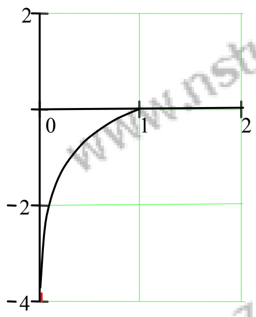
Вариант № 18

1. Найти область определения функции : $y = \arccos\dfrac{x-2}{2x}$.

Область определения данной функции определяется неравенством $\left|\dfrac{x-2}{2x}\right| \le 1$. Освободимся от знака модуля: $-1 \le \dfrac{x-2}{2x} \le 1$. Если $x \ge 0$, то $-2x \le x-2 \le 2x$. Из левого неравенства находим $2 \le 3x$ или $x \ge 2/3$. Из правого неравенства $-x \le 2$ или $x \ge -2$. Если $x \le 0$, то $-2x \ge x-2$ и $x-2 \ge 2x$. Из первого неравенства находим $2 \ge 3x$ или $x \le 2/3$. Из второго неравенства $-x \ge 2$ или $x \le -2$. Объединяя результаты, получим два интервала: $x \le -2$ и $x \ge 2/3$. **Ответ:** $x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$.

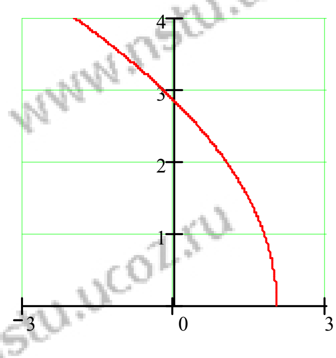
2. Построить график функции: $y = \lg x - |\lg x|$.



Область определения функции: $x \in (0, \infty)$. Преобразуем функцию: $y = \begin{cases} 0, \textit{ если } x \ge 1 \\ 2\lg x, \textit{ если } x < 1 \end{cases}$. Строим по точкам график функции $y = \lg x$ для $x \ge 1$, затем «растягиваем» его по оси ОУ в два раза. **Ответ:** График представлен на рисунке.

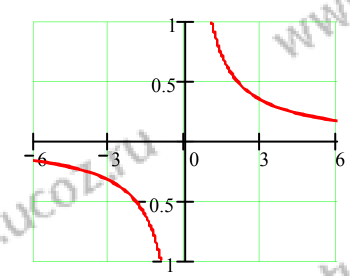
3. Построить график функции: $y = \sqrt{-4x+8}$.

Область определения функции: $x \in (-\infty, 2]$. Преобразуем функцию: $y = \sqrt{-4x+8} \Rightarrow y^2 = -4x+8$. Это уравнение параболы с вершиной в точке (2, 0) и с ветвями, направленными влево по оси ОХ. Исходная функция определяет лишь часть этой параболы, расположенную в верхней полуплоскости. График функции пересекает ось ОУ в точке $(0, 2\sqrt{2})$. **Ответ:** График представлен на рисунке.



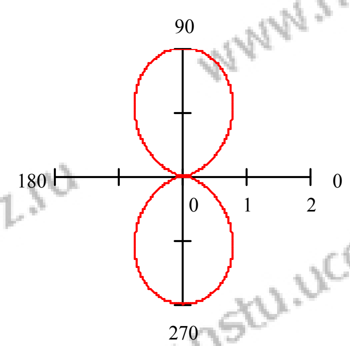
4. Построить график функции: $y = \begin{cases} x = 1/\sin t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Исключим параметр t: $y = \sin t = 1/x$. Или $xy = 1$. Это уравнение гиперболы, расположенной в первой и третьей четвертях, вершины которой лежат на биссектрисе этих углов, а оси координат являются асимптотами гиперболы. Исходная функция определяет только часть гиперболы, так как всегда $|y| = |\sin t| \le 1$ $(|x| \ge 1)$. **Ответ:** График представлен на рисунке.



5. Построить график функции: $\rho = a\sin^2\varphi$.

Поскольку $\rho \ge 0$, то функция существует для всех значений φ и $a > 0$. В интервале если $0 \le \varphi \le 2\pi$ функция возрастает от 0 до a (при $\varphi = \pi/2$), затем убывает от a до 0, затем вновь возрастает от 0 до a, затем убывает до 0. Вертикальная ось пересекается графиком в точках (π/2, *a*), (0, 0) и (3π/2, *a*). График построен для *a*=2.



Ответ: график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+20n+100+9n^2+6n+1}{n^3+18n^2+108n+216-n^3-3n^2-3n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+26n+101}{15n^2+105n+215}=\lim_{n\to\infty}\frac{10+26n^{-1}+101n^{-2}}{15+105n^{-1}+215n^{-2}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}=\dfrac{2}{3}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{5+8x-4x^2}{8x^3-125}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{5+8x-4x^2}{8x^3-125}=$

$$=-\lim_{x\to 5/2}\frac{(2x-5)(2x+1)}{(2x-5)(4x^2+10x+25)}=-\lim_{x\to 5/2}\frac{2x+1}{4x^2+10x+25}=-\frac{6}{75}=-\frac{2}{25}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{5+8x-4x^2}{8x^3-125}=-\dfrac{2}{25}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое к числителю выражение:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)}{(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}-4)}=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)}{(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}-4)}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x}+2}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}=\dfrac{3}{5}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной и воспользуемся первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$: $x-1=t,\ x=t+1,\ \textit{если}\ x\to 1,\ \textit{то}\ t\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(7\pi t+7\pi)}{\sin(8\pi t+8\pi)}=$$

$$=\begin{vmatrix}\sin(7\pi t+7\pi)=-\sin(7\pi t)\\ \sin(8\pi t+8\pi)=\sin(8\pi t)\end{vmatrix}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin(7\pi t)}{\sin(8\pi t)}=-\frac{7}{8}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(7\pi t)}{7\pi t}\cdot\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin(8\pi t)}{8\pi t}\right]^{-1}=-\frac{7}{8}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}=-\dfrac{7}{8}$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1+2}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3-1}\right)^{\frac{n^3-1}{2}\cdot\frac{4n-2n^3}{n^3-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3-1}\right)^{\frac{n^3-1}{2}\cdot\frac{4n-2n^3}{n^3-1}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3-1}\right)^{\frac{n^3-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-2n^3}{n^3-1}}=e^{-2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}=e^{-2}$.

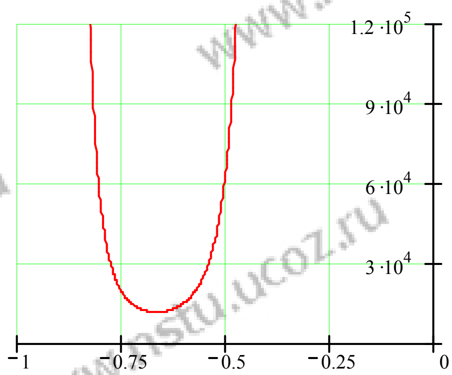
11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$ (неопределённость вида (0/0)).

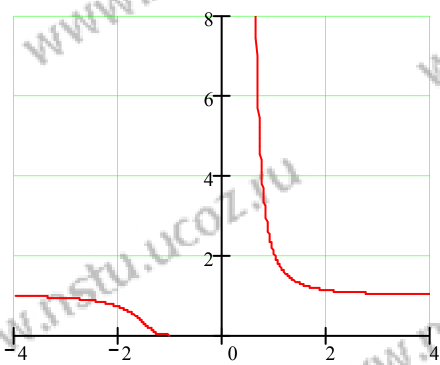
Воспользуемся эквивалентными величинами:. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}=$

$=\left|e^t\text{ -}1\sim t,\ 1-\cos t\sim t^2/2\ \ при\ t\to 0\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2/2}{(3x)^2}=\frac{1}{18}|$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}=\frac{1}{18}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=4^{\frac{1}{x^2(x+1)}}$.

Область определения: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$. В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в граничных точках области определения: $\lim\limits_{x\to -1-0}4^{\frac{1}{x^2(x+1)}}=4^{-\infty}=0$, $\lim\limits_{x\to -1+0}4^{\frac{1}{x^2(x+1)}}=4^{\infty}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}4^{\frac{1}{x^2(x+1)}}=\lim\limits_{x\to 0+0}4^{\frac{1}{x^2(x+1)}}=4^{\infty}=\infty$. Таким образом, в точках x=−1 и x=0 функция имеет разрывы второго рода. Прямые x=−1 и x=0 являются вертикальными асимптотами. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}4^{\frac{1}{x^2(x+1)}}=4^{\pm 0}=1$. Прямая y=1 является горизонтальной асимптотой.

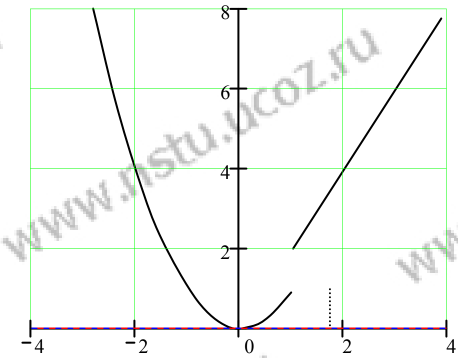




Ответ: В точке и x=−4 функция имеет разрыв второго рода, в остальных точках она непре рывна. Эскиз графика представлен на рисунках (первый график представляет функцию в интервале от -1 до 0, на втором рисунке этого участок не виден).

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = \begin{cases} x^2, & x \le 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$.

Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$. Ось OX разбивается на два интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точкой разрыва может быть только точка, разделяющая интервалы. Вычислим односторонние пределы:



$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} x^2 = 1, \quad \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} 2x = 2$.

Таким образом, в точке x=1 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=1 равна 1.

Ответ: В точке x=1 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = arctg\, x \cdot \sin(1/x),\ x \ne 0,\ f(0) = 0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0 = 0,\ f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg\, x \cdot \sin(1/x)}{x} = \left| arctg\, t \sim t \text{ при } t \to 0 \right| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \sin(1/x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$, следовательно производной не существует. **Ответ:** $f'(0)$ не существует.

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = (x^2+1)^{\cos x}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = \cos x \cdot \ln(x^2+1)$. Берём производную, как производную неявной функции:

$\dfrac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln(x^2+1) + \dfrac{2x \cos x}{x^2+1}$. Подставляем сюда y:

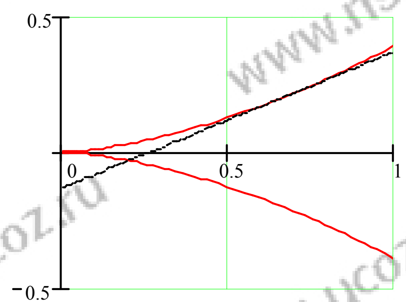
$y' = [\dfrac{2x\cos x}{x^2+1} - \sin x \cdot \ln(x^2+1)] \cdot (x^2+1)^{\cos x}$. **Ответ:**

$y' = [\dfrac{2x\cos x}{x^2+1} - \sin x \cdot \ln(x^2+1)] \cdot (x^2+1)^{\cos x}$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctg\, t \end{cases} \qquad t = 1$.

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x-x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x-x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:



$x_0 = x(1) = \ln 2,\ \ y_0 = y(1) = 1 - \dfrac{\pi}{4}$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$ Тогда $y'_x(1) = \dfrac{1}{2}$. Далее, $y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{(\frac{t}{2})'}{(\ln(1+t^2))'} = \dfrac{1+t^2}{2\cdot 2t} = \dfrac{1+t^2}{4t}$

, следовательно, $y''_x(1) = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, уравнение касательной $y = 1 - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\cdot(x - \ln 2)$, уравнение нормали $y = 1 - \dfrac{\pi}{4} - 2\cdot(x - \ln 2)$. Или $2x - 4y + 4 - \pi - 2\ln 2 = 0$ и $8x + 2y - 4 + \pi - 8\ln 2 = 0$. **Ответ:** $(x_0, y_0) = \left(\ln 2,\ 1 - \dfrac{\pi}{4}\right),\ \ y'_x(x_0) = \dfrac{1}{2}$,

$$y''_x(x_0) = \frac{1}{2},\ \begin{cases} 2x - 4y + 4 - \pi - 2\ln 2 = 0 & \textit{касательная} \\ 8x + 2y - 4 + \pi - 8\ln 2 = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}.$$

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $xe^y + y\cos x = 1$, принимает в точке $x_0 = 0$ значение $y_0 = 1$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $e^y + xe^y y' + y'\cos x - y\sin x = 0$. Из этого равенства находим: $y' = \dfrac{y\sin x - e^y}{xe^y + \cos x}$. Находим вторую производную:

$$y'' = \frac{(y'\sin x + y\cos x - e^y y')(xe^y + \cos x) - (e^y + xe^y y' - \sin x)(y\sin x - e^y)}{(xe^y + \cos x)^2}.$$

Вычислим производные в точке $x_0 = 0$: $y'(0) = -e,\ \ y''(0) = 2e^2 + 1$. **Ответ:** $y' = \dfrac{y\sin x - e^y}{xe^y + \cos x}$,

$$y'' = \frac{(y'\sin x + y\cos x - e^y y')(xe^y + \cos x) - (e^y + xe^y y' - \sin x)(y\sin x - e^y)}{(xe^y + \cos x)^2},$$

$y'(0) = -e,\ \ y''(0) = 2e^2 + 1$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt[3]{x},\ \ x = 0{,}982$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0)),\ \Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 1,\ \ y(x_0) = y(1) = 1,\ \ y' = x^{-2/3}/3,\ \ y'(x_0) = y'(1) = 1/3,\ \ \Delta x = -0{,}018$. Тогда $y(1) \approx 1 - 0{,}018/3 = 0{,}994$. **Ответ:** $y \approx 0{,}994$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Это неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0} e^{(1/x^2)\cdot\ln(\cos x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}[(1/x^2)\cdot\ln(\cos x)]}$. Найдём предел в показателе степени:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln(\cos x))'}{(x^2)'} = -\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{2x\cos x} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}$.

Это неопределённость вида (∞/∞): $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(\sqrt[10]{x})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x^{9/10}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10}{\sqrt[10]{x}}=0$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}=0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=x^4-x+3,\ x_0=3$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dfrac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$.

Найдём все производные: $f'(x)=4x^3-1$, $f''(x)=12x^2$, $f'''(x)=24x$, $f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(3)=81,\ f'(3)=107,\ f''(3)=108,\ f'''(3)=72,\ f^{(4)}(3)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=81+107(x-3)+54(x-3)^2+12(x-3)^3+(x-3)^4$.

Ответ: $f(x)=81+107(x-3)+54(x-3)^2+12(x-3)^3+(x-3)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x},\ x_0=-1$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(-1)=e^{-\pi/4}$, $f'(x)=e^{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)^{-1}$, $f'(-1)=e^{-\pi/4}/2$,

$f''(x)=e^{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)^{-2}-e^{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)^{-2}2x=e^{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)^{-2}(1-2x)$, $f''(-1)=3e^{-\pi/4}/4$

$f'''(x)=e^{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)^{-3}(1-2x)+e^{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)^{-4}[-2(1+x^2)^2-2(1+x^2)2x(1-2x)]$,

$f'''(-1)=11e^{-\pi/4}/8$.

Ответ: $f(x)=e^{-\pi/4}+\dfrac{e^{-\pi/4}}{2}(x+1)+\dfrac{3e^{-\pi/4}}{8}(x+1)^2+\dfrac{11e^{-\pi/4}}{48}(x+1)^3+o((x+1)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-x^2-x,\ x_0=-1$.

Найдём значения функции и её первых трёх производных в заданной точке: $f(-1)=1$, $f'(x)=-(x+2)^{-2}-2x-1$, $f'(-1)=0$, $f''(x)=2(x+2)^{-3}-2$, $f''(2)=0$, $f'''(x)=-6(x+2)^{-4}$, $f'''(-1)=-6$. По формуле Тейлора $f(x)=1-(x+1)^3+o((x+1)^3)$.

Ответ: В окрестности точки (2, -2) функция ведёт себя как степенная функция третьей степени. Точка (-1, 1) является точкой перегиба: слева - интервал вогнутости, справа - интервал выпуклости.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-(x-1)e^{x-1}}{2(x-1)^3}$.

Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-(x-1)e^{x-1}}{2(x-1)^3}=\left|\begin{array}{l}x-1=t,\ x=t+1\\ x\to1\Rightarrow t\to0\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(t+1)-te^t}{2t^3}$. По формуле Тейлора $\ln(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)$. Далее, $e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}+o(t^3)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)-te^{t}}{2t^{3}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^{3}}(t-\dfrac{t^{2}}{2}+\dfrac{t^{3}}{3}-t-t^{2}-\dfrac{t^{3}}{2}+\dfrac{t^{4}}{6}+o(t^{3}))=$

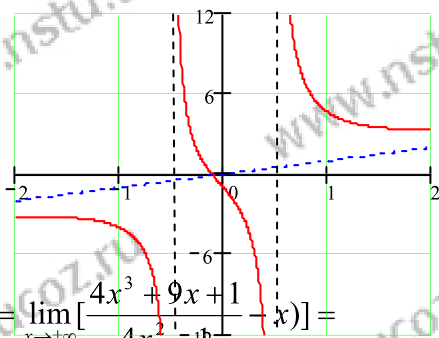
$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^{3}}(-\dfrac{3t^{2}}{2}-\dfrac{t^{3}}{6}+\dfrac{t^{4}}{6}+o(t^{3}))=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}(-\dfrac{3}{2t}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{t}{6}+\dfrac{o(t^{3})}{t^{3}})=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}(-\dfrac{3}{2t})=-\infty$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-(x-1)e^{x-1}}{2(x-1)^{3}}=-\infty$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{4x^{3}+9x+1}{4x^{2}-1}$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,-1/2)\cup(-1/2,\ 1/2)\cup(1/2,\ \infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения: $\lim\limits_{x\to -1/2-0}\dfrac{4x^{3}+9x+1}{4x^{2}-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1/2+0}\dfrac{4x^{3}+9x+1}{4x^{2}-1}=\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1/2-0}\dfrac{4x^{3}+9x+1}{4x^{2}-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1/2+0}\dfrac{4x^{3}+9x+1}{4x^{2}-1}=\infty$.



Отсюда следует, что прямые $x=-1/2$ и $x=1/2$ являются вертикальными асимптотами.

Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^{3}+9x+1}{4x^{2}-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^{3}+9x+1}{4x^{2}-1}=\infty$.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^{3}+9x+1}{(4x^{2}-1)\cdot x}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\dfrac{4x^{3}+9x+1}{4x^{2}-1}-x)]=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^{3}+9x+1-4x^{3}+x}{4x^{2}-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{10x+1}{4x^{2}-1}=0$.

Следовательно, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=x\sqrt[3]{1-x}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют. 3. Функция не имеет разрывов. Вертикальных асимптот нет.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}x\sqrt[3]{1-x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty}x\sqrt[3]{1-x}=-\infty$. Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\sqrt[3]{1-x}/x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-x}=\mp\infty$, . Следовательно, наклонных асимптот нет.

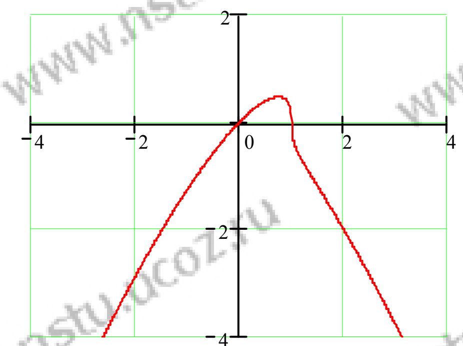
5. Первая производная $y'=[x\cdot\sqrt[3]{1-x}]'=\sqrt[3]{1-x}-\dfrac{x}{3}\cdot(1-x)^{-2/3}=\dfrac{3-3x-x}{3\cdot\sqrt[3]{(1-x)^{2}}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3-4x}{\sqrt[3]{(1-x)^{2}}}$.

Производная обращается в нуль в точке $x=3/4$. Слева от точки производная положительна, справа отрицательна. Следовательно, в точке $x=3/4$ имеет место максимум функции, причём $f(\dfrac{3}{4})=\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$. В точке $x=1$ производная не существует. В интервале $(-\infty,3/4)$ функция монотонно возрастает, в интервале $(3/4,1)$ функция монотонно убывает, в интервале $(1,\infty)$ функция также монотонно убывает.

6. Вторая производная:

$$y'' = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3-4x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right)' = -\frac{4}{3}\cdot(1-x)^{-2/3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(3-4x)(1-x)^{-5/3} = \frac{-12+12x+6-8x}{9\cdot\sqrt[3]{(1-x)^5}} =$$

$= \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{(1-x)^5}}$. Вторая производная обращается в нуль в точке $x = 3/2$ и не существует в точке $x = 1$. Имеем три интервала. В интервале $(-\infty, 1)$ вторая производная отрицательна, следовательно, график функции выпуклый, в интервале $(1, 3/2)$ вторая производная положительна, следовательно, график функции вогнутый, в интервале $(3/2, \infty)$ вторая производная отрицательна, следовательно, график функции выпуклый. Точки $x = 1$ и $x = 3/2$ являются точками перегиба. 7. График функции пересекает оси координат в точках $x = 0$ и $x = 1$. **Ответ:** График функции



представлен на рисунке, экстремум – максимум – в точке $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4\cdot\sqrt[3]{4}})$. Точки перегиба - $(1, 0)$ и $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2\sqrt[3]{2}})$. Асимптот нет.