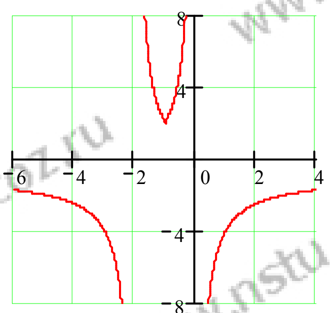
Вариант № 17

1. Найти область определения функции : $y=\sqrt{x}+(x-2)^{-1/3}-\lg(2x-3)$.

Область определения данной функции определяется следующими условиями: $x \ge 0$, $2x-3>0$, т.е. $x>3/2$. Далее, знаменатель не должен обращаться в нуль: $x-2 \ne 0$ или $x \ne 2$. Объединяя результаты, получим: $x \ge 0,\ x \ne 2,\ x>3/2$. **Ответ:** $x \in (\frac{3}{2},2)\cup(2,\infty)$.

2. Построить график функции: $y=\dfrac{|x+1|+2}{1-|x+1|}$.

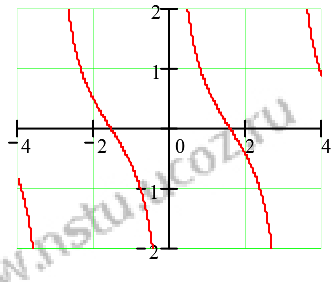


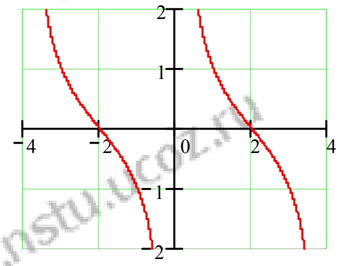
Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точек $x=0$ и $x=-2$. Преобразуем функцию: $y=-\dfrac{x+3}{x}$ если $x+1 \ge 0$ и $y=\dfrac{-x+1}{x+2}$ если $x+1<0$. Или $y=-\dfrac{|x+1|-1+3}{|x+1|-1}=-1-\dfrac{3}{|x+1|-1}$. График функции симметричен относительно прямой $x=-1$, прямая $y=-1$ является горизонтальной асимптотой. Достаточно построить график (по точкам) для $x \ge -1$, затем отобразить полученную часть графика зеркально относительно прямой $x=-1$.

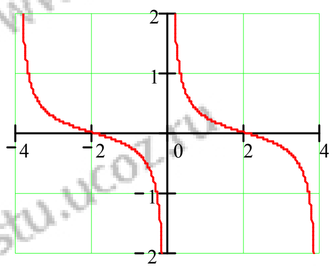
Ответ: График представлен на рисунке.

3. Построить график функции: $y=\dfrac{1}{4}ctg\dfrac{\pi x}{4}$.

Область определения функции – вся числовая ось: $x \in (-\infty,\infty)$. Функция периодическая с периодом 4 (относительно переменной *x*). Строим сначала $ctg\,x$. Затем «растянем» график в 4/π раза по оси OX, затем «сжимаем» его по оси OY в четыре раза.

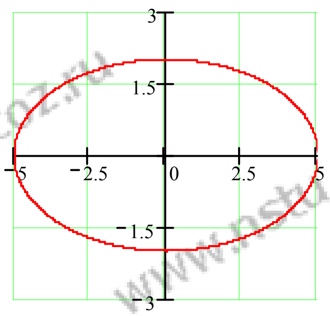






Получим график данной функции. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.

4. Построить график функции: $y=\begin{cases}x=5\sin 2t\\ y=2\cos 2t\end{cases}$.

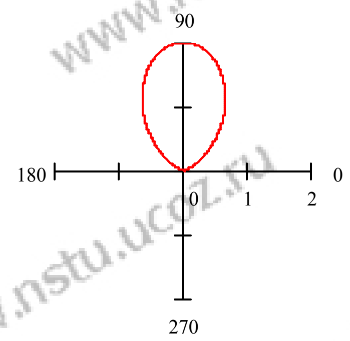


Исключим параметр *t*: $y=2\cos 2t=\pm 2\sqrt{1-\sin^2 2t}$. Или $y=\pm 2\sqrt{1-x^2/25}$. Возведём обе части в квадрат $y^2=4(1-x^2/25)$. Преобразуя, получим уравнение эллипса с центром в начале координат, с малой полуосью 2 и с большой полуосью 5: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Ответ: График представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho = a\sin^3\varphi$.

Поскольку $\rho \ge 0$, то функция существует для тех значений φ, для которых $\sin\varphi \ge 0$ и $a > 0$ или $\sin\varphi < 0$ и $a < 0$. Рассмотрим первый вариант: $\sin\varphi \ge 0$ если $0 \le \varphi \le \pi$. Функция возрастает от 0 до a (при $\varphi = \pi/2$), затем убывает от a до 0. Вертикальная ось пересекается графиком в точках (π/2, a) и (0, 0). График построен для a=2. **Ответ:** график представлен на рисунке.



6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-36n^2+54n-27-n^3-15n^2-75n-125}{27n^3-27n^2+9n-1+8n^3+36n^2+54n+27}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-51n^2-21n-152}{35n^3+9n^2+63n+26}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-51n^{-1}-21n^{-2}-152n^{-3}}{35+9n^{-1}+63n^{-2}+26n^{-3}}=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}=\dfrac{1}{5}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-12x^2+32}{x-2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-12x^2+32}{x-2}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+2x^2-8x-16)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^3+2x^2-8x-16)=-16.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-12x^2+32}{x-2}=-16$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое к знаменателю выражение:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt[3]{16x}-4)(\sqrt{4+x}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{4+x}-\sqrt{2x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{2x})}=4\sqrt{2}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{4-x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}16x=t^3,\ \textit{если}\ \ x\to 4,\\ \textit{то}\ \ t\to 4\end{array}\right|=4\sqrt{2}\lim_{t\to 4}\frac{t-4}{4-t^3/16}=64\sqrt{2}\lim_{t\to 4}\frac{t-4}{64-t^3}=64\sqrt{2}\lim_{t\to 4}\frac{t-4}{(4-t)(t^2+4t+16)}=$$

$$=-64\sqrt{2}\lim_{t\to 4}\frac{1}{t^2+4t+16}=-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+x\sin x}{\sin^2 x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся формулой $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x + x\sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x + x\sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}(2+\frac{x}{\sin x}) = 2+(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})^{-1} = 3.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x + x\sin x}{\sin^2 x} = 3$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z = e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^{-(n+4)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{-(n+4)} = \left|\frac{2}{n+3} = \frac{1}{t},\ \text{если } n\to\infty,\ \text{то } t\to\infty,\ n = 2t-3\right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-2}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1} = e^{-2}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-5}\right)^{n+4} = e^{-2}$.

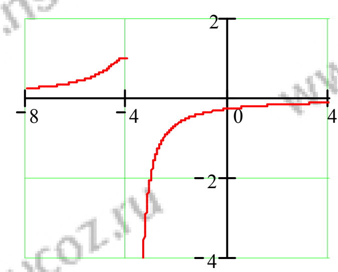
11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной, затем воспользуемся эквивалентными величинами: $x-2 = t,\ x = t+2,\ \text{если } x\to 2,\ \text{то } t\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1-2t(t+4)}{\sin 2\pi t} =$

$$= \left|\ln(1+t)\sim t,\ \sin at\sim at\right| = -\lim_{t\to 0}\frac{2t(t+4)}{2\pi t} = -\frac{4}{\pi}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x} = -\dfrac{4}{\pi}$.

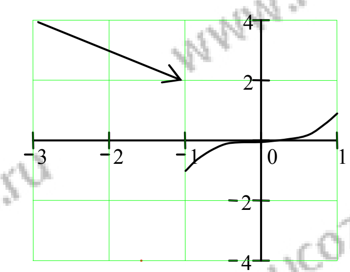
12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = 1-6^{\frac{1}{x+4}}$.

Область определения: $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,\infty)$. В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в граничной точке области определения: $\lim\limits_{x\to -4-0}(1-6^{\frac{1}{x+4}}) = 1,\ \lim\limits_{x\to -4+0}(1-6^{\frac{1}{x+4}}) = -2^{\infty} = -\infty$. Таким образом, в точке $x=-4$ функция имеет разрыв второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to -\infty}(1-6^{\frac{1}{x+4}}) = = \lim\limits_{x\to +\infty}(1-6^{\frac{1}{x+4}}) = 1-2^0 = 0$.



Ответ: В точке и $x=-4$ функция имеет разрыв второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = \begin{cases} -x+1, & x<-1, \\ x^3, & x\geq 1. \end{cases}$.



Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на два интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точкой разрыва может быть только

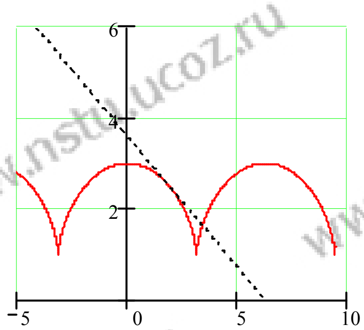
точка, разделяющая интервалы. Вычислим односторонние пределы:
$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} (-x+1) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} x^3 = -1$. Таким образом, в точке $x=-1$ функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке $x=-1$ равна -3.
Ответ: В точке $x=-1$ функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:
$f(x) = x^2 + 2x^2 \cdot \cos(1/x),\ x \neq 0,\ f(0) = 0$.
По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:
$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 2x^2 \cdot \cos(1/x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} [x + 2x \cdot \cos(1/x)] = 0$, так как $|\cos(1/x)| \le 1$ всегда.
Ответ: $f'(0) = 0$.

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = (x^4+5)^{ctg\,x}$.
Прологарифмируем функцию: $\ln y = ctg\,x \cdot \ln(x^4+5)$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot \ln(x^4+5) + \dfrac{4x^3 ctg\,x}{x^4+5}$. Подставляем сюда y:
$y' = [\dfrac{4x^3 ctg\,x}{x^4+5} - \dfrac{\ln(x^4+5)}{\sin^2 x}] \cdot (x^4+5)^{ctg\,x}$. **Ответ:** $y' = [\dfrac{4x^3 ctg\,x}{x^4+5} - \dfrac{\ln(x^4+5)}{\sin^2 x}] \cdot (x^4+5)^{ctg\,x}$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:
$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$ $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:



$x_0 = x(\pi/3) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y_0 = y(\pi/3) = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = $

$= \dfrac{-\sin t}{1+\cos t}$.Тогда $y'_x(\pi/3) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Далее,

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{\left(\dfrac{\sin t}{1+\cos t}\right)'}{(t+\sin t)'} = -\frac{\cos t(1+\cos t) + \sin^2 t}{(1+\cos t)^2 \cdot (1+\cos t)} = -\frac{1+\cos t}{(1+\cos t)^3} = -\frac{1}{(1+\cos t)^2},$$

следовательно, $y''_x(\pi/3) = -\dfrac{4}{9}$. Таким образом, уравнение касательной

$y = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$, уравнение нормали $y = \dfrac{5}{2} + \sqrt{3} \cdot (x - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$. Или
$3\sqrt{3}x + 9y - \sqrt{3}\pi - 27 = 0$ и $3x - \sqrt{3}y - \pi + \sqrt{3} = 0$.

Ответ: $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$, $y'_x(x_0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$y''_x(x_0) = -\dfrac{4}{9}$, $\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 9y - \sqrt{3}\pi - 27 = 0 & \textit{касательная} \\ 3x - \sqrt{3}y - \pi + \sqrt{3} = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $x^2y - y^2 + x = 1$, принимает в точке $x_0 = 1$ значение $y_0 = 1$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $2xy + x^2y' - 2yy' + 1 = 0$. Из этого равенства находим: $y' = \dfrac{2xy+1}{2y-x^2}$. Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{(2y+2xy')(2y-x^2) - (2y'-2x)(2xy+1)}{(2y-x^2)^2}$. Вычислим производные в точке $x_0 = 1$: $y'(1) = 3,\ y''(1) = -4$. **Ответ:** $y' = \dfrac{2xy+1}{2y-x^2}$, $y'' = \dfrac{(2y+2xy')(2y-x^2) - (2y'-2x)(2xy+1)}{(2y-x^2)^2}$, $y'(1) = 3,\ y''(1) = -4$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt{4x-3},\ x = 1{,}78$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0)),\ \Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 1{,}75,\ y(x_0) = y(1{,}75) = 2,\ y' = 2(4x-3)^{-1/2},\ y'(x_0) = y'(1{,}75) = 1,\ \Delta x = 0{,}03$. Тогда $y(1{,}78) \approx 2 + 1 \cdot 0{,}03 = 2{,}03$. **Ответ:** $y \approx 2{,}03$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{tg(\pi x/6)}$.

Это неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{tg(\pi x/6)} = \lim\limits_{x\to3} e^{tg(\pi x/6)\cdot\ln(4-x)} = e^{\lim\limits_{x\to3}[tg(\pi x/6)\cdot\ln(4-x)}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to3}\frac{\ln(4-x)}{tg^{-1}(\pi x/6)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to3}\frac{(\ln(4-x))'}{\left(tg^{-1}(\pi x/6)\right)'} = \lim_{x\to3}\frac{6\cos^2(\pi x/6)}{(4-x)tg^{-2}(\pi x/6)\pi} = \lim_{x\to\infty}\frac{6\sin^2(\pi x/6)}{(4-x)\pi} = \frac{6}{\pi}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{tg(\pi x/6)} = e^{6/\pi}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{tg(\pi x/6)} = e^{6/\pi}$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{(x+1)^2}$.

Это неопределённость вида (∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{(x+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x\ln x)'}{\left((x+1)^2\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + 1}{2(x+1)} =$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{-1}}{2} = 0$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{(x+1)^2} = 0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x - x_0)$: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 10,\ x_0 = -1$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$
Найдём все производные: $f'(x)=4x^3-4x,\ f''(x)=12x^2-4,\ f'''(x)=24x,\ \ f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(-1)=9,\ f'(-1)=0,\ f''(-1)=8,\ f'''(-1)=-248,\ f^{(4)}(3)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=9+4(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4$.

Ответ: $f(x)=9+4(x+1)^2-4(x+1)^3+(x+1)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=\sqrt{1+\sin x},\ x_0=-\pi$.

Применяем формулу Тейлора:
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$
Вычисляем последовательно: $f(-\pi)=1,\ f'(x)=\frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}\cos x,\ f'(-\pi)=-\frac{1}{2}$,
$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+\sin x)^{-3/2}\cos^2 x-\frac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}\sin x=-\frac{1}{4}\sqrt{1+\sin x},\ \ f''(-\pi)=-\frac{1}{4},$$
$$f'''(x)=-\frac{1}{8}(1+\sin x)^{-1/2}\cos x,\qquad f'''(-\pi)=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $f(x)=1-\frac{1}{2}(x+\pi)-\frac{1}{8}(x+\pi)^2+\frac{1}{48}(x+\pi)^3+o((x+\pi)^3)$.

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=x^2-2x-2e^{x-2},\ x_0=2$.

Найдём значения функции и её первых трёх производных в заданной точке:
$f(2)=-2,\ f'(x)=2x-2-2e^{x-2},\ f'(2)=0,\ f''(x)=2-2e^{x-2},\ f''(2)=0,$
$f'''(x)=-2e^{x-2},\ f'''(2)=-2$. По формуле Тейлора $f(x)=-2+(x-2)^3/3+o((x-2)^3)$.

Ответ: В окрестности точки (2, -2) функция ведёт себя как степенная функция третьей степени. Точка (-2, -2) является точкой перегиба: слева - интервал вогнутости, справа - интервал выпуклости.

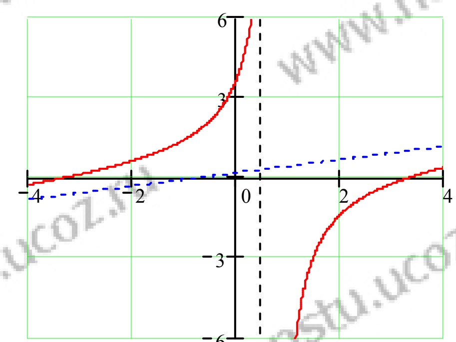
24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{x^2}$.

По формуле Тейлора $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+o(x^2)$. Подставим это в предел:
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(2+\frac{2}{2}x-\frac{2}{2\cdot 4}x^2+o(x^2)-2-x\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{x^2}=-\frac{1}{4}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\frac{x^2-11}{4x-3}$.

Область определения функции:
$x\in(-\infty,3/4)\cup(3/4,\ \infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничной точке области определения:
$$\lim_{x\to 3/4-0}\frac{x^2-11}{4x-3}=\infty,\quad \lim_{x\to 3/4+0}\frac{x^2-11}{4x-3}=-\infty.$$ Отсюда



следует, что прямая $x = 3/4$ является вертикальной асимптотой. Исследуем функцию при $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-11}{4x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-11}{4x-3} = \infty$. Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-11}{(4x-3)\cdot x} = \frac{1}{4},\quad b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^2-11}{4x-3} - \frac{1}{4}x)] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2-44-4x^2+3x}{4(4x-3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-44}{4(4x-3)} = \frac{3}{16}$$. Следовательно, прямая $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{16}$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

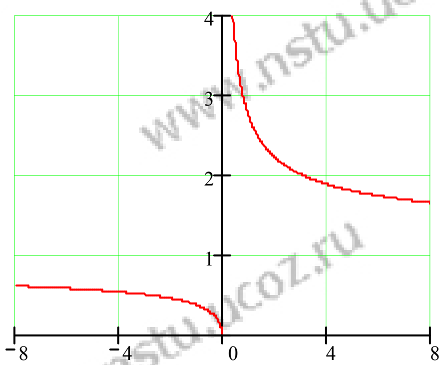
26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y = e^{x^{-1/3}}$.

1. Область определения: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют, функция положительна в области определения 3. Функция имеет разрыв в точке $x = 0$. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

$\lim\limits_{x\to0-0} e^{x^{-1/3}} = \lim\limits_{x\to0-0} e^{1/\sqrt[3]{x}} = e^{-\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to0+0} e^{1/\sqrt[3]{x}} = e^{\infty} = \infty$. Таким образом, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/\sqrt[3]{x}} = e^{-0} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{1/\sqrt[3]{x}} = e^{0} = 1$. Следовательно, прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой. Очевидно, что других асимптот нет.

5. Первая производная $y' = [e^{1/\sqrt[3]{x}}]' = -\dfrac{1}{3}x^{-4/3} \cdot e^{1/\sqrt[3]{x}}$. Производная в нуль не обращается. Производная остаётся отрицательной на всей числовой оси ($x \ne 0$). Следовательно, в области определения функция монотонно убывает и экстремумов не имеет.



6. Вторая производная:

$$y'' = \left(-\frac{1}{3}x^{-4/3} \cdot e^{1/\sqrt[3]{x}}\right)' = \frac{4}{9}x^{-7/3} \cdot e^{1/\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{9}x^{-8/3} \cdot e^{1/\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot e^{1/\sqrt[3]{x}}(1 + 4\sqrt[3]{x}) \cdot x^{-8/3}$$. Вторая производная обращается в нуль в точке $x = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^3 = -\dfrac{1}{64}$. В точке $x = 0$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty, -1/64)$ производная $y'' < 0$ - интервал выпуклости графика функции, в интервале $(-1/64, 0)$ производная $y'' > 0$ - интервал вогнутости, в интервале $(0, \infty)$ производная $y'' > 0$ - интервал вогнутости графика функции. Точка перегиба - $x = -1/64$. 7. График функции не пересекает осей координат, во всех точках $f(x) > 0$. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремумов нет. Точка перегиба - $(-1/64, e^{-4})$, асимптоты: $x = 0$ -вертикальная, $y = 1$ - горизонтальная.