Вариант 10

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$\text{а)}\quad \cos(2-2\mathrm{i}); \qquad \text{б)}\quad \ln\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^{\mathrm{i}+2}$$

Решение. а). По формуле тригонометрии cos(2-2i)=cos2·cos(2i)+sin2·sin(2i). Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями: cos(2i)=ch2; sin(2i)= ish2. Получим cos(2-2i)=cos2·ch2+ i·sin2·sh2.

б). Воспользуемся формулой $\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^{\mathrm{i}+2} = e^{(\mathrm{i}+2)\mathrm{Ln}(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2})}$. Получим:

$$(\mathrm{i}+2)\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right) = (\mathrm{i}+2)\cdot\left[\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right| + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right] = -\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+4k\pi\right).$$

Тогда

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^{\mathrm{i}+2} = \mathrm{Ln}\left[e^{-(\frac{\pi}{6}+2k\pi)+\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}+4k\pi)}\right] = -\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+4k\pi+2m\pi\right) = -\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right),$$

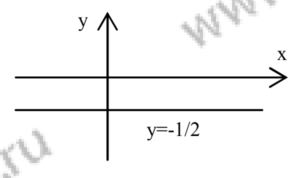
где обозначено n=2k+m (k, m, n – целые чмсла.

Ответ. а) cos(2-2i)=cos2·ch2+ i·sin2·sh2; б) $\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^{\mathrm{i}+2} = -\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$0 < \mathrm{Re}(2\mathrm{i}z) < 1.$$

Решение. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $0 < \mathrm{Re}(2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)) < 1$. Или $0 < \mathrm{Re}(-2y+2\mathrm{i}x) < 1$. Из этого следует, что $0 < -2y < 1$. Левое неравенство означает, что y<0, а правое – что y>-1/2. Объединяя последние неравенства, можно записать: $-\frac{1}{2} < y < 0$.



Ответ. Данное соотношение определяет область, заключённую между прямыми y=0 и $y = -\frac{1}{2}$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\mathrm{ch}\,z + \mathrm{sh}\,z = 2\mathrm{i}$.

Решение. Перейдём от синуса гиперболического к косинусу гиперболическому по формуле $\mathrm{sh}^2 z = \mathrm{ch}^2 z + 1$, получим $\mathrm{ch}\,z + \sqrt{\mathrm{ch}^2 z + 1} = 2\mathrm{i}$. Перенесём chz в правую часть и возведём обе части равенства в квадрат. Получим: $\mathrm{ch}^2 z + 1 = -4 - 4\mathrm{i}\,\mathrm{ch}\,z + \mathrm{ch}^2 z$ или $5 = -4\mathrm{i}\,\mathrm{ch}\,z$. Тогда $\mathrm{ch}\,z = \frac{5\mathrm{i}}{4}$. Воспользуемся формулой $\mathrm{Arch}\,w = \mathrm{Ln}(w + \sqrt{w^2+1})$. В данном случае $z = \mathrm{Arch}\left(\frac{5\mathrm{i}}{4}\right) = \mathrm{Ln}\left(\frac{5\mathrm{i}}{4} + \sqrt{-\frac{25}{16}+1}\right) = \mathrm{Ln}\left(\frac{5\mathrm{i}}{4}+\frac{3\mathrm{i}}{4}\right) = \mathrm{Ln}(2\mathrm{i})$.

Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}\,v = \ln|v| + \mathrm{i}(\varphi + 2k\pi)$. Получим:

$$z = \ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right).$$

Ответ. $z = \ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\cos(z+\pi) = -\cos z$.

Решение. Рассмотрим левую часть равенства:

$\cos(z+\pi)=\cos(x+iy+\pi)=\cos(x+\pi)\cos(iy)-\sin(x+\pi)\sin(iy)$. По формулам приведения $\cos(x+\pi)=-\cos x, \quad \sin(x+\pi)=-\sin x$. Следовательно,
$\cos(z+\pi)=-\cos x\cdot\cos(iy)+\sin x\cdot\sin(iy)=-[\cos x\cdot\cos(iy)-\sin x\cdot\sin(iy)]=-\cos(x+iy)=-\cos z$,
что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной мнимой части её:*

$$\operatorname{Im}(z)=v=x^2-y^2-2xy+y, \text{ если } f(i)=0.$$

Решение. Чтобы функция v(x,y) бала мнимой частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δv был бы равен нулю: $\Delta v=0$,
$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от v по *x* и по *y*: $\frac{\partial v}{\partial x}=2x-2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2y-2x+1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-2.$

Таким образом, функция $v(x,y)=x^2-y^2-2xy+y$ является гармонической. Восстановим действительную часть u(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-2y-2x+1$. Тогда $u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx+\varphi(y)$, или
$u(x,y)=-\int(2x+2y-1))dx+\varphi(y)=-x^2-2xy+x+\varphi(y)$. Производная по *y* от этого выражения равна $\frac{\partial u}{\partial y}=-2x+\varphi'(y)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера
$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2x+2y$. Приравнивая эти выражения, получим: $-2x+\varphi'(y)=-2x+2y$. Отсюда
$\varphi'(y)=2y$. Или $\varphi(y)=y^2+C$. Таким образом, $u(x,y)=-x^2-2xy+y^2+C$. Тогда
$f(z)=x+y^2-x^2-2xy+C+i\cdot(x^2-y^2-2xy+y)$. Перейдём к переменной z:
$f(z)=-(x^2+2ixy-y^2)+i(x^2+2ixy-y^2)+x+iy+C=z^2(i-1)+z+C$.
Воспользуемся дополнительным условием f(i)=0. В данном случае f(i)=1+C. Т.е. C=-1.
Ответ. $f(z)=z^2(i-1)+z+-1=x+y^2-x^2-2xy-1+i\cdot(x^2-y^2-2xy+y)$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C \operatorname{Re}\bar{z}\,dz; \qquad C: y=x^2, \quad z_1=0, \ z_2=1+i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=x. Следовательно,
$\int_C \operatorname{Re}\bar{z})dz=\int_C xdx+i\int_C xdy$. Примем x за параметр. Тогда $y=x^2$, dy=2xdx. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение x=0, конечной $z_2=1+i$ – значение x=1.

Следовательно, $\int_C \operatorname{Re}\bar{z}\,dz=\int_0^1 xdx+2i\int_0^1 x^2dx=[\frac{x^2}{2}+2i\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$

Ответ. $\int_C \operatorname{Re}\bar{z}\,dz=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_{-1}^{i}(z+i)\cdot e^z\,dz$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{-1}^{i}(z+1)\cdot e^z\,dz=\begin{vmatrix} u=z+i & du=dz \\ dv=e^z\,dz & v=e^z \end{vmatrix}=(z+i)\cdot e^z\Big|_{-1}^{i}-\int_{-1}^{i}e^z\,dz=2i\cdot e^i-(-1+i)\cdot e^{-1}-e^z\Big|_{1}^{i}=$$

$$=2i\cdot e^i+(1-i)\cdot e^{-1}-e^i+e^{-1}=(2i-1)(\cos 1+i\sin 1)+(2-i)e^{-1}=$$

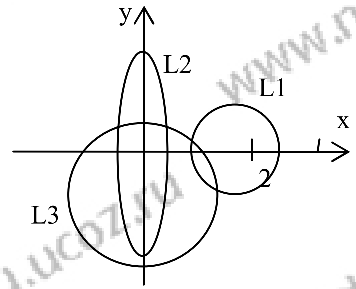
$$=2\cdot e^{-1}-2\sin 1-\cos 1+i\cdot(2\cos 1-\sin 1-e^{-1})$$

Здесь учтено, что $e^i=\cos 1+i\sin 1$.

<u>Ответ</u>. $\int_{-1}^{i}(z+i)\cdot e^i\,dz=2\cdot e^{-1}-2\sin 1-\cos 1+i\cdot(2\cos 1-\sin 1-e^{-1})$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int_L \frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}$, 1) $L_1:\left|z-\frac{3}{2}\right|=1$, 2) $L_2: 4x^2+\frac{y^2}{4}=1$, 3) $L_3: |z+i|=\frac{3}{2}$.

<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=i и z=-i/2. В круге $\left|z-\frac{3}{2}\right|\le 1$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно,



$I_1=\int_{L_1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}=0$. 2). В эллипсе $\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$ есть две особые точки: z=i и z=-i/2. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$I_2=\int_{L2}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}=\int_{l_1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}+\int_{l_2}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}$, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=i, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=-i/2. Вычислим оба интеграла по интегральной формуле Коши:

$$\int_{l_1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}=\int_{l_1}\frac{\frac{e^z}{(z+i/2)}dz}{(z-i)^2}=2\pi i\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{(z+i/2)}\right]_{z=i}=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{e^z(z+i/2)-e^z}{(z+i/2)^2}\right]_{z=i}=-\frac{8\pi i}{9}\cdot e^i\left(\frac{3}{2}-1\right).$$

$$\int_{l_2}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}=\int_{l_1}\frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}dz}{(z+i/2)}=2\pi i\cdot\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]_{z=-i/2}=-\frac{8\pi i}{9}\cdot e^{-\frac{i}{2}}.$$ Следовательно,

$$I_2=\int_{L_2}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}=\frac{4\pi}{9}(3+2i)\cdot e^i-\frac{8\pi i}{9}\cdot e^{-\frac{i}{2}}=\frac{4\pi}{9}\cdot e^i[3+2i(1-e^{-\frac{3i}{2}})].$$

3). Внутри области $|z+i|\le\frac{3}{2}$ расположена одна особая точка z=-π/2. Соответствующий интеграл был уже вычислен: $\int_{L_2}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+i/2)}=-\frac{8\pi i}{9}\cdot e^{-\frac{i}{2}}$.

<u>Ответ</u>. $I_1=0$, $I_2=\frac{4\pi}{9}\cdot e^i[3+2i(1-e^{-\frac{3i}{2}})]$, $I_3=-\frac{8\pi i}{9}\cdot e^{-\frac{i}{2}}$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z+4}{z^2-6z+8}$, 1) $2<|z|<4$ 2) $|z|>4$. 3) 0<|z-2|<2;

Решение. Корнями уравнения $z^2-6z+8=0$ являются числа $z_1=4$ и $z_2=2$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z+4}{z^2-6z+8}=\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z-2}=\frac{A(z-2)+B(z-4)}{(z-4)(z-2)}$. Или $A(z-2)+B(z-4)=z+4$. При z=4 получим A=4. Если положить z=2, то получим B=-3. Следовательно, $\frac{z+4}{z^2-6z+8}=\frac{4}{z-4}-\frac{3}{z-2}$. 1). В кольце $2<|z|<4$ имеем $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{4}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z+4}{z^2-6z+8}=-\frac{4}{4(1-\frac{z}{4})}-\frac{3}{z(1-\frac{2}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/4, во второй дроби q=2/z. Следовательно,

$\frac{z+4}{z^2-6z+8}=-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>4$ выполняются неравенства $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{4}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z+4}{z^2-6z+8}=\frac{4}{z(1-\frac{4}{z})}-\frac{3}{z(1-\frac{2}{z})}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3\cdot 2^{n-1}}{z^n}.$$

3) $0<|z-2|<2$;

$\frac{|z-2|}{2}<1$;

$$\frac{z+4}{z^2-6z+8}=\frac{4}{4-z}-\frac{3}{z-2}=-\frac{4}{2(1-\frac{z-2}{2})}-\frac{3}{z-2}=-4\sum_{1}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}-3\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}};$$

$$\frac{z+4}{z^2-6z+8}=-4\sum_{1}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}-3\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}};$$

Ответ. 1). $\frac{z+4}{z^2-6z+8}=-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}$. в кольце $2<|z|<4$.

2). $\frac{z+4}{z^2-6z+8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3\cdot 2^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>4$.

3) $\frac{z+4}{z^2-6z+8}=-4\sum_{1}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}-3\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$; в кольце $0<|z-2|<2$;

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}dz$ **11.** $\int\limits_{|z|=2}\frac{5z^5+z-1}{z^{16}-1}dz$

Решение. **10.**. .Найдём корни знаменателя: $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=-i$, $z_4=i$. Значения $z_1=0$, $z_3=-i$ и $z_4=i$ являются простыми полюсами подынтегральной функции, а значение $z_2=-1$ - полюсом кратности 2. Тогда $\operatorname{Res}_0\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to 0}[z\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}]=\lim_{z\to 0}[\frac{\sin z}{(z+1)^2(z^2+1)}]=0$

$$\underset{-1}{\mathrm{Res}}\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}[(z+1)^2\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}]=$$

$$=\lim_{z\to -1}\frac{\cos(z)(z^2+1)z-(3z^2+1)\sin z}{z^2(z^2+1)^2}=\frac{-2\cos(-1)-4\sin(-1)}{4}=\frac{2\sin 1-\cos 1}{2}.$$

$$\underset{i}{\mathrm{Res}}\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to i}[(z-i)\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z-i)(z+i)}]=\lim_{z\to i}[\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z+i)}]=-\frac{\sin i}{4i}$$

$$\underset{-i}{\mathrm{Res}}\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to -i}[(z+i)\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z-i)(z+i)}]=\lim_{z\to -i}[\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z-i)}]=-\frac{\sin i}{4i}.$$

Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}dz=2\pi i\cdot(\frac{2\sin 1-\cos 1}{2}-\frac{\sin i}{2i})=\pi i(2\sin 1-\cos 1-\mathrm{sh}1).$$

11. Подынтегральная функция имеет шестнадцать простых полюсов, которые определяются формулой:

$z_k=\sqrt[16]{1}=e^{i\frac{2k\pi}{16}}=e^{i\frac{k\pi}{8}}$ или $z_k=\sqrt[16]{1}=\cos\frac{2k\pi}{16}+i\sin\frac{2k\pi}{16}=\cos\frac{k\pi}{8}+i\sin\frac{k\pi}{8}$, $k=0,1,2,...,15$. Все полюсы расположены на окружности единичного радиуса $|z|=1$. Вне круга $|z|>1$ подинтегральная функция является аналитической кроме точки $z=\infty$, которая является устронимой особой точкой. Действительно, $f(z)=\frac{5z^{15}+z-1}{z^{16}-1}=(\frac{5}{z}+\frac{1}{z^{15}}-\frac{1}{z^{16}})\frac{1}{1-\frac{1}{z^{16}}}$

Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В данном случае $q=1/z^{16}$, причём в области $|z|>1$ выполняется неравенство $1/z^{16}<1$. Тогда

$f(z)=\frac{5z^{15}+z-1}{z^{16}-1}=(\frac{5}{z}+\frac{1}{z^{15}}-\frac{1}{z^{16}})(1+\frac{1}{z^{16}}+\frac{1}{z^{32}}+\frac{1}{z^{48}}+...)=\frac{5}{z}+\frac{1}{z^{15}}-\frac{1}{z^{16}}+\frac{5}{z^{17}}+\frac{1}{z^{31}}-\frac{1}{z^{32}}+...$ В соответствии с основной теоремой о вычетах

$\int\limits_{|z|=2}\frac{5z^{15}+z-1}{z^{16}-1}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{16}\underset{z_k}{\mathrm{Res}}f(z)=2\pi i(-\underset{\infty}{\mathrm{Res}}f(z))$. Вычет в точке $z=\infty$ равен коэффициенту при z^{-1} в разложении фунуции в ряд Лорана, взятый с противоположным знаком. Таким образом, $\underset{\infty}{\mathrm{Res}}f(z)=-5$ и $\int\limits_{|z|=2}\frac{5z^{15}+z-1}{z^{16}-1}dz=2\pi i(-\underset{\infty}{\mathrm{Res}}f(z))=10\pi i$.

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{z(z+1)^2(z^2+1)}dz=\pi i(2\sin 1-\cos 1-\mathrm{sh}1)$. 11. $\int\limits_{|z|=2}\frac{5z^{15}+z-1}{z^{16}-1}dz=10\pi i$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+1)}dx.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\frac{z^2}{(z^4+1)}$:

$z^4+1=0$ или $z=|-1|(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})$ или $z_{1,2,3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$. Следовательно, два корня из четырёх находятся в верхней полуплоскости:

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \text{и} \quad z_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Тогда $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+1)}dx=2\pi i(\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+1)}+\operatorname*{Res}_{z_3}\frac{z^2}{(z^4+1)})$.

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+1)}=\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}\frac{(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))z^2}{(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))}=$$

$$=\frac{i}{\sqrt{2}(i+1)\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}i}=\frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+1)}=\lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)}\frac{(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))z^2}{(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))}=$$

$$=\frac{-i}{\sqrt{2}i\cdot(-\sqrt{2})[-\sqrt{2}(1-i)]}=-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}.$$

Следовательно. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+1)}dx=2\pi i(\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+1)}+\operatorname*{Res}_{z_3}\frac{z^2}{(z^4+1)})=2\pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}}-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+1)}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, где C – верхняя полуокружность $|z|=1$, z_1=1, z_2=-1, $\sqrt[4]{1}=1$.

Решение. Рассмотрим функцию $\sqrt[4]{z}=|z|^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4})$ Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=1 функция будет принимать заданное значение. С одной стороны $\sqrt[4]{1}=|1|^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4})$, так как 1=cos(0)+isin(0). С другой стороны $\sqrt[4]{1}=1=(\cos\pi+i\sin\pi)$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=0. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt[4]{z}=|z|^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\varphi}{4}+i\sin\frac{\varphi}{4})$. Таким образом,

$$\int_C\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}=4\sqrt[4]{z}\Big|_1^{-1}=4\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}-(\cos 0+i\sin 0)=4(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}-1)=2\sqrt{2}(1+i)-4.$$

Ответ. $\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}=4\sqrt[4]{z}\Big|_1^{-1}=2\sqrt{2}(1+i)-4$.