Вариант 9

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\cos(3-2i)$; б) $\ln(1+i)^i$

<u>Решение</u>. а). По формуле тригонометрии cos(3-2i)=cos3·cos(2i)+sin3·sin(2i). Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями: cos(2i)=ch2; sin(2i)= ish2. Получим cos(3-2i)=cos3·ch2+ i·sin3·sh2.

б). Воспользуемся формулой $(1+i)^i = e^{iLn(1+i)}$. Получим:

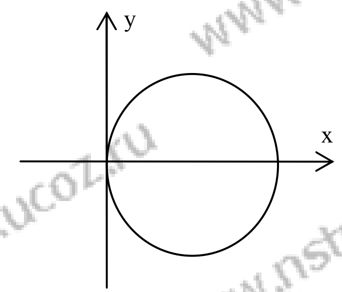
$$iLn(1+i) = i\cdot[\ln|1+i| + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)] = i\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4}+2k\pi).$$

Тогда $Ln((1+i)^i) = Ln\left(e^{i\ln\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\right) = \ln\left|e^{i\ln\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\right| + 2\pi ni = i\ln\sqrt{2} - \pi(\frac{1}{4}+2k) + 2\pi ni$.

<u>Ответ</u>. а) cos(3-2i)=cos3·ch2+isin3·sh2; б) $Ln((1+i)^i) = i\ln\sqrt{2} - \pi(2k+\frac{1}{4}) + 2\pi ni$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$Re\frac{1}{z} = 1.$$



<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $Re\frac{1}{x+iy} = 1.$

Или $Re\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = 1$. Приравнивая числитель и знаменатель, получим: $x^2+y^2 = x$. Выделяя полный квадрат разности, можно записать: $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет окружность радиуса 1/2 с центром в точке (1/2; 0)

Задача 3. *Решить уравнение*: $2ch^2z + sh^2z = 2$.

<u>Решение</u>. Перейдём от синуса гиперболического к косинусу гиперболическому по формуле sh^{2}z=ch^{2}z+1, получим $2ch^2z + ch^2z + 1 = 2$ или $3ch^2z = 1$. Тогда $ch\,z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Воспользуемся формулой $Arch\,w = Ln(w+\sqrt{w^2+1})$. В данном случае

$z = Arch\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = Ln\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{1}{3}+1}\right) = Ln\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Под знаком логарифма имеем четыре значения: $v_1 = \sqrt{3}$, $v_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $v_3 = -\sqrt{3}$, $v_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдём модули и аргументы этих чисел:

$$|v_1| = \sqrt{3},\quad \arg v_1 = 0,\quad |v_2| = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \arg v_2 = -\pi,\quad |v_3| = \sqrt{3},\quad \arg v_3 = \pi,\quad |v_4| = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \arg v_4 = 0.$$

Далее воспользуемся формулой $Ln\,v = \ln|v| + i(\varphi + 2k\pi)$. Получим:

$$z_1 = \ln\sqrt{3} + 2k\pi i,\quad z_2 = -\ln\sqrt{3} + (2k+1)\pi i,\quad z_3 = \ln\sqrt{3} + (2k+1)\pi i,\quad z_1 = -\ln\sqrt{3} + 2k\pi i.$$

Все формулы можно объединить: $z = k\pi i \pm \ln\sqrt{3}$.

<u>Ответ</u>. $z = k\pi i \pm \ln\sqrt{3}$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$ch^2z + sh^2z = ch\,2z$.

<u>Решение</u>. Рассмотрим левую часть равенства:

$\mathrm{ch}^2 z + \mathrm{sh}^2 z = \frac{(e^z + e^{-z})^2}{4} + \frac{(e^z - e^{-z})^2}{4} = \frac{1}{4}(e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z} + e^{2z} - 2e^z e^{-z} + e^{-2z}) =$

$= \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = \mathrm{ch}\,2z$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной мнимой части её:*

$$\mathrm{Im}(z) = v = Ax^2 + 2y^2 - 2xy, \text{ *если* } f(0)=5.$$

Решение. Чтобы функция v(x,y) бала мнимой частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δv был бы равен нулю: $\Delta v=0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от v по *x* и по *y*: $\frac{\partial v}{\partial x} = 2Ax - 2y$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2A$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 4y - 2x$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4$.

Чтобы лапласиан Δv был равен нулю, нужно положить A=-2. Таким образом, функция $v(x,y) = -2x^2 + 2y^2 - 2xy$ является гармонической. Восстановим действительную часть u(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Из первого условия получаем: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 4y - 2x$. Тогда

$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx + \varphi(y)$, или $u(x,y) = \int (4y - 2x)dx + \varphi(y) = 4xy - x^2 + \varphi(y)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\frac{\partial u}{\partial y} = 4x + \varphi'(y)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 2y$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(y) = 2y$. Отсюда $\varphi(y) = y^2 + C$. Таким образом, $u(x,y) = -x^2 + 4xy + y^2 + C$. Тогда $f(z) = -x^2 + 4xy + y^2 + C + i\cdot(-2x^2 + 2y^2 - 2xy)$. Перейдём к переменной z:

$f(z) = -x^2 - 2ixy + y^2 - 2i(x^2 + 2ixy - y^2) + C = -z^2 - 2iz^2 + C = -z^2(1+2i) + C$.

Воспользуемся дополнительным условием f(0)=5. В данном случае f(0)=C. Т.е. C=5.

Ответ. $f(z) = -x^2 + 4xy + y^2 + 5 + i\cdot(-2x^2 + 2y^2 - 2xy) = 5 - z^2(1+2i)$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\,dz; \qquad C - \text{прямая}, \quad z_1 = 0,\ z_2 = 2 + 2i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$. В данном случае f(z)=x. Значит $\int_C f(z)dz = \int_C xdx + i\int_C xdy$. Примем x за параметр. Составим уравнение прямой, по которой проводится интегрирование: $\frac{y}{2} = \frac{x}{2}$, т.е. $y = x$, $dy = dx$. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение x=0, конечной $z_2=2+2i$ – значение x=2.

Следовательно, $\int_C \mathrm{Re}\,z\,dz = \int_0^2 xdx + i\int_0^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + i\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2 + 2i$.

Ответ. $\int_C \mathrm{Re}\,z\,dz = 2 + 2i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_{1+i}^{2+4i}(6z^2 + 4z)dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу Ньютона-Лейбница:

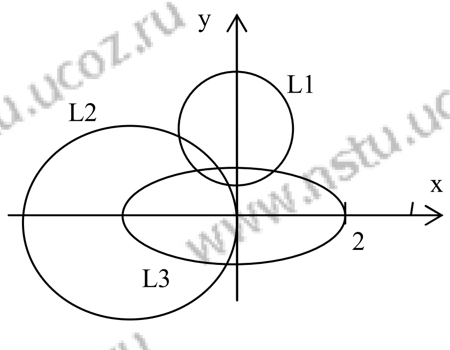
$$\int_{1+i}^{2+4i}(6z^2+4z)dz=(2z^3+2z^2)\Big|_{1+i}^{2+4i}=2(2+4i)^2(2+4i+1)-2(1+i)^2(2+i)=$$

$$=2[(4+16i-16)(3+4i)+8(2+i)]=8[(4i-3)(4i+3)+2+i]=-184-8i\,.$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_{1+i}^{2+4i}(6z^2+4z)dz=-184-8i$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2(z+1)}$, 1) $L_1:|z-2i|=\frac{3}{2}$, 2) $L_2:|z+2|=2$, 3) $L_3:\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=-1 и z=1. В круге $|z-2i|\le\frac{3}{2}$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно, $I_1=\int\limits_{L_1}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2(z+1)}=0$.



2). Внутри области $|z+2|\le 2$ расположена одна особая точка z=-1. Тогда по интегральной формуле Коши

$$\int\limits_{L_2}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2(z+1)}=\int\limits_{L_2}\frac{\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz}{(z+1)}=2\pi i\cdot\left[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\right]_{z=-1}=\frac{\pi i e^{-2}}{2}\,.$$

3). В эллипсе $\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$ есть две особые точки: z=-1 и z=1. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области: $I_3=\int\limits_{L3}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2(z+1)}=\int\limits_{l_1}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2(z+1)}+\int\limits_{l_2}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2(z+1)}$, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=-1, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=1. Первый интеграл уже вычислен. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{L_2}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2(z+1)}=\int\limits_{l_2}\frac{\frac{e^{2z}}{(z+1)}dz}{(z-1)^2}=2\pi i\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{2z}}{(z+1)}\right]_{z=1}=2\pi i\cdot\left[\frac{2e^{2z}(z+1)-e^{2z}}{(z+1)^2}\right]_{z=1}=\frac{3\pi i}{2}\cdot e^2\,.$$

Следовательно, $I_3=\int\limits_{L_3}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{\pi i}{2}\cdot e^{-2}+\frac{3\pi i}{2}\cdot e^2=\frac{\pi i}{2}\cdot(e^{-2}+3e^2)$.

<u>Ответ</u>. $I_1=0,\quad I_2=\frac{\pi i}{2}e^{-2},\quad I_3=\frac{\pi i}{2}(e^{-2}+3e^2)$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-3}{z^2-2z-8}$, 1) $2<|z|<4$ 2) $|z|>4$. 3) $0<|z-4|<6$;

<u>Решение</u>. Корнями уравнения $z^2-2z-8=0$ являются числа $z_1=4$ и $z_2=-2$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z+2}=\frac{A(z+2)+B(z-4)}{(z-4)(z+2)}$. Или $A(z+2)+B(z-4)=z-3$. При z=4 получим A=1/6. Если положить z=-2, то получим

B=5/6. Следовательно, $\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{z+2}$. 1). В кольце $2<|z|<4$ имеем $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{4}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-3}{z^2-2z-8}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4(1-\frac{z}{4})}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/4, во второй дроби q=-2/z. Следовательно,

$\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{5}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>4$ выполняются неравенства $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{4}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}=\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}+\frac{5}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n}=\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}+5\cdot(-2)^{n-1}}{z^n}.$$

в) $0<|z-4|<6; \frac{|z-4|}{6}<1;$

$$\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{z+2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-4}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6(1-(-\frac{z-4}{6}))}=\frac{1}{6}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}+\frac{5}{6}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-4)^n}{6^{n+1}};$$

$$\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{1}{6}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}+\frac{5}{6}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-4)^n}{6^{n+1}};$$

<u>Ответ</u>. 1). $\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{5}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$ в кольце $2<|z|<4$.

2). $\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}+5\cdot(-2)^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>4$.

3) $\frac{z-3}{z^2-2z-8}=\frac{1}{6}\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}+\frac{5}{6}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-4)^n}{6^{n+1}}$; в кольце 0<|z-4|<6;

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int_{|z|=3}\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z^2+1)}dz$ **11.** $\int_{|z|=2}z^3\operatorname{ch}\frac{2}{z-1}dz$

<u>Решение</u>. **10.**. .Найдём корни знаменателя: z_1=-1, z_2=-i, z_3=i. Значения z_2=-i и z_3=i являются простыми полюсами подынтегральной функции, а значение z_1=-1 - полюсом кратности 2.

Тогда $\operatorname*{Res}_{-i}\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to-i}[\frac{(z+i)\sin\pi z}{(z+1)^2(z+i)(z-i)}]=\lim_{z\to-i}[\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z-i)}]=-\frac{\sin(-i\pi)}{4}=\frac{\sin i\pi}{4}$,

$$\operatorname*{Res}_{i}\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to i}[\frac{(z-i)\sin\pi z}{(z+1)^2(z+i)(z-i)}]=\lim_{z\to i}[\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z+i)}]=-\frac{\sin i\pi}{4}$$

$$\operatorname*{Res}_{-1}\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z^2+1)}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}[(z+1)^2\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z^2+1)}]=\lim_{z\to-1}[\frac{\pi(z^2+1)\cos\pi z-2z\sin\pi z}{(z^2+1)^2}]=$$

$$= \frac{2\pi\cos\pi - 2\sin\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Получим окончательно: $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z^2+1)}dz = 2\pi i\cdot(-\frac{\sin i\pi}{4} + \frac{\sin i\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = -\pi^2 i$.

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=1. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции ch(w) по степеням w:

$sh(w) = 1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \frac{w^6}{6!} + ...$ Полагая $w = \frac{2}{z-1}$, получим:

$$z^3 ch\frac{2}{z-1} = z^3\left[1 + \frac{2^2}{2!z^2} + \frac{2^4}{4!z^4} + \frac{2^6}{6!z^6} + ...\right] = z^3 + 2z + \frac{2}{3z} + \frac{4}{45z^3} + ...$$

Коэффициентом при $(z-1)^{-1}$ в разложении функции будет число 2/3. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z-1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_1[z^3 ch\frac{2}{z-1}] = \frac{2}{3}$.

Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=2} z^3 ch\frac{2}{z-1}dz = 2\pi i\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi i.$$

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\pi z}{(z+1)^2(z^2+1)}dz = -\pi^2 i$. 11. $\int\limits_{|z|=2} z^3 ch\frac{2}{z-1}dz = \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi i$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+17x^2+16}dx.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z) = \frac{z^2+2}{z^4+17z^2+16}$, решая биквадратное уравнение: $(z^2)^2+17(z^2)+16=0$, $z^2 = -\frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{64}{4}} = -\frac{17}{2} \pm \frac{15}{2}$. Следовательно,

$z_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm i$, $z_{1,2} = \sqrt{-16} = \pm 4i$.

В верхней полуплоскости находятся два корня: z_1=i z_2=4i Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9}dx = 2\pi i(\operatorname*{Res}_i f(z) + \operatorname*{Res}_{4i} f(z)).$$

$$\operatorname*{Res}_i \frac{z^2+2}{z^4+17z^2+16} = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+2)}{(z-i)(z+i)(z^2+16)} = \frac{1}{30i},\quad \operatorname*{Res}_{4i} \frac{z^2+2}{z^4+17z^2+16} = \lim_{z\to 4i}\frac{(z-4i)(z^2+2)}{(z-4i)(z+4i)(z^2+1)} = \frac{7}{60i}.$$

Следовательно. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+17x^2+16)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2+2}{x^4+17x^2+16)}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i(\frac{1}{30i} + \frac{7}{60i}) = \pi i\cdot\frac{9}{60i} = \frac{3\pi}{20}.$

Ответ. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+17x^2+16)}dx = \frac{3\pi}{20}.$

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \ln z dz$, где C прямая, z_1=2-2i, z_2=2+2i, $\ln(2-2i) = \ln\sqrt{8} - \frac{9}{4}\pi i$.

Решение. Рассмотрим функцию $\ln z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке 2-2i величина lnz будет принимать заданное значение. С одной стороны $\ln(2-2i)=\ln\sqrt{8}+i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)$. С другой стороны $\ln(2-2i)=\ln\sqrt{8}-\frac{9}{4}\pi i$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=-1. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\ln z=\ln|z|+i(\varphi-2\pi)$.

Таким образом,

$$\int_C \ln z\,dz=\begin{vmatrix} u=\ln z & du=\frac{dz}{z} \\ dv=dz & v=z \end{vmatrix}=z\ln z\Big|_{2-2i}^{2+2i}-\int_C dz=z(\ln z-1)\Big|_{2-2i}^{2+2i}=(2+2i)(\ln\sqrt{8}+i(\frac{\pi}{4}-2\pi)-1)-$$

$$-(2-2i)(\ln\sqrt{8}+i(-\frac{\pi}{4}-2\pi)-1)=4i\ln\sqrt{8}+\pi i+8\pi-4i=8\pi+i(6\ln 2+\pi-4).$$

<u>Ответ</u>. $\int_C \ln z dz=8\pi+i(6\ln 2+\pi-4)$.