos^{-2}x,\ f''(\pi/3)=-4,\ f'''(x)=-2\cos^{-3}x\cdot\sin x,\ f'''(\pi/3)=-8\sqrt{3}$.

Ответ: $f(x)=-\ln 2-\sqrt{3}(x-\pi/3)-2(x-\pi/3)^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(x-\pi/3)^3+o((x-\pi/3)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=\ln^2(1+x)-x^2,\ x_0=0$.

Найдём значение функции и её первых трёх производных в заданной точке:

$f(0)=0,\ f'(x)=2\ln(1+x)\cdot(1+x)^{-1}-2x,\ f'(0)=0,\ f''(x)=2(1+x)^{-2}-2\ln(1+x)\cdot(1+x)^{-2}-2$

$f''(0)=0,\ f'''(x)=-6(1+x)^{-3}+4\ln(1+x)(1+x)^{-3},\ f'''(-1)=-6$. По формуле Тейлора $f(x)=-x^3+o(x^3)$. **Ответ:** В окрестности точки (0, 0) функция ведёт себя как кубическая функция. Точка (0, 0) является точкой перегиба: слева – вогнутость, справа - выпуклость.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-xe^x}{x^2}$.

По формуле Тейлора $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$. Далее, $e^x=1+x+o(x)$. Подставим это в предел:

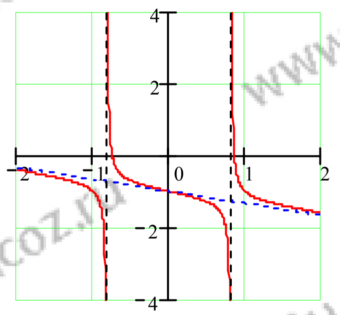
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-xe^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2/2+o(x^2)-x(1+x+o(x))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2/2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-xe^x}{x^2}=-\dfrac{3}{2}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$.

Область определения функции:

$x\in(-\infty,-\sqrt{2/3})\cup(-\sqrt{2/3},\sqrt{2/3})\cup(\sqrt{2/3},\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения:



$$\lim_{x\to-\sqrt{2/3}-0}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to-\sqrt{2/3}+0}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2/3}-0}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{2/3}+0}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}=\infty$$

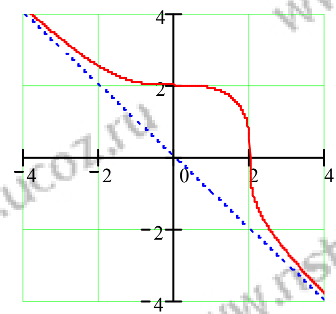
. Отсюда следует, что прямые $x=-\sqrt{2/3}$ и $x=\sqrt{2/3}$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}=\lim_{x\to-\infty}[-\frac{1}{3}x-1-\frac{4x}{3(2-3x^2)}]=\infty,$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}[-\frac{1}{3}x-1-\frac{4x}{3(2-3x^2)}]=-\infty$. Следовательно, прямая $y=-\frac{1}{3}x-1$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=\sqrt[3]{8-x^3}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют. 3. Функция непрерывна в области определения. Вертикальных асимптот нет. 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{8-x^3}=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{8-x^3}=-\infty$. Найдём наклонные асимптоты: $y=kx+b$,



$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{8-x^3}{x^3}}=-1$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{8-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{8-x^3}{x^3}}=-1$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\sqrt[3]{8-x^3}+x]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{[\sqrt[3]{8-x^3}+x](\sqrt[3]{(8-x^3)^2}-x\sqrt[3]{8-x^3}+x^2)}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}-x\sqrt[3]{8-x^3}+x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{8-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}-x\sqrt[3]{8-x^3}+x^2}=0$. Следовательно,

имеется наклонная асимптота $y=-x$. 5. Первая производная

$y'=[\sqrt[3]{8-x^3}]'=-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}$. Производная обращается в нуль в точке $x=0$. В точке $x=2$ производная не существует. Производная остаётся отрицательной на всей числовой оси. Следовательно, функция монотонно убывает и экстремумов не имеет.

6.

$$y''=\left(-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}\right)'=-\frac{2x\cdot\sqrt[3]{(8-x^3)^2}+2x^2\cdot\sqrt[3]{(8-x^3)^{-1}}\cdot 3x^2/3}{\sqrt[3]{(8-x^3)^4}}=-\frac{16x}{\sqrt[3]{(8-x^3)^5}}=\frac{16x}{\sqrt[3]{(x^3-8)^5}}.$$

Вторая производная обращается в нуль в точке $x=0$. В точке $x=2$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty,0)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции, в интервале $(0,2)$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости, в интервале $(2,\infty)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции. Точки перегиба - $x=0,\ x=2$. 7. График функции пересекает ось ОХ в точке $(2,0)$, а ось ОУ – в точке $(0,2)$. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремумов нет. Точки перегиба - $(0,2)$, $(2,0)$.