Вариант 3

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$\text{а)}\quad \operatorname{th}(3-\frac{\pi}{2}i);\qquad \text{б)}\quad \operatorname{Ln}(1+i)$$

<u>Решение</u>. а). Выразим тангенс через синус и косинус: $\operatorname{th}(3-\frac{\pi}{2}i)=\frac{\operatorname{sh}(3-\pi i/2)}{\operatorname{ch}(3-\pi i/2)}$. Применим формулы для синуса разности и косинуса разности. Тогда $\operatorname{th}(3-\frac{\pi}{2}i)=\frac{\operatorname{sh}(3)\operatorname{ch}(\pi i/2)-\operatorname{ch}(3)\operatorname{sh}(\pi i/2)}{\operatorname{ch}(3)\operatorname{ch}(\pi i/2)-\operatorname{sh}(3)\operatorname{sh}(\pi i/2)}$. Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями: $\operatorname{ch}(\pi i/2)=\cos(\pi/2)$; $\operatorname{sh}(\pi i/2)=$ $= i\cdot\sin(\pi/2)$. Получим: $\operatorname{th}(3-\frac{\pi}{2}i)=\frac{\operatorname{sh}(3)\cos(\pi/2)-i\cdot\operatorname{ch}(3)\sin(\pi/2)}{\operatorname{ch}(3)\cos(\pi/2)-i\cdot\operatorname{sh}(3)\sin(\pi/2)}=\frac{\operatorname{ch}(3)}{\operatorname{sh}(3)}=\operatorname{cth}(3)$.

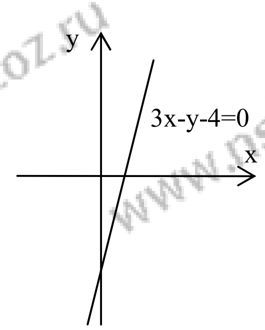
б). Воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}(z)=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)$. В данном случае $z=1+i$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$ (первая четверть).

Таким образом $\operatorname{Ln}(1+i)=\ln(\sqrt{2})+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=\ln(\sqrt{2})+i\pi(2k+\frac{1}{4})$.

<u>Ответ</u>. а) $\operatorname{th}(3-\frac{\pi}{2}i)=\operatorname{cth}(3)$; б) $\operatorname{Ln}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\pi(2k+\frac{1}{4})$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z-i|=|z-3|.$$



<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $|x+i(y-1)|=|x-3+iy|$.

Или $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$. Возведём обе части в квадрат. Получим: $x^2+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2$. Или $6x-2y-8=0$. Уравнение можно поделить на 2, получим: 3x-y-4=0.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет уравнение прямой $3x-y-4=0$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\sin z-\cos z=1$.

<u>Решение</u>. Перейдём к гиперболическим функциям: $\sin z=-i\cdot\operatorname{sh}(iz)$, $\quad\cos z=\operatorname{ch}(iz)$.

Получим уравнение $-i\cdot\operatorname{sh}(iz)-\operatorname{ch}(iz)=1$. Или $-i\cdot\frac{1}{2}(e^{iz}-e^{-iz})-\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=1$. Умножим уравнение на $2e^{iz}$. Тогда уравнение примет вид: $-(1+i)e^{2iz}-(1-i)=2e^{iz}$ Введём обозначение $V=e^{iz}$. Найдём корни квадратного уравнения $(1+i)V^2+2V+(1-i)=0$:

$V=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1+i)(1-i)}}{2(1+i)}=\frac{-1\pm i}{(1+i)}$. Следовательно, $V_1=\frac{-1+i}{(1+i)}=\frac{-(1-i)^2}{(1^2-i^2)}=i$, $\quad V_2=-1$.

Таким образом, имеем два корня: $V_1=i$, $\quad V_2=-1$.

Найдём модули и аргументы этих чисел:

$$|V_1|=1,\quad \varphi_1=\arg V_1=\frac{\pi}{2},\quad |V_2|=1,\quad \varphi_2=\arg V_2=\pi.$$

Так как $V=e^{iz}$, то iz=LnV или z=-i·LnV. Далее воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}V=\ln|V|+i(\varphi+2k\pi)$. Получим: $z_1=-i\cdot\operatorname{Ln}V_1=-i[\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Аналогично, $z_2=-i\cdot\operatorname{Ln}V_2=-i[\ln 1+i(\pi+2k\pi)]=(2k+1)\pi$.

<u>Ответ</u>. $z_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\quad z_2=(2k+1)\pi$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$

Решение. Рассмотрим правую часть равенства:

$$\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 = \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} = \frac{1}{4}(e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} +$$

$$+ e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2} + e^{z_1}e^{z_2} - e^{z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}) = \frac{1}{4} \cdot 2(e^{z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}) =$$

$= \frac{1}{2}(e^{(z_1+z_2)} + e^{-(z_1+z_2)}) = \operatorname{ch}(z_1 + z_2)$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной мнимой части её:*

$$v = \operatorname{Im} f(z) = \frac{x}{Ax^2 + y^2}, \text{ *если* } f(i)=0.$$

Решение. Чтобы функция v(x,y) бала мнимой частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. лапласиан Δv был бы равен нулю: $\Delta v=0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от v по *x* и по *y*:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Ax^2 + y^2 - 2Ax^2}{(Ax^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - Ax^2}{(Ax^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{-2Ax(Ax^2 + y^2)^2 - 4Ax(Ax^2 + y^2)(y^2 - Ax^2)}{(Ax^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x[A(Ax^2 + y^2) + 2A(y^2 - Ax^2)]}{(Ax^2 + y^2)^3}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2yx}{(Ax^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-2x(Ax^2 + y^2)^2 + 8y^2x(Ax^2 + y^2)}{(Ax^2 + y^2)^4} = \frac{-2x[(Ax^2 + y^2) - 4y^2]}{(Ax^2 + y^2)^3}.$$

Чтобы лапласиан Δv был равен нулю, нужно положить A=1. Таким образом, функция $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, является гармонической. Восстановим действительную часть u(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Из первого условия получаем: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$. Тогда $u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y)$, или

$u(x, y) = -\int \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + \varphi(y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \varphi(y)$. Производная по *y* от этого выражения равна $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(y)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)}$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(y) = 0$.

Или $\varphi(y) = C$. Таким образом, $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + C$. Тогда $f(z) = \frac{y}{x^2 + y^2} + C + i \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Перейдём к переменной z: $f(z) = \frac{y + ix}{x^2 + y^2} + C = \frac{i(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} + C = \frac{i}{z} + C$.

Воспользуемся дополнительным условием f(i)=0. В данном случае f(0)=1+C. Т.е. C=-1.

Ответ. $f(z) = \frac{i}{z} - 1 = \frac{y}{x^2 + y^2} - 1 + i \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C (1+2\bar{z})\,dz; \qquad C:\ x=y^2,\ z_1=0,\ z_2=1-i.$$

<u>Решение</u>. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$. В данном случае f(z)=1+2(x-iy) или

$f(z)=1+2x-2iy.$ Значит $\int_C f(z)dz = \int_C (1+2x)dx + 2ydy + i\int_C (1+2x)dy - 2ydx$. Примем y за параметр. Тогда $x=y^2$, dx=2ydy. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение y=0, конечной $z_2=1-i$ – значение y=-1. Следовательно,

$$\int_C (1+2\bar{z})\,dz = 2\int_0^{-1}(1+2y^2)ydy + 2\int_0^{-1} ydy + i\int_0^{-1}(1+2y^2)dy - 4i\int_0^{-1} y^2dy = 2[\frac{y^2}{2}+\frac{2y^4}{4}+\frac{y^2}{2}]\Big|_0^{-1} +$$

$$+ i(y+\frac{2y^3}{3}-\frac{4y^3}{3})\Big|_0^{-1} = 3-\frac{i}{3}.$$

<u>Ответ</u>. $\int_C (1+2\bar{z})\,dz = 3-\frac{i}{3}$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_{-1}^{i}(z+1)\cdot\cos z\,dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{-1}^{i}(z+1)\cdot\cos z\,dz = \begin{vmatrix} u=z+1 & du=dz \\ dv=\cos z\,dz & v=\sin z \end{vmatrix} = (z+1)\cdot\sin z\Big|_{-1}^{i} - \int_{-1}^{i}\sin z\,dz = (i+1)\cdot\sin i + \cos z\Big|_{-1}^{i} =$$

$$= (i+1)\cdot\sin i + \cos i - \cos(-1) = i\sin i + \sin i + \cos i - \cos 1.$$

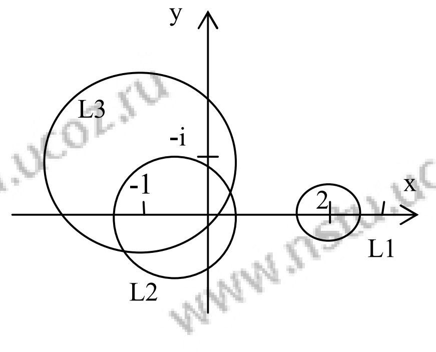
Перейдём к тригонометрическим функциям: $\sin i = i\mathrm{sh}1, \quad \cos i = \mathrm{ch}1$. Получим:

$$\int_{-1}^{i}(z+1)\cdot\cos z\,dz = \mathrm{ch}1 - \mathrm{sh}1 - \cos 1 + i\mathrm{sh}1.$$

<u>Ответ</u>. $\int_{-1}^{i}(z+1)\cdot\cos z\,dz = \mathrm{ch}1 - \mathrm{sh}1 - \cos 1 + i\mathrm{sh}1$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int_L \frac{e^{-z^2}dz}{(1-z^4)(z-2)}$, 1) $L_1: |z-2| = \frac{1}{2}$, 2) $L_2: \left|z+\frac{1}{2}\right| = 1$, 3) $L_3: |z+1-i| = \sqrt{2}$.

<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=2,



z=-1, z=1, z=-i и z=i. В круге $|z-2| \le \frac{1}{2}$ есть одна особая точка z=2. Тогда по интегральной формуле Коши

$$I_1 = \int_{L_1}\frac{e^{-z^2}dz}{(1-z^4)(z-2)} = \int_{L_1}\frac{\frac{e^{-z^2}}{(1-z^4)}dz}{(z-2)} =$$

$$= 2\pi i\cdot\left[\frac{e^{-z^2}}{(1-z^4)}\right]_{z=2} = -\frac{2\pi e^{-4}i}{15}.$$

2). Внутри области $\left|z+\frac{1}{2}\right| \le 1$ также расположена одна особая точка z=-1. Тогда по интегральной формуле Коши :

$$I_2 = \int\limits_{L_2} \frac{e^{-z^2}dz}{(1-z^4)(z-2)} = \int\limits_{L_2} \frac{\frac{e^{-z^2}}{(1-z)(1+z^2)(z-2)}dz}{(z+1)} = 2\pi i\cdot\left[\frac{e^{-z^2}}{(1-z)(1+z^2)(z-2)}\right]_{z=-1} = -\frac{\pi i e^{-1}}{6}.$$

3) Внутри круга $\left|z+1-i \le \sqrt{2}\right|$ находится две особых точки: z=-1 и z=i. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$I_3 = \int\limits_{L_3} \frac{e^{-z^2}dz}{(1-z^4)(z-2)} = \int\limits_{l_1} \frac{e^{-z^2}dz}{(1-z^4)(z-2)} = \int\limits_{l_2} \frac{e^{-z^2}dz}{(1-z^4)(z-2)}$, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=-1, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=i. Первый интеграл в этой сумме совпадает с I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_2} \frac{e^{-z^2}dz}{(1-z^4)(z-2)} = \int\limits_{l_2} \frac{\frac{e^{-z^2}}{(1-z^2)(1+i)(z-2)}dz}{(1-i)} = 2\pi i\cdot\left[\frac{e^{-z^2}}{(1-z^2)(1+i)(z-2)}\right]_{z=i} = \frac{\pi e}{2(i-2)} = -\frac{\pi e(i+2)}{10}.$$

Тогда $I_3 = -\frac{\pi i e^{-1}}{6} - \frac{\pi e(i+2)}{10} = -\frac{\pi i}{30e}\left(5+3e^2-6ie^2\right)$.

<u>Ответ</u>. $I_1 = -\frac{2\pi i}{15e^4}$, $I_2 = -\frac{\pi i}{6e}$, $I_3 = -\frac{\pi i}{30e}\left(5+3e^2-6ie^2\right)$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-3}{z^2-2z-15}$, 1) $3<|z|<5$ 2) $|z|>5$. 3) $8<|z+3|$.

<u>Решение</u>. Корнями уравнения $z^2-2z-15=0$ являются числа $z_1=5$ и $z_2=-3$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-3}{z^2-2z-15} = \frac{A}{z-5} + \frac{B}{z+3} = \frac{A(z+3)+B(z-5)}{(z-5)(z+3)}$. Или $A(z+3)+B(z-5) = z-3$. При z=5 получим A=1/4. Если положить z=-3, то получим B=3/4.

Следовательно, $\frac{z-3}{z^2-2z-15} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-5} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+3}$. 1). В кольце $3<|z|<5$ имеем $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-3}{z^2-2z-15} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5(1-\frac{z}{5})} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/5, во второй дроби q=-3/z. Следовательно,

$$\frac{z-3}{z^2-2z-15}=\frac{3}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}.$$ 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-3}{z^2-2z-15}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{5}{z})}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{z^n}+\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{z^n}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+(-1)^{n-1}3^n}{z^n}.$$

3) $8<|z+3|;\ \frac{8}{|z+3|}<1;$

$$\frac{z-3}{z^2-2z-15}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z+3)(1-\frac{8}{z+3})}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+3}=\frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{8^n}{(z+3)^{n+1}}+\frac{3}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{z-3}{z^2-2z-15}=\frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{8^n}{(z+3)^{n+1}}+\frac{3}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

<u>Ответ</u>. 1). $\frac{z-3}{z^2-2z-15}=\frac{3}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}.$ в кольце $3<|z|<5$.

2). $\frac{z-3}{z^2-2z-15}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+(-1)^{n-1}3^n}{z^n}$ в кольце $|z|>5$.

3) $\frac{z-3}{z^2-2z-15}=\frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{8^n}{(z+3)^{n+1}}+\frac{3}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$ в кольце 8<|z+3|.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{\text{sh}(z+i)\pi}{(z^2+1)^2}dz$ **11.** $\int\limits_{|z|=2}z^2\,\text{sh}\frac{1}{z-1}dz$

<u>Решение</u>. **10.**. Значения z_1=i и z_2=-i являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$$\mathop{\text{Res}}_{z_1}\frac{\text{sh}(z+i)\pi}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[(z-i)^2\frac{\text{sh}(z+i)\pi}{(z-i)^2(z+i)^2}]=\lim_{z\to i}\frac{\pi\text{ch}(z+i)\pi\cdot(z+i)^2-\text{sh}(z+i)\pi\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}=$$

$$=\frac{-4\pi\text{ch}(2\pi i)+4i\cdot\text{sh}(2\pi i)}{16}=\frac{-4\pi\cos(2\pi)-4\cdot\sin(2\pi)}{16}=-\frac{\pi}{4}$$ (так как ch(iz)=cos(z), sh(iz)=isin(z)).

$$\mathop{\text{Res}}_{z_2}\frac{\text{sh}(z+i)\pi}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}[(z+i)^2\frac{\text{sh}(z+i)\pi}{(z-i)^2(z+i)^2}]=\lim_{z\to -i}\frac{\pi\text{ch}(z+i)\pi\cdot(z-i)^2-\text{sh}(z+i)\pi\cdot 2(z-i)}{(z-i)^4}=$$

$=\frac{-4\pi\text{ch}(0)+4i\cdot\text{sh}(0)}{16}=-\frac{\pi}{4}$. Здесь учтено, что ch(0)=1, а sh(0)=0. Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\text{sh}(z+i)\pi}{(z^2+1)^2}dz=2\pi i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=-\pi^2 i$$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=1. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции sh(w) по степеням w:

$\text{sh}(w)=w+\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\frac{w^7}{7!}+\ldots$ Полагая $w=\frac{1}{z-1}$, найдём разложение данной функции:

$$z^2\cdot\text{sh}\frac{1}{z-1}=z^2(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{6(z-1)^3}+\frac{1}{120z^5}+\ldots)=\frac{z^2}{z-1}+\frac{z^2}{6(z-1)^3}+\frac{z^2}{120(z-1)^5}+\ldots=\frac{z^2-1+1}{z-1}+$$

$$+\frac{z^2-2z+1+2z-1}{6(z-1)^3}+\ldots=z^2+1+\frac{1}{z-1}(1+\frac{1}{6})+\frac{2z-1}{6(z-1)^3}+\ldots$$

Последующие члены ряда не содержат степеней $(z\text{-}1)^{-1}$. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z\text{-}1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_1[z^2\operatorname{sh}\frac{1}{z-1}]=\frac{7}{6}$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=2} z^2\operatorname{sh}\frac{1}{z-1}dz=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_1[z^2\operatorname{sh}\frac{1}{z-1}]=2\pi i\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{3}\pi i.$$

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{sh}(z+i)\pi}{(z^2+1)^2}dz=-\pi^2 i$. 11. $\int\limits_{|z|=2} z^2\operatorname{sh}\frac{1}{z-1}dz==\frac{7}{3}\pi i.$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^2}{(x^4+25x^2+144)}dx.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\frac{z^2}{(z^4+25z^2+144)}$, решая биквадратное уравнение: $(z^2)^2+25(z^2)+144=0$, $z^2=-\frac{25}{2}\pm\sqrt{\frac{625}{4}-\frac{576}{4}}=-\frac{25}{2}\pm\frac{7}{2}$. Следовательно, $z_{1,2}=\pm 3i,\quad z_{3,4}=\pm 4i$. В данном случае в верхней полуплоскости расположены два полюса $z=3i$ и $z=4i$ функции $f(z)=\frac{z^2}{(z^4+25z^2+144)}=\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+16)}$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=2\pi i(\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+16)}+\operatorname*{Res}_{4i}\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+16)}).$

$$\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+16)}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)z^2}{(z+3i)(z-3i)(z^2+16)}=\frac{-9}{6i(9i^2+16)}=\frac{-9}{6i\cdot 7}=\frac{3i}{14}.$$

$$\operatorname*{Res}_{4i}\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+16)}=\lim_{z\to 4i}\frac{(z-4i)z^2}{(z+4i)(z-4i)(z^2+9)}=\frac{-16}{8i(16i^2+9)}=\frac{-16}{-8i\cdot 7}=-\frac{2i}{7}.$$

Следовательно. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=\frac{2\pi i}{2}(\frac{3i}{14}-\frac{2i}{7})=\frac{\pi}{14}.$

Ответ. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=\frac{\pi}{14}.$

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, где C – верхняя полуокружность $|z|=1$, $z_1=1$, $z_2=-1$, $\sqrt[4]{1}=-1$.

Решение. Рассмотрим функцию $\sqrt[4]{z}=|z|^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4})$ Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=1 функция будет принимать заданное значение. С одной стороны $\sqrt[4]{1}=|1|^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4})$, так как 1=cos(0)+isin(0). С другой стороны $\sqrt[4]{1}=-1=(\cos\pi+i\sin\pi)$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=2. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt[4]{z} = |z|^{\frac{1}{4}}(\cos(\frac{\varphi}{4} + \pi) + i\sin(\frac{\varphi}{4} + \pi))$.

Таким образом,

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}} = 4\sqrt[4]{z}\Big|_1^{-1} = 4 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \pi) - (\cos(\pi) + i\sin(\pi))) = 4(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}) = 4 - 2\sqrt{2}(1 + i).$$

<u>Ответ</u>. $\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}} = 4 - 2\sqrt{2}(1 + i)$.