Вариант 7

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

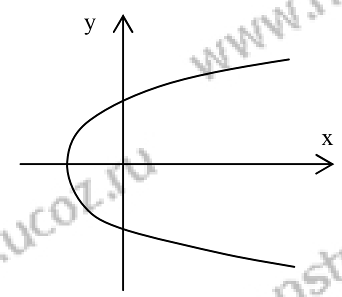
$$\text{а)}\ \operatorname{ch}(1+2i); \qquad \text{б)}\ \ln(-1-i)$$

<u>Решение</u>. а). Воспользуемся формулой связи между тригонометрическим косинусом и гиперболическим косинусом: ch(z)= cos(iz). Получим ch(1+2i)=cos(i+2i^2)= cos(i-2). По формуле тригонометрии cos(i-2)=cos(i)·cos2+sin(i)·sin2. Снова воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:
cos(i)=ch1; sin(i)= ish1. Получим ch(1+2i)=cos2·ch1+ i·sin2·sh1.
б). Воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае $z = -1 - i$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{-1}{-1} = \dfrac{5\pi}{4}$ (третья четверть). Таким образом $\operatorname{Ln}(-1-i) = \ln(\sqrt{2}) + i(\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi) = \ln(\sqrt{2}) + i\pi(2k + \dfrac{5}{4})$.

<u>Ответ</u>. а) ch(1+2i)=cos2·ch1+ i·sin2·sh1; б) $\operatorname{Ln}(-1-i) = \ln\sqrt{2} + i\pi(2k + \dfrac{5}{4})$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z| < \operatorname{Re} z + 1.$$



<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $|x + iy)| < x + 1$.
Или $\sqrt{x^2 + y^2} < x + 1$. Возведём обе части в квадрат.
Получим: $x^2 + y^2 < x^2 + 2x + 1$. Или $y^2 < 2x + 1$.
<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет область, расположенную внутри параболы $y^2 = 2x + 1$ с вершиной в точке (-1/2; 0)

Задача 3. *Решить уравнение*: $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$.
<u>Решение</u>. Обозначим V=e^z и решим квадратное уравнение V^2+2V-3=0:
$V_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$. Таким образом, имеем два корня: $V_1 = 1, \quad V_2 = -3$.
Найдём модули и аргументы этих чисел: $|V_1| = 1, \quad \arg V_1 = 0, \quad |V_2| = 3, \quad \arg V_2 = \pi$.
Так как V=e^z, то z=LnV. Далее воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}V = \ln|V| + i(\varphi + 2k\pi)$. Получим:
$z_1 = \operatorname{Ln}V_1 = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i, \quad z_2 = \operatorname{Ln}V_2 = \ln 3 + i(\pi + 2k\pi)]$.
<u>Ответ</u>. $z_1 = 2k\pi i, \quad z_2 = \ln 3 + \pi i(2k+1)$.

Задача 4. *Доказать тождество.*
$\operatorname{sh}(z_1 - z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$
<u>Решение</u>. Рассмотрим правую часть равенства:

$$\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2 = \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} - \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \cdot \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} = \frac{1}{4}(e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} -$$

$$- e^{-z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2} - e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}) = \frac{1}{4} \cdot 2(e^{z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{z_2}) =$$

$= \dfrac{1}{2}(e^{(z_1 - z_2)} - e^{-(z_1 + z_2)}) = \operatorname{sh}(z_1 - z_2)$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\operatorname{Re} f(z) = u = x^2 + Ay^2 + x, \textit{ если } f(1+i)=1+i.$$

<u>Решение</u>. Чтобы функция u(x,y) бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: Δu=0,

$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2Ay$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2A$.

Чтобы лапласиан Δu был равен нулю, нужно положить A=-1. Таким образом, функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ является гармонической. Восстановим мнимую часть v(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x+1$. Тогда $v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + \varphi(x)$, или $v(x,y) = \int (2x+1)dy + \varphi(x) = 2xy + y + \varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$.

Приравнивая эти выражения, получим: $2y + \varphi'(x) = 2y$. Отсюда $\varphi'(x) = 0$. Или $\varphi(x) = C$.

Таким образом, $v(x,y) = 2xy + y + C$. Тогда $f(z) = x^2 - y^2 + x + i\cdot(2xy + y + C)$.

Перейдём к переменной z:

$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy + iC = (x+iy)^2 + (x+iy) + iC = z^2 + z + iC$.

Воспользуемся дополнительным условием f(1+i)=1+i. В данном случае $f(1+i)=(1+i)^2+(1+i)+iC=2i+1+i+iC=i+1$. Т.е. C=-2.

<u>Ответ</u>. $f(z) = x^2 - y^2 + x + i\cdot(2xy + y - 2) = z^2 + z - 2i$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C (1-\bar{z})\,dz; \qquad C - \text{прямая}, \quad z_1 = 0,\ z_2 = -2-4i.$$

<u>Решение</u>. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$. В данном случае f(z)=[1-(x-iy)] или $f(z) = 1 - x + yi$. Значит $\int_C f(z)dz = \int_C (1-x)dx - ydy + i\int_C (1-x)dy + ydx$. Примем x за параметр.

Составим уравнение прямой , по которой проводится интегрирование: $\frac{y}{-4} = \frac{x}{-2}$, т.е. $y = 2x$, $dy = 2dx$. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение x=0, конечной $z_2=-2-4i$ – значение x=-2.

Следовательно,

$$\int_C (1-\bar{z})\,dz = \int_0^{-2}[(1-x)-4x]dx + i\int_0^{-2}[2(1-x)+2x)]dx = [x - \frac{5x^2}{2}]\Big|_0^{-2} + i2x\Big|_0^{-2} = -12-4i.$$

<u>Ответ</u>. $\int_C (1-\bar{z})\,dz = -12-4i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_1^i (z-1)\cdot e^z\,dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^i (z-1)\cdot e^z\,dz = \begin{vmatrix} u = z-1 & du = dz \\ dv = e^z\,dz & v = e^z \end{vmatrix} = (z-1)\cdot e^z\Big|_1^i - \int_1^i e^z\,dz = (i-1)\cdot e^i - e^z\Big|_1^i = (i-1)\cdot e^i - e^i + e.$$

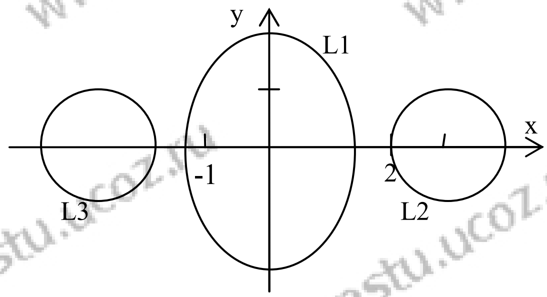
Перейдём к тригонометрическим функциям: $e^i = \cos 1 + i\sin 1$. Получим:

$$\int_1^i (z-1)\cdot e^i\,dz = (i-2)(\cos 1 + i\sin 1) + e = e - \sin 1 - 2\cos 1 + i(\cos 1 - 2\sin 1).$$

Ответ. $\int_1^i (z-1)\cdot e^i\,dz = e - \sin 1 - 2\cos 1 + i(\cos 1 - 2\sin 1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int_L \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^2(z+\pi)}$, 1) $L_1: \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$, 2) $L_2: |z-3|=1.$, 3) $L_3: |z+3|=1$.

Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек $z=-\pi$, и



$z=\pi$. В эллипсе $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\le 1$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно, $I_1 = \int_{L_1} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^2(z+\pi)} = 0$. 2). В круге $|z-3|\le 1$ есть одна особая точка: $z=\pi$. Тогда по интегральной формуле Коши

$$\int_{L_2} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^2(z+\pi)} = \int_{L_2} \frac{\frac{e^{iz}}{(z+\pi)}dz}{(z-\pi)^2} = 2\pi i\cdot\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz}}{(z+\pi)}\right]_{z=\pi} = 2\pi i\cdot\left[\frac{ie^{iz}(z+\pi)-e^{iz}}{(z+\pi)^2}\right]_{z=\pi} =$$

$$= \frac{ie^{i\pi}}{2\pi}\cdot(2\pi i - 1) = \frac{i}{2\pi}\cdot(2\pi i-1)(\cos\pi + i\sin\pi) = 1+\frac{i}{2\pi}.$$

3). Внутри области $|z+3|\le 1$ расположена одна особая точка $z=-\pi$. Тогда по интегральной формуле Коши

$$\int_{L_3} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^2(z+\pi)} = \int_{L_3} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^2}dz}{(z+\pi)} = 2\pi i\cdot\left[\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^2}\right]_{z=-\pi} = \frac{i}{2\pi}\cdot e^{-i\pi} = \frac{i}{2\pi}\cdot(\cos\pi - i\sin\pi) = -\frac{i}{2\pi}.$$

Ответ. $I_1 = 0,\quad I_2 = 1+\frac{i}{2\pi},\quad I_3 = -\frac{i}{2\pi}$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-1}{z^2-7z+12}$, 1) $3<|z|<4$ 2) $|z|>4$. 3) $0<|z-4|<1$.

Решение. Корнями уравнения z^2-7z+10=0 являются числа $z_1=4$ и $z_2=3$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-1}{z^2-7z+12} = \frac{A}{z-4}+\frac{B}{z-3} = \frac{A(z-3)+B(z-4)}{(z-4)(z-3)}$. Или

$A(z-3)+B(z-4) = z-1$. При z=4 получим A=3. Если положить z=3, то получим B=2.

Следовательно, $\frac{z-1}{z^2-7z+12} = \frac{3}{z-5}-\frac{2}{z-2}$. 1). В кольце $3<|z|<4$ имеем $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{4}<1$.

Тогда дробь можно представить следующим образом: $\frac{z-1}{z^2-7z+12} = -\frac{3}{4(1-\frac{z}{4})} - \frac{2}{z(1-\frac{3}{z})}$.

Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/4, во второй дроби q=3/z.

Следовательно,

$\frac{z-1}{z^2-7z+12}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>4$ выполняются неравенства $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{4}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-1}{z^2-7z+12}=\frac{3}{z(1-\frac{4}{z})}-\frac{2}{z(1-\frac{3}{z})}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}}{z^n}.$$

3) $0<|z-4|<1\Rightarrow\frac{|z-4|}{1}<1;$

$$\frac{z-1}{z^2-7z+12}=\frac{3}{z-4}-\frac{2}{z-3}=\frac{3}{z-4}+\frac{2}{1-(z-4)}=3\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}+2\sum_1^{\infty}(z-4)^n;$$

$$\frac{z-1}{z^2-7z+12}=3\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}+2\sum_1^{\infty}(z-4)^n;$$

Ответ. 1). $\frac{z-1}{z^2-7z+12}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$ в кольце $3<|z|<4$.

2). $\frac{z-1}{z^2-7z+12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>4$.

3) $\frac{z-1}{z^2-7z+12}=3\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}+2\sum_1^{\infty}(z-4)^n$; в кольце 0<|z-4|<1.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z^2+4)}dz$ **11.** $\int\limits_{|z|=2}\frac{z}{z+1}\cos\frac{2}{z+1}dz$

Решение. **10.**. .Найдём корни знаменателя: z_1=-2, z_2=2i, z_3=-2i. Значения z_2=2i и z_3=-2i являются простыми полюсами подынтегральной функции, а значение z_1=-2 - полюсом кратности 2. Тогда $\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z^2+4)}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-2}\frac{d}{dz}[(z+2)^2\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z^2+4)}]=$

$$=\lim_{z\to-2}\frac{i\pi e^{i\pi z}(z^2+4)-2ze^{i\pi z}}{(z^2+4)^2}=\frac{e^{-2i\pi}(8i\pi+4)}{64}=\frac{1}{16}e^{-2i\pi}(1+2\pi i)=\frac{1+2\pi i}{16}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2}\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z^2+4)}=\lim_{z\to 2i}[(z-2i)\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z-2i)(z+2i)}]=\lim_{z\to 2i}[\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z+2i)}]=-\frac{e^{2\pi}}{32}$$

$$\operatorname*{Res}_{z_3}\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z^2+4)}=\lim_{z\to -2i}[(z+2i)\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z-2i)(z+2i)}]=\lim_{z\to -2i}[\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z-2i)}]=-\frac{e^{-2\pi}}{32}$$

Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z^2+4)}dz=2\pi i\cdot(\frac{1+2\pi i}{16}-\frac{1}{32}(e^{2\pi}+e^{-2\pi}))=-\frac{\pi}{8}(2\pi-i+i\cdot ch(2\pi)).$$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=-1. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции cos(w) по степеням w:

$\cos(w)=1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\frac{w^6}{6!}+...$ Полагая $w=\frac{2}{z+1}$, получим:

www.nstu.ucoz.ru

$$\frac{z}{z+1}\cos\frac{2}{z+1}=(1-\frac{1}{z+1})\left[1-\frac{2^2}{2!(z+1)^2}+\frac{2^4}{4!(z+1)^4}-\frac{2^6}{6!(z+1)^6}+...\right]=1-\frac{1}{z+1}+\frac{2}{(z+1)^2}+...$$

Коэффициентом при $(z+1)^{-1}$ в разложении функции будет число -1. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z+1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{-1}[\frac{z}{z+1}\cos\frac{2}{z+1}]=-1$.

Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z}{z+1}\cos\frac{2}{z+1}dz=2\pi i\cdot(-1)=-2\pi i.$$

<u>Ответ</u>. 10. $\int\limits_{|z|=3}\frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^2(z^2+4)}dz=-\frac{\pi}{8}(2\pi-i+i\cdot ch(2\pi))$. 11. $\int\limits_{|z|=2}\frac{z}{z+1}\cos\frac{2}{z+1}dz=-2\pi i$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)}dx.$$

<u>Решение</u>. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}$. Приравнивая знаменатель к нулю, получим: $z_{1,2}=\pm 2i, \quad z_{3,4}=\pm 3i$. В данном случае в верхней полуплоскости расположены два полюса z=2i и z=3i функции $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)}dx=2\pi i(\operatorname*{Res}_{2i}\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}+\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)})$.

$$\operatorname*{Res}_{2i}\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}=\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)z^2}{(z+2i)(z-2i)(z^2+9)}=\frac{-4}{4i(4i^2+9)}=\frac{-4}{4i\cdot 5}=\frac{-1}{5i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}=\lim_{\substack{z\to 3i\\ i}}\frac{(z-3i)z^2}{(z+3i)(z-3i)(z^2+4)}=\frac{-9}{6i(9i^2+4)}=\frac{-9}{-6i\cdot 5}=\frac{3}{10i}.$$

Следовательно. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)}dx==2\pi i\cdot(-\frac{1}{5i}+\frac{3}{10i})=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$.

<u>Ответ</u>. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)}dx=\frac{\pi}{5}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C z\ln z dz$, где C – часть окружности $|z|=1, \ (x,y\geq 0), \quad z_1=1, \quad z_2=i, \quad \ln 1=0$.

<u>Решение</u>. Рассмотрим функцию $nz = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=1 величина lnz будет принимать заданное значение. С одной стороны $Ln1=\ln 1+i(0+2k\pi)$. С другой стороны $\ln 1=0$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=0. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\ln z=\ln|z|+i\varphi$.

Таким образом,

$$\int\limits_C z\ln z\,dz = \begin{vmatrix} u=\ln z & du=\dfrac{dz}{z} \\ dv=zdz & v=\dfrac{z^2}{2}\end{vmatrix} = \frac{z^2}{2}\ln z\Big|_1^i - \frac{1}{2}\int\limits_C zdz = \frac{z^2}{4}(2\ln z-1)\Big|_1^i = -\frac{1}{4}(2\ln i - 1)+\frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{1}{4}(2(\ln|i| + \frac{i\pi}{2}) - 1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\pi i}{4}\ .$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C z\ln zdz = \frac{1}{2} - \frac{\pi i}{4}$.