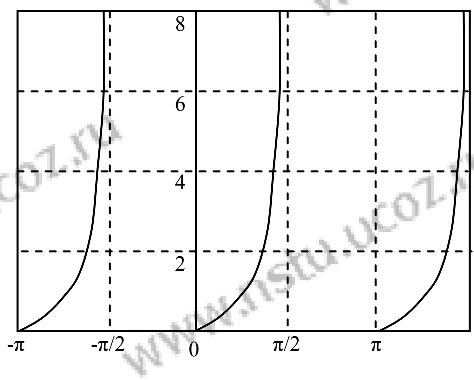
Вариант № 19

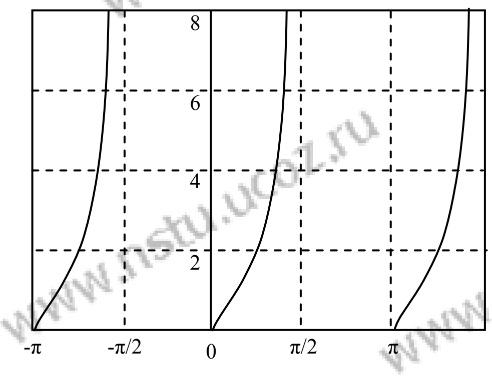
1. Найти область определения функции : $y = \dfrac{3}{4-x^2} + \lg(x-1)$.

Область определения данной функции определяется следующим неравенством: $x-1>0$, т.е. $x>1$. Далее, знаменатель не должен обращаться в нуль: $4-x^2 \neq 0$ или $x \neq \pm 2$. Объединяя результаты, получим: $x>1,\ x\neq 2$. **Ответ:** $x\in(1,2)\cup(2,\infty)$.

2. Построить график функции: $y = |tg\,x| + tg\,x$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Преобразуем функцию:

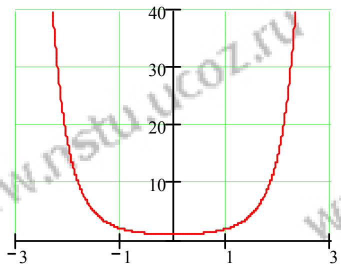


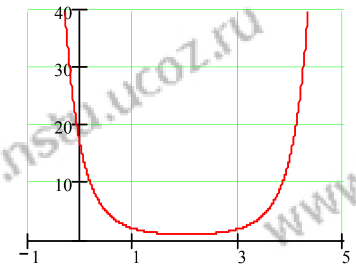


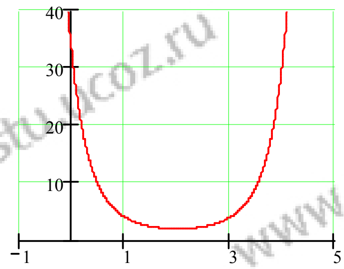
$y = \begin{cases} 0,\ \text{если } -\pi/2 + k\pi \le x < k\pi \\ 2\cdot tg\,x,\ \text{если } k\pi \le x < \pi/2 + k\pi \end{cases}$. Строим по точкам график функции $y = tg\,x$ в интервале $0 \le x < \pi/2$, затем «растягиваем» его по оси ОУ в два раза. Полученный график повторяем в интервалах $k\pi \le x < \pi/2 + k\pi$ для всех k. **Ответ:** График представлен на рисунке.

3. Построить график функции: $y = 2^{x^2-4x+5}$.

Область определения функции: – вся числовая ось: $x\in(-\infty,\infty)$. Преобразуем функцию: $y = 2^{x^2-4x+5} = 2^{(x-2)^2+1} = 2\cdot 2^{(x-2)^2}$.





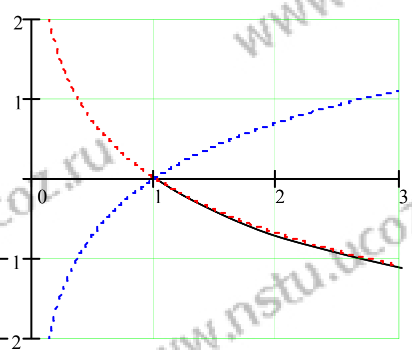


Сначала построим график функции $y = 2^{x^2}$, затем сдвинем полученный график на 2 единицы вправо по оси ОХ. Получим график функции $y = 2^{(x-2)^2}$. Затем ординаты всех точек графика увеличим в 2 раза. **Ответ:** Последовательность получения графика представлена на рисунке.

4. Построить график функции: $y = \begin{cases} x = 1/\cos t \\ y = \ln\cos t \end{cases}$.

Исключим параметр *t*:

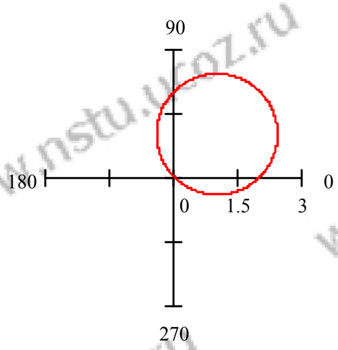
$\cos t = 1/x \Rightarrow y = \ln(1/x) \Rightarrow y = -\ln x$. Заметим, чо всегда $|x| \ge 1$, так как $|\cos t| \le 1$. Кроме того, область определения функции определяется неравенством $\cos t > 0$, т.е. $x \ge 1$. Построим сначала график



функции $y = \ln x$, затем отразим этот график зеркально относительно оси OX.. **Ответ:** График представлен на рисунке (сплошная линия).

5. Построить график функции: $\rho = 2(\cos\varphi + \sin\varphi)$.

Преобразуем функцию: $\rho = 2(\cos\varphi + \sin\varphi) = = 2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi) = 2\sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$. Это уравнение окружности радиуса $\sqrt{2}$. Можно перейти к декартовым координатам $\rho\cos\varphi = x,\ \rho\sin\varphi = y,\ x^2 + y^2 = \rho^2$. Тогда $\rho = 2(\cos\varphi + \sin\varphi) \Rightarrow \rho^2 = 2(x+y) \Rightarrow x^2 + y^2 = 2(x+y)$. Или: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ - окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1, 1).



Ответ: график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n+7)^3}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n+7)^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 + 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8}{8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 - n^3 - 21n^2 - 147n - 343} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{35n^3 + 66n^2 + 42n + 9}{7n^3 + 15n^2 - 93n - 316} = \lim_{n\to\infty}\frac{35 + 66n^{-1} + 42n^{-2} + 9n^{-3}}{7 + 15n^{-1} - 93n^{-2} - 316n^{-3}} = \frac{35}{7} = 5.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n+7)^3} = 5$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 + x - 12}{x^3 - 9x + x^2 - 9}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 + x - 12}{x^3 - 9x + x^2 - 9} =$

$= \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+3)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x+4}{(x+3)(x+1)} = \frac{7}{24}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 + x - 12}{x^3 - 9x + x^2 - 9} = \frac{7}{24}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2 + x} - \sqrt{2x}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое к знаменателю выражение:

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2 + x} - \sqrt{2x}} = \lim_{x\to 1/2}\frac{(\sqrt[3]{x/4} - 1/2)(\sqrt{1/2 + x} + \sqrt{2x})}{(\sqrt{1/2 + x} - \sqrt{2x})(\sqrt{1/2 + x} + \sqrt{2x})} = \lim_{x\to 1/2}\frac{2(\sqrt[3]{x/4} - 1/2)}{1/2 - x} =$$

$$= \lim_{x\to 1/2}\frac{2(\sqrt[3]{x/4} - 1/2)}{1/2 - x} = -\lim_{x\to 1/2}\frac{2(\sqrt[3]{x/4} - 1/2)}{4[(\sqrt[3]{x/4})^3 - (1/2)]} = -\lim_{x\to 1/2}\frac{1}{2(\sqrt[3]{(x/4)^2} + (1/2)\sqrt[3]{x/4} + (1/2)^2} = -\frac{2}{3}$$

. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2 + x} - \sqrt{2x}} = -\frac{2}{3}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to \pi/3}\frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной: $\lim\limits_{x\to \pi/3}\frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x} = \begin{vmatrix}\pi - 3x = t,\ \ x = (\pi - t)/3, \\ если\ \ x \to \pi/3,\ то\ t \to 0\end{vmatrix} =$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-2\cos(\pi/3-t/3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t/3)-\sqrt{3}\sin(t/3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2(t/6)-\sqrt{3}\sin(t/3)}{t} =$$

$= \frac{1}{3}[\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t/6)}{t/6}\cdot\lim_{t\to 0}\sin(t/6) - \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin(t/3)}{t/3}] = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Здесь воспользовались первым замечательным пределом: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. **Ответ:** $\lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Вычислить предел: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n+7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n+7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+18n+9+3n-2}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-2}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-2}{2n^2+18n+9}\right)^{\frac{2n^2+18n+9}{3n-2}\cdot\frac{(2n+1)(3n-2)}{2n^2+18n+9}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-2}{2n^2+18n+9}\right)^{\frac{2n^2+18n+9}{3n-2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-2)}{2n^2+18n+9}}.$$

Предел в квадратных скобках равен числу e. Рассмотрим предел знаменателя:

$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)(2n+1)}{2n^2+18n+9} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-n-2)}{2n^2+18n+9} = 3$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n+7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1} = e^3$

Ответ: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n+7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1} = e^3$.

11. Вычислить предел: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin[\pi(1+x/2)]}$ (неопределённость вида (0/0)).

Преобразуем предел и воспользуемся эквивалентными величинами:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin[\pi(1+x/2)]} = \left|\sin[\pi(1+x/2)] = -\sin\frac{\pi x}{2}\right| = -\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin(\pi x/2)} =$$

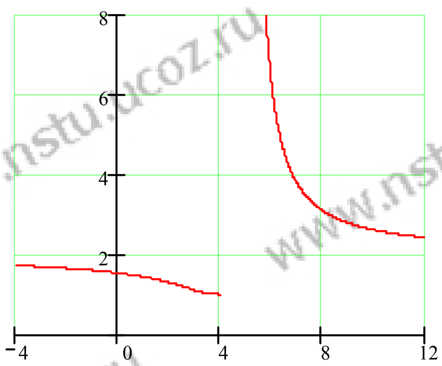
$= \left|\begin{matrix} e^{4x}-1\sim 4\text{x}, \\ \sin(\pi x/2)\sim\pi x/2 \end{matrix}\right| = -\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\pi x/2} = -\frac{8}{\pi}$.. **Ответ:** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin[\pi(1+x/2)]} = -\frac{8}{\pi}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = 2^{7^{\frac{1}{x-4}}}$.

Область определения: $x\in(-\infty, 4)\cup(4,\infty)$.

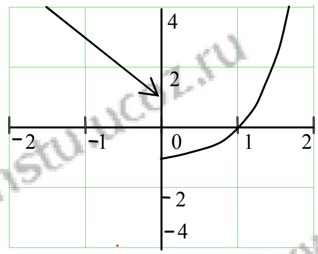
В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в граничной точке области определения:

$\lim_{x\to 4-0} 2^{7^{\frac{1}{x-4}}} = 2^0 = 1$, $\lim_{x\to 4+0} 2^{7^{\frac{1}{x-4}}} = 2^\infty = \infty$. Таким образом, в точке x=4 функция имеет разрыв второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim_{x\to-\infty} 2^{7^{\frac{1}{x-4}}} = 2$, $\lim_{x\to+\infty} 2^{7^{\frac{1}{x-4}}} = 2$.



Ответ: В точке и x=4 функция имеет разрыв второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=\begin{cases}-2x+1, & x<0,\\ x^3-1, & x\ge 0.\end{cases}$.



Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на два интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точкой разрыва может быть только точка, разделяющая интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(-2x+1)=1,\quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^3-1)=-1$. Таким образом, в точке x=0 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=0 равна -2.

Ответ: В точке x=0 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x)=e^{x\cdot\sin(5/x)}-1,\ x\ne 0,\ f(0)=0$.

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0=0,\ f(x_0)=0$, поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\cdot\sin(5/x)}-1}{x}=\left|e^{t}-1\sim t\ при\ t\to 0\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin(5/x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin(5/x)$, следовательно производной не существует. **Ответ:** $f'(0)$ не существует.

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y=x^{e^{ctg\,x}}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y=e^{ctg\,x}\ln x$.

Берём производную, как производную неявной функции:

$\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}e^{ctg\,x}\ln x+\dfrac{e^{ctg\,x}}{x}=e^{ctg\,x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{\sin^2 x}\right)$. Подставляем сюда y:

$y'=e^{ctg\,x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{\sin^2 x}\right)\cdot x^{e^{ctg\,x}}$. **Ответ:** $y'=e^{ctg\,x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{\sin^2 x}\right)\cdot x^{e^{ctg\,x}}$.

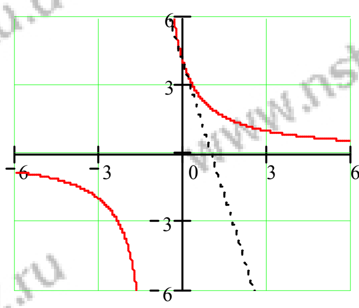
16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$\begin{cases}x=\cos 2t\\ y=2/\cos^2 t\end{cases}\qquad t=\dfrac{\pi}{4}$.

Уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ имеют вид

$y=y_0+y'_x(x_0)\cdot(x-x_0)$ и $y=y_0-(1/y'_x(x_0))\cdot(x-x_0)$,

где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:



$x_0=x(\dfrac{\pi}{4})=\cos\dfrac{\pi}{2}=0,\quad y_0=y(\dfrac{\pi}{4})=2\cdot\dfrac{1}{(1/\sqrt{2})^2}=4$.

Найдём производные y'_x и y''_{xx}:

$y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}==\dfrac{4\cos^{-3}t\cdot\sin t}{-2\sin 2t}=-\dfrac{2\cos^{-3}t\cdot\sin t}{2\sin t\cdot\cos t}=-\dfrac{1}{\cos^4 t}$ .T огда $y'_x(\frac{\pi}{4}) = -4$. Далее, $y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\frac{1}{\cos^4 t})'}{(\cos 2t)'} = \frac{-4\cos^{-5} t \cdot \sin t}{-2 \cdot \sin 2t} = \frac{2\cos^{-5} t \cdot \sin t}{2 \cdot \sin t \cdot \cos t} = \frac{1}{\cos^6 t}$

, следовательно, $y''_x(\frac{\pi}{4}) = 8$. Таким образом, уравнение касательной $y = 4 - 4 \cdot (x - 0)$, уравнение нормали $y = 4 + \frac{1}{4} \cdot (x - 0)$. Или $4x + y - 4 = 0$ и $x - 4y + 16 = 0$. **Ответ:**

$(x_0, y_0) = (0,\ 4)$, $y'_x(x_0) = -4$, $y''_x(x_0) = 8$, $\begin{cases} 4x + y - 4 = 0 & \textit{касательная} \\ x - 4y + 16 = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция *y*(*x*), заданная неявно уравнением $x^3 + y^3 + xy = 3$, принимает в точке $x_0 = 1$ значение $y_0 = 1$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по *x*, предполагая, что *y*= *y*(*x*): $3x^2 + 3y^2 y' + y + xy' = 0$. Из этого равенства находим: $y' = -\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x}$. Находим вторую производную: $y'' = -\frac{(6x + y')(3y^2 + x) - (6yy' + 1)(3x^2 + y)}{(3y^2 + x)^2}$. Вычислим производные в точке $x_0 = 1$: $y'(1) = -1,\ y''(1) = -5/2$. **Ответ:** $y' = -\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x}$,

$y'' = -\frac{(6x + y')(3y^2 + x) - (6yy' + 1)(3x^2 + y)}{(3y^2 + x)^2}$, $y'(1) = -1,\ y''(1) = -5/2$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = x^5,\ x = 2{,}997$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0)),\ \Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 3,\ y(x_0) = y(3) = 243,\ y' = 5x^4,\ y'(x_0) = y'(3) = 405,\ \Delta x = -0{,}003$. Тогда $y(2{,}997) \approx 243 - 405 \cdot 0{,}003 = 241{,}785$. **Ответ:** $y \approx 241{,}785$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-(1 - \ln x)^{-1/2}}$.

Это неопределённость вида (∞^0). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-(1 - \ln x)^{-1/2}} = \lim\limits_{x \to +0} e^{-(1 - \ln x)^{-1/2} \cdot \ln(1/x^2)} = e^{\lim\limits_{x \to +0}[-(1 - \ln x)^{-1/2} \cdot \ln(1/x^2)]}$. Найдём предел в показателе степени: $-\lim\limits_{x \to +0} \frac{\ln(1/x^2)}{\sqrt{1 - \ln x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(\ln(1/x^2))'}{(\sqrt{1 - \ln x})'} = -\lim\limits_{x \to \infty}[2x^2 \cdot x^{-3} \cdot 2\sqrt{1 - \ln x} \cdot x] =$

$= -4\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{1 - \ln x} = -\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-(1 - \ln x)^{-1/2}} = e^{-\infty} = 0$.

Ответ: $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-(1 - \ln x)^{-1/2}} = 0$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to 0} x^3 e^{x^{-2}}$.

Это неопределённость вида (0·∞): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{x^{-2}}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(e^{-x^{-2}}\right)'}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{3x^2}{2xe^{-x^{-2}}}=$

$=\lim\limits_{x\to +0}\frac{3x}{2e^{-x^{-2}}}=\frac{3}{4}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{xe^{-x^{-2}}}=\infty$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}x^3e^{x^{-2}}=\infty$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=x^4-2x^3$, $x_0=-3$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$.

Найдём все производные: $f'(x)=4x^3-6x^2$, $f''(x)=12x^2-12x$, $f'''(x)=24x-12$, $f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(-3)=135$, $f'(-3)=-162$, $f''(-3)=144$, $f'''(-3)=-84$, $f^{(4)}(-3)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=135-162(x+3)+72(x+3)^2-14(x+3)^3+(x+3)^4$.

Ответ: $f(x)=135-162(x+3)+72(x+3)^2-14(x+3)^3+(x+3)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=\sqrt{tgx}$, $x_0=\pi/4$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно:

$$f(\pi/4)=1,\ \ f'(x)=\frac{1}{2}tg^{-1/2}x\cdot\cos^{-2}x=\frac{1}{2}tg^{-1/2}x\cdot(1+tg^2x),\ \ f'(\pi/4)=1,$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}tg^{-3/2}x+\frac{3}{2}tg^{1/2}x](1+tg^2x),\ \ f''(\pi/4)=1$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}[\frac{3}{4}tg^{-5/2}x+\frac{3}{4}tg^{-1/2}x](1+tg^2x)^2+\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}tg^{-3/2}x+\frac{3}{2}tg^{1/2}x]\cdot 2tg\,x\cdot(1+tg^2x),$$

$f'''(\pi/4)=5$. **Ответ:** $f(x)=1+(x-\pi/4)+\frac{1}{2}(x-\pi/4)^2+\frac{5}{6}(x-\pi/4)^3+o((x-\pi/4)^3)$.

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=x^2-2x-(x-1)\ln x$, $x_0=1$.

Найдём значения функции и её первых трёх производных в заданной точке: $f(1)=-1$, $f'(x)=2x-2-\ln x-1+x^{-1}$, $f'(1)=0$, $f''(x)=2-x^{-1}-x^{-2}$, $f''(1)=0$, $f'''(x)=x^{-2}+2x^{-3}$, $f'''(1)=3$. По формуле Тейлора $f(x)=-1+(x-1)^3/2+o((x-1)^3)$.

Ответ: В окрестности точки (1, -1) функция ведёт себя как степенная функция третьей степени. Точка (1, -1) является точкой перегиба: слева - интервал выпуклости, справа - интервал вогнутости.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2xe^{x+2}-x^3-6x^2-10x}{(x+2)^2}$.

Сделаем замену: $x+2=t\Rightarrow x=t-2,\ x\to -2\Rightarrow t\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to -2}\frac{2xe^{x+2}-x^3-6x^2-10x}{(x+2)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2(t-2)e^t-(t-2)^3-6(t-2)^2-10(t-2)}{t^2}=$$

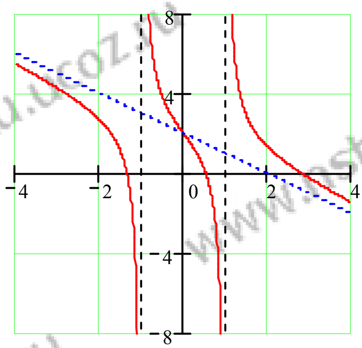
$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(t-2)(2e^t-t^2-2t-2)}{t^2}$. По формуле Тейлора $e^t=1+t+t^2/2+o(t^2)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t-2)(2e^t-t^2-2t+8)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t-2)(2+2t+t^2-t^2-2t-2+o(t^2))}{t^2}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t-2)\cdot o(t^2)}{t^2}=0$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2xe^{x+2}-x^3-6x^2-10x}{(x+2)^2}=0$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ \infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения:



$\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}=\infty$

$,\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}=\infty$

. Отсюда следует, что прямые $x=-1$ и $x=1$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}=\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}=-\infty$.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{(1-x^2)\cdot x}=-1,\quad b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}+x]=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2+x-x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2x+2}{1-x^2}=2$. Следовательно, прямая $y=-x+2$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

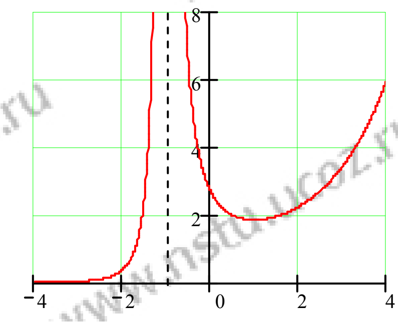
26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^2}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$.

2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют, функция положительна в области определения 3. Функция имеет разрыв в точке $x=-1$. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1+00}\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^2}=\infty$. Таким образом, прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^2}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x+1}}{2(x+1)}==\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x+1}}{2}=\infty$ (по правилу Лопиталя).

Следовательно, прямая $y=0$ является левосторонней горизонтальной асимптотой. Очевидно, что других асимптот нет.



5. Первая производная $y' = [\frac{e^{x+1}}{(x+1)^2}]' = (x+1)^{-2} \cdot e^{x+1} - 2(x+1)^{-3} \cdot e^{x+1} = \frac{(x-1)e^{x+1}}{(x+1)^3}$.

Производная обращается в нуль в точке $x = 1$. Слева от точки производная отрицательна, справа положительна. Следовательно, в точке $x = 1$ имеет место минимум функции, причём $f(1) = e^2 / 4$. В интервале $(-\infty, -1)$ функция монотонно возрастает, в интервале $(-1, 1)$ функция монотонно убывает, в интервале $(1, \infty)$ функция монотонно возрастает.

6. Вторая производная:

$y'' = \left(\frac{(x-1)e^{x+1}}{(x+1)^3}\right)' = \frac{[e^{x+1} + (x-1)e^{x+1}](x+1)^3 - 3(x+1)^2(x-1)e^{x+1}}{(x+1)^6} = \frac{e^{x+1}(x^2 - 2x + 3)}{(x+1)^4}$. Вторая производная во всех точках положительна, следовательно, график функции вогнутый на всех интервалах. Точек перегиба нет. 7. График функции не пересекает осей координат, во всех точках $f(x) > 0$. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум – минимум – в точке $(1, e^2 / 4)$. Вертикальная асимптота $x = -1$, горизонтальная асимптота $y = 1$.