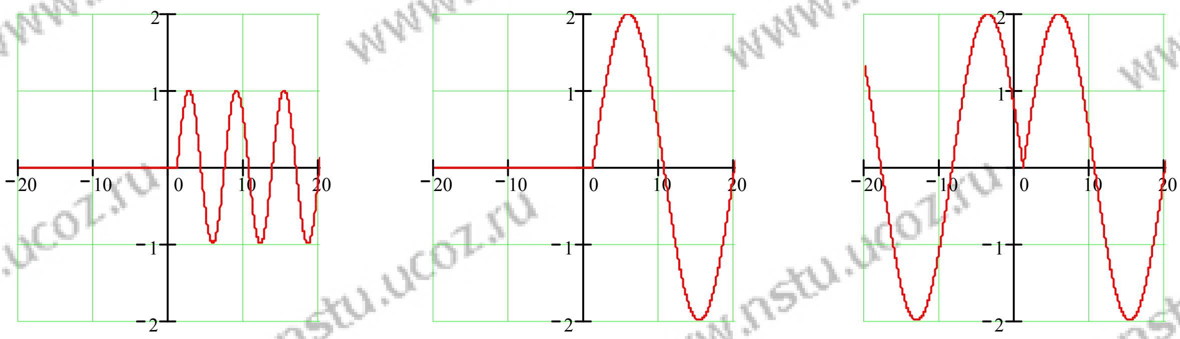
Вариант № 20

1. Найти область определения функции : $y = 2\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2+1}$.

Неравенство $x^2 + 1 \geq 0$ выполняется всегда. Поэтому область определения данной функции определяется следующими неравенствами: $x - 3 \geq 0$, т.е. $x \geq 3$, и $3 - x \geq 0$, т.е. $3 - x \geq 0$. Решением системы этих неравенств является одна точка $x = 3$. **Ответ:** $x = 3$.

2. Построить график функции: $y = 2\sin\dfrac{|x-1|}{3}$.

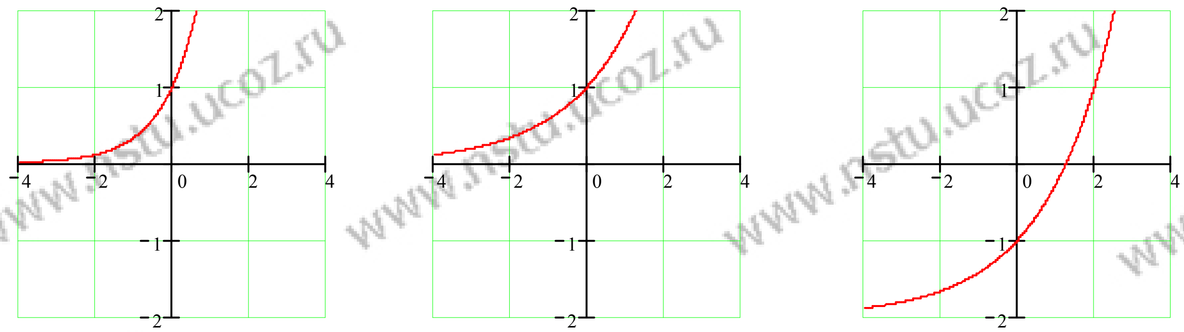


Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$. Преобразуем функцию: $y = -2\sin\dfrac{x-1}{3}$, *если* $x < 1$ и $y = 2\sin\dfrac{x-1}{3}$, *если* $x \geq 1$. Функция чётная относительно разности $x - 1$. Поэтому достаточно построить правую часть графика, затем отобразить его влево зеркально относительно прямой $x = 1$. Строим по точкам график функции $y = \sin(x-1)$ в интервале $x \geq 1$, затем «растягиваем» его по оси OY в два раза, а по оси OX – в три раза. Полученный график отображаем зеркально влево.

Ответ: Последовательность построения графика представлена на рисунках.

3. Построить график функции: $y = 3^{x/2} - 2$.

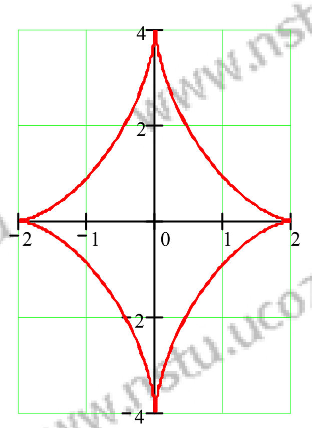
Область определения функции: – вся числовая ось: $x \in (-\infty, \infty)$.



Сначала построим график функции $y = 3^x$, затем «растянем» полученный график в три раза по оси OX, затем сместим его на 2 единицы вниз по оси OY. Получим график функции $y = 3^{x/2} - 2$. Точки пересечения с осями координат $(0, -1)$ и $(\log_3 4, 0)$.

Ответ: Последовательность получения графика представлена на рисунке.

4. Построить график функции: $y = \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$.



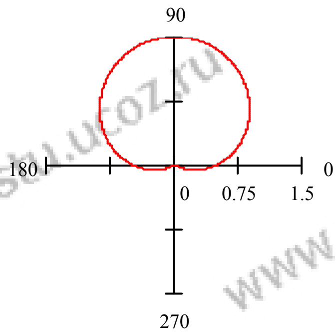
Составим таблицу координат нескольких точек графика в первой четверти:

t	0	π/6	π/4	π/3	π/2
x	2	1.3	0.708	0.25	0
y	0	0.5	1.414	2.598	4

График симметричен относительно осей координат и относительно начала координат. Поэтому нет необходимости вычислять координаты точек в других четвертях координатной плоскости. По точкам строим график и отражаем его симметрично (относительно начала координат) в другие четверти.

Ответ: График представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho = 0.5 + \sin\varphi$.



Функция существует, когда $\rho \ge 0 \Rightarrow \sin\varphi \ge -0.5 \Rightarrow -\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{7\pi}{6}$. Так как $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$, то достаточно построить правую половину графика, а затем отразить его зеркально в левую полуплоскость. Составим таблицу значений функции:

φ	-π/6	-π/12	0	π/6	π/4	π/3	π/2
ρ	0	0.241	0.5	1	1.207	1.366	1.5

Строим правую половину графика по этим точкам и отражаем его в левую полуплоскость.

Ответ: график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+21n^2+147n+343-n^3-6n^2-12n-8}{9n^2+12n+4+16n^2+8n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+135n+335}{25n^2+20n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{15+135n^{-1}+335n^{-2}}{25+20n^{-1}+5n^{-2}}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}=\dfrac{3}{5}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2x^4-8}{x^6-8}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2x^4-8}{x^6-8}=$

$=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2(x^2-2)(x^2+2)}{(x^2-2)(x^4+2x^2+4)}=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2(x^2+2)}{x^4+2x^2+4}=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{2x^4-8}{x^6-8}=\dfrac{2}{3}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое к знаменателю выражение:

$$\lim_{x\to 1/3}\frac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to 1/3}\frac{(\sqrt[3]{x/9}-1/3)(\sqrt{1/3+x}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x})(\sqrt{1/3+x}+\sqrt{2x})}=2\sqrt{\frac{2}{3}}\lim_{x\to 1/3}\frac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{1/3-x}=$$

$$=-2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\lim_{x\to 1/3}\frac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{9[(\sqrt[3]{x/9})^3-(1/3)^3]}=-\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\lim_{x\to 1/3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x/9)^2}+(1/3)\sqrt[3]{x/9}+(1/3)^2}=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}=-\frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1+x)}{\sin \pi x}=\left|\begin{matrix} x-1=t, \quad x=t+1, \\ \textit{если} \ \ x\to 1, \textit{ то } t\to 0\end{matrix}\right|=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-t(t+2)}{\sin(\pi t+\pi)}=\left|\sin(\pi t+\pi)=-\sin(\pi t)\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t(t+2)}{\sin(\pi t)}=\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{t\to 0}(t+2)\cdot\left[\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]^{-1}=\dfrac{2}{\pi}$. Здесь воспользовались первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}=\dfrac{2}{\pi}$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$ (неопределённость вида (1^{∞})).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}=e$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3+2}{10n-3}\right)^{-5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{10n-3}\right)^{-5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{10n-3}\right)^{\frac{10n-3}{2}\cdot\frac{-10n}{10n-3}}=$

$=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{10n-3}\right)^{\frac{10n-3}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-10n}{10n-3}}$. Предел в квадратных скобках равен числу *e*. Предел в показателе степени равен $-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10x}{10x-3}=-1$. **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}=e^{-1}$.

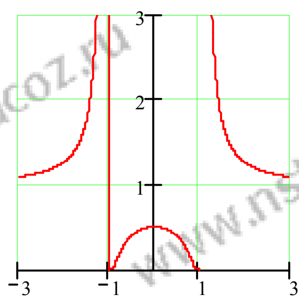
11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{arctg\, 4x^2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся эквивалентными величинами:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{arctg\, 4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{arctg\, 4x^2}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{arctg\, 4x^2}=\left|\begin{matrix}1-\cos x\sim x^2/2 \\ arctg\, 4x^2\sim 4x^2\end{matrix}\right|=$

$=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{4x^2}=\dfrac{3}{8}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{arctg\, 4x^2}=\dfrac{3}{8}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=2^{\frac{1}{x^2-1}}$.

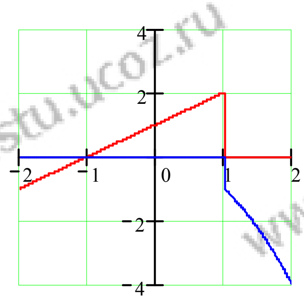


Область определения: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в граничных точках области определения:

$\lim\limits_{x\to -1-0}2^{\frac{1}{x^2-1}}=2^{\infty}=\infty,\ \lim\limits_{x\to -1+0}2^{\frac{1}{x^2-1}}=2^{-\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to 1-0}2^{\frac{1}{x^2-1}}=2^{-\infty}=0,\ \lim\limits_{x\to 1+0}2^{\frac{1}{x^2-1}}=2^{\infty}=\infty$. Таким образом, в точках x= -1 и x=1 функция имеет разрывы второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{1}{x^2-1}} = 1$.

Ответ: В точках x= -1 и x=1 функция имеет разрывы второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.



13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = \begin{cases} x+1, & x \le 1, \\ -x^2, & x > 1. \end{cases}$.

Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$. Ось OX разбивается на два интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точкой разрыва может быть только точка, разделяющая интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}(x+1) = 2, \quad \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(-x^2) = -1$. Таким образом, в точке x=1 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=0 равна -3.

Ответ: В точке x=1 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - \cos x}{x},\ x \ne 0,\ f(0) = 0.$$

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} = \left| \begin{matrix} e^t - 1 \sim t \text{ при } t \to 0, \\ 1 - \cos t \sim t^2/2 \text{ при } t \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^2/2}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $f'(0) = 3/2$.

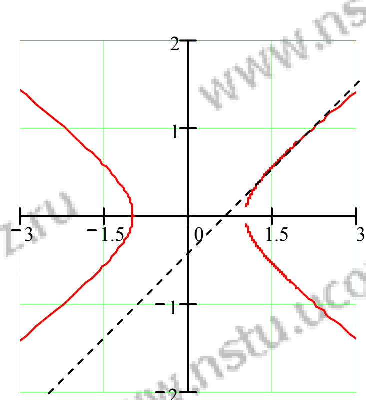
15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = (x^3+1)^{2tg\,x}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = 2tg\,x \ln(x^3+1)$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{\cos^2 x}\ln(x^3+1) + \dfrac{6x^2 tg\,x}{x^3+1}$. Подставляем сюда y:

$y' = \left(\dfrac{2\ln(x^3+1)}{\cos^2 x} + \dfrac{6x^2 tg\,x}{x^3+1}\right) \cdot (x^3+1)^{2tg\,x}$. **Ответ:** $y' = \left(\dfrac{2\ln(x^3+1)}{\cos^2 x} + \dfrac{6x^2 tg\,x}{x^3+1}\right) \cdot (x^3+1)^{2tg\,x}$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases} \quad t = 2.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0) \cdot (x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0)) \cdot (x - x_0)$,



где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты: $x_0 = x(2) = \frac{5}{3}$, $y_0 = y(2) = \frac{2}{3}$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} =$

$= \frac{t^2-1-2t^2}{(t^2-1)^2} \cdot \frac{(t^2-1)^2}{2t(t^2-1)-2t(1+t^2)} = \frac{1+t^2}{4t}$. Тогда $y'_x(2) = \frac{5}{8}$. Далее, $y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{1+t^2}{4t})'}{(\frac{1+t^2}{t^2-1})'} =$

$= \frac{2t\cdot t-(1+t^2)}{4t^2} \cdot \frac{(t^2-1)^2}{2t(t^2-1)-2t(1+t^2)} = -\frac{(t^2-1)^3}{16t^3}$, следовательно, $y''_x(2) = -\frac{27}{128}$. Таким образом, уравнение касательной $y = \frac{2}{3} + \frac{5}{8}\cdot(x - \frac{5}{3})$, уравнение нормали $y = \frac{2}{3} - \frac{8}{5}\cdot(x-\frac{5}{3})$.

Или $5x-8y-3=0$ и $24x+15y-50=0$. **Ответ:** $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $y'_x(x_0) = \frac{5}{8}$,

$y''_x(x_0) = -\frac{27}{128}$, $\begin{cases} 5x-8y-3=0 & \textit{касательная} \\ 24x+15y-50=0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $xe^y + y\sin x = \pi$, принимает в точке $x_0 = \pi$ значение $y_0 = 0$. Найти y'_x, y''_{xx}, $y'_x(x_0)$, $y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $e^y + xe^y y' + y'\sin x + y\cos x = 0$. Из этого равенства находим: $y' = -\frac{e^y + y\cos x}{xe^y + \sin x}$. Находим вторую производную: $y'' = -\frac{(e^y y' + y'\cos x - y\sin x)(xe^y + \sin x) - (e^y + xy'e^y + \cos x)(e^y + y\cos x)}{(xe^y+\sin x)^2}$. Вычислим производные в точке $x_0 = \pi$: $y'(\pi) = -1/\pi$, $y''(\pi) = -1/\pi^2$. **Ответ:** $y' = -\frac{e^y + y\cos x}{xe^y+\sin x}$,

$y'' = -\frac{(e^y y' + y'\cos x - y\sin x)(xe^y + \sin x) - (e^y + xy'e^y + \cos x)(e^y + y\cos x)}{(xe^y+\sin x)^2}$,

$y'(\pi) = -1/\pi$, $y''(\pi) = -1/\pi^2$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt[5]{x^2}$, $x = 1{,}03$.

По определению дифференциала $y(x_0+\Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x-x_0))$, $\Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0)$. В данном случае $x_0 = 1$, $y(x_0) = y(1) = 1$, $y' = 2x^{-3/5}/5$, $y'(x_0) = y'(1) = 2/5$, $\Delta x = 0{,}03$. Тогда $y(1{,}03) \approx 1 + 2\cdot 0{,}03/5 = 1{,}012$. **Ответ:** $y \approx 1{,}012$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\cos x)^{-(\ln(\pi-2x))^{-1}}$.

Это неопределённость вида (0^0). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(\cos x)^{-(\ln(\pi-2x))^{-1}} = \lim\limits_{x\to\pi/2-0} e^{-(\ln(\pi-2x))^{-1}\cdot\ln(\cos x)} = e^{-\lim\limits_{x\to\pi/2-0}[(\ln(\pi-2x))^{-1})\cdot\ln(\cos x)]}$. Найдём предел в показателе степени: $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\pi-2x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\pi/2-0}\frac{(\ln(\cos x))'}{(\ln(\pi-2x))'} = \lim\limits_{x\to\pi/2-0}\frac{(\pi-2x)\sin x}{2\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to\pi/2-0} \dfrac{-2\sin x + (\pi - 2x)\cos x}{2\sin x} = -1$. Следовательно,

$\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\cos x)^{-(\ln(\pi-2x))^{-1}} = e^{-1} = 1/e$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\cos x)^{-(\ln(\pi-2x))^{-1}} = 1/e$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x/10}$.

Это неопределённость вида (∞·0):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{x/10}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^3\right)'}{\left(e^{x/10}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2\cdot 10}{e^{x/10}} = 30\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\cdot 10}{e^{x/10}} = 600\lim_{x\to+\infty} \frac{10}{e^{x/10}} = 0$$

$= \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{3x}{2e^{-x^{-2}}} = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{xe^{-x^{-2}}} = \infty$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x/10} = 0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x - x_0)$: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10,\ x_0 = 2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$
Найдём все производные: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 24x$, $f'''(x) = 24x - 24$, $f^{(4)}(x) = 24$. Тогда $f(2) = -6,\ f'(2) = -16,\ f''(2) = 0,\ f'''(2) = 24,\ f^{(4)}(2) = 24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x) = -6 - 16(x-2) + 4(x-2)^3 + (x-2)^4$.

Ответ: $f(x) = -6 - 16(x-2) + 4(x-2)^3 + (x-2)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x - x_0)^3)$: $f(x) = e^{\sqrt{x}},\ x_0 = 1/4$.

Применяем формулу Тейлора:
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3).$$
Вычисляем последовательно:

$f(1/4) = \sqrt{e},\ f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x}}x^{-1/2},\ f'(1/4) = \sqrt{e},$

$f''(x) = \dfrac{1}{4}e^{\sqrt{x}}x^{-1} - \dfrac{1}{4}e^{\sqrt{x}}x^{-3/2} = \dfrac{1}{4}e^{\sqrt{x}}(x^{-1} - x^{-3/2}),\ f''(1/4) = -\sqrt{e}$

$f'''(x) = \dfrac{1}{8}e^{\sqrt{x}}x^{-1/2}(x^{-1} - x^{-3/2}) - \dfrac{1}{4}e^{\sqrt{x}}(x^{-2} - \dfrac{3}{2}x^{-5/2}),\quad f'''(1/4) = 7\sqrt{e}$.

Ответ: $f(x) = \sqrt{e} + \sqrt{e}(x - \dfrac{1}{4}) - \dfrac{\sqrt{e}}{2}(x - \dfrac{1}{4})^2 + \dfrac{7\sqrt{e}}{6}(x - \dfrac{1}{4})^3 + o((x - \dfrac{1}{4})^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x) = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2,\ x_0 = 1$.

Найдём значения функции и её первых четырёх производных в заданной точке: $f(1) = 1,\ f'(x) = \sin(x-1) + (x-1)\cos(x-1) + 2 - 2x,\ f'(1) = 0,\ f''(x) = 2\cos(x-1) - (x-1)\sin(x-1) - 2,\ f''(1) = 0,\ f'''(x) = -3\sin(x-1) - (x-1)\cos(x-1),\ f'''(1) = 0$, $f^{(4)}(x) = -4\cos(x-1) + (x-1)\sin(x-1),\ f^{(4)}(1) = -4$. По формуле Тейлора $f(x) = 1 - (x-1)^4/6 + o((x-1)^4)$.

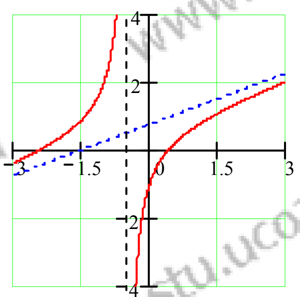
Ответ: В окрестности точки (1, 1) функция ведёт себя как степенная функция четвёртой степени. Точка (1, 1) является точкой максимума.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to-\pi/2}\dfrac{2-\cos^2 x+2\sin x}{(x+\pi/2)^4}$.

Преобразуем числитель: $2-\cos^2 x+2\sin x=1+1-\cos^2 x+2\sin x=1+2\sin x+\sin^2 x=(1+\sin x)^2$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-\pi/2}\dfrac{2-\cos^2 x+2\sin x}{(x+\pi/2)^4}=\lim\limits_{x\to-\pi/2}\dfrac{(1+\sin x)^2}{(x+\pi/2)^4}$. Сделаем замену: $x+\pi/2=t\Rightarrow x=t-\pi/2,\ x\to-\pi/2\Rightarrow t\to 0,\ \sin x=\sin(t-\pi/2)=-\cos t$. Тогда $\lim\limits_{x\to-\pi/2}\dfrac{(1+\sin x)^2}{(x+\pi/2)^4}=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{(1-\cos t)^2}{t^4}$. По формуле Тейлора $\cos t=1-t^2/2+o(t^2)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to t}\dfrac{(1-\cos t)^2}{t^4}=\lim\limits_{x\to t}\dfrac{(1-1+t^2/2+o(t^2))^2}{t^4}=\left[\lim\limits_{x\to t}\dfrac{t^2/2+o(t^2)}{t^2}\right]^2=\left[\dfrac{1}{2}\right]^2=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to-\pi/2}\dfrac{2-\cos^2 x+2\sin x}{(x+\pi/2)^4}=\dfrac{1}{4}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}$.



Область определения функции: $x\in(-\infty,-1/2)\cup(-1/2,\ \infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничной точке области определения: $\lim\limits_{x\to-1/2-0}\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-1/2+0}\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}=\infty$. Отсюда следует, что прямая $x=-1/2$ является вертикальной асимптотой. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}=\infty$. Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$:

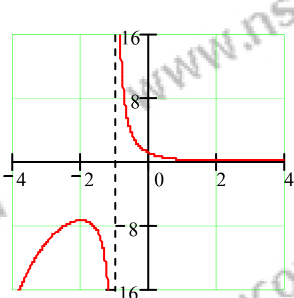
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{(2x+1)\cdot x}=\frac{1}{2},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^2+2x-1}{2x+1}-\frac{x}{2}]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2(x^2+2x-1)-2x^2-x}{2(2x+1)}=\frac{3}{4}.$$ Следовательно, прямая $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$.

2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют. 3. Функция имеет разрыв в точке $x=-1$. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{e^{-x}}{x+1}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{e^{-x}}{x+1}=\infty$. Таким образом, прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.



4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{x+1}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{1}=-\infty$, (по правилу Лопиталя). Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{(x+1)\cdot x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{2}=\infty,$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{(x+1)\cdot x} = 0$. Следовательно, прямая $y = 0$ является правосторонней горизонтальной асимптотой. Других асимптот нет.

5. Первая производная $y' = [\dfrac{e^{-x}}{x+1}]' = -(x+1)^{-2}\cdot e^{-x} - (x+1)^{-1}e^{-x} = -\dfrac{(x+2)e^{-x}}{(x+1)^2}$. Производная обращается в нуль в точке $x = -2$. Слева от точки производная положительна, справа отрицательна. Следовательно, в точке $x = -2$ имеет место максимум функции, причём $f(-2) = -e^2$. В точке $x = -1$ производная имеет разрыв. В интервале $(-\infty, -2)$ функция монотонно возрастает, в интервале $(-2, -1)$ функция монотонно убывает, в интервале $(-1, \infty)$ функция монотонно убывает.

6. Вторая производная:

$y'' = \left(-\dfrac{(x+2)e^{-x}}{(x+1)^2}\right)' = -\dfrac{[e^{-x} - (x+2)e^{-x}](x+1)^2 - 2(x+1)(x+2)e^{-x}}{(x+1)^4} = \dfrac{e^{-x}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$. Знак второй производной определяется знаменателем (числитель всегда положительный). Если $x < -1$, то производная отрицательна и, следовательно, интервал $(-\infty, -1$ - интервал выпуклости графика функции. В интервале $(-1, \infty)$ производная положительна, следовательно, это интервал вогнутости графика функции. Точек перегиба нет. 7. График функции не пересекает осей координат.

Ответ: График функции представлен на рисунке, экстремум – максимум – в точке $(-2, -e^{-2})$. Вертикальная асимптота $x = -1$, правосторонняя горизонтальная асимптота $y = 0$.