Вариант 11

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\cos(1-i)$; б) $(1-i)^{3-3i}$

<u>Решение</u>. а). По формуле тригонометрии $\cos(1-i)=\cos 1\cdot\cos(i)+\sin 1\cdot\sin(i)$. Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$\cos(i)=\mathrm{ch}1$; $\sin(i)=i\,\mathrm{sh}1$. Получим $\cos(1-i)=\cos 1\cdot\mathrm{ch}1+i\cdot\sin 1\cdot\mathrm{sh}1$.

б). Воспользуемся формулой $(1-i)^{3-3i}=e^{(3-3i)\mathrm{Ln}(1-i)}$. Получим:

$(3-3i)\mathrm{Ln}(1-i)=(3-3i)\cdot[\ln|1-i|+i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)]=(3-3i)\ln\sqrt{2}-3i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)+3\pi(2k-\frac{1}{4})$. Или

$$(3-3i)\mathrm{Ln}(1-i)=3[\ln\sqrt{2}+\pi(2k-\frac{1}{4})]-3i[\ln\sqrt{2}+\pi(2k-\frac{1}{4})]$$

Тогда $(1-i)^{3-3i}=e^{3[\ln\sqrt{2}+\pi(2k-\frac{1}{4})]-3i[\ln\sqrt{2}+\pi(2k-\frac{1}{4})]}=2\sqrt{2}\cdot e^{3\pi(2k-\frac{1}{4})}[\cos[3(\ln\sqrt{2}+\pi(2k-\frac{1}{4}))]-$

$-i\sin[3(\ln\sqrt{2}+\pi(2k-\frac{1}{4}))]=2\sqrt{2}\cdot e^{3\pi(2k-\frac{1}{4})}[\cos(\ln\sqrt{8})\cos(-\frac{\pi}{4})-\sin(\ln\sqrt{8})\sin(-\frac{\pi}{4})-$

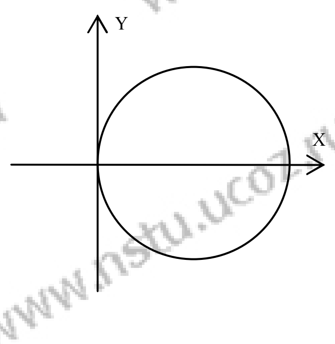
$-i(\sin(\ln\sqrt{8})\cos(-\frac{\pi}{4})-\cos(\ln\sqrt{8})\sin(-\frac{\pi}{4}))]=2\sqrt{2}\cdot e^{3\pi(2k-\frac{1}{4})}[\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cos(\ln\sqrt{8})+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sin(\ln\sqrt{8})]$

<u>Ответ</u>. а) $\cos(1-i)=\cos 1\cdot\mathrm{ch}1+i\cdot\sin 1\cdot\mathrm{sh}1$.;

б) $(1-i)^{3-3i}=2\sqrt{2}\cdot e^{3\pi(2k-\frac{1}{4})}[\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cos(\ln\sqrt{8})+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sin(\ln\sqrt{8})]$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$\mathrm{Re}\frac{1}{z}>\frac{1}{2}.$$



<u>Решение</u>. Так как $z=x+iy$, то данное соотношение имеет вид: $\mathrm{Re}\frac{1}{x+iy}\ge\frac{1}{2}$.

Или $\mathrm{Re}\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}\ge\frac{1}{2}$. Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим: $x^2+y^2\le 2x$.

Выделяя полный квадрат разности, можно записать: $(x-1)^2+y^2\le 1$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет круг радиуса 1 с центром в точке (1; 0)

Задача 3. *Решить уравнение*: $\mathrm{sh}\,z-\mathrm{ch}\,z=3+i\sqrt{3}$.

<u>Решение</u>. Перейдём от гиперболических функций к функции e^z:

$\frac{e^z-e^{-z}}{2}-\frac{e^z+e^{-z}}{2}=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})$, т.е.

$$e^{-z}=-2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}) \quad \text{или} \quad e^z=-\frac{1}{2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})}=-\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})}{2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}).$$

Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}\,v=\ln|v|+i(\varphi+2k\pi)$. Получим:

$$z=\mathrm{Ln}[-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})]=\ln\frac{1}{2\sqrt{3}}+i(\frac{5\pi}{6}+2k\pi)=-\ln\sqrt{12}+i\pi(2k+\frac{5}{6}).$$

Ответ. $z = -\ln\sqrt{12} + i\pi(2k + \frac{5}{6})$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$.

Решение. Рассмотрим левую часть равенства:

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = \frac{(e^z + e^{-z})^2}{4} - \frac{(e^z - e^{-z})^2}{4} = \frac{1}{4}(e^{2z} + 2e^z e^{-z} + e^{-2z} - e^{2z} + 2e^z e^{-z} - e^{-2z}) =$$

$= \frac{4e^{2z}e^{-2z}}{4} = 1$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u = Ax^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + x - 1, \text{ если } f(0)=-1$$

Решение. Чтобы функция $u(x,y)$ бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: $\Delta u=0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по x и по y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3Ax^2 - 3y^2 - 6x + 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6Ax - 6, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x + 6.$$

Чтобы лапласиан Δu был равен нулю, нужно положить $A=1$. Таким образом, функция $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + x - 1$ является гармонической. Восстановим мнимую часть $v(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 6x + 1$. Тогда

$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + \varphi(x)$, или $v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2 - 6x + 1)dy + \varphi(x) = 3x^2 y - y^3 - 6xy + y + \varphi(x)$.

Производная по x от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x} = 6yx - 6y + \varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 6y$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x) = 0$. Или $\varphi(x) = C$. Таким образом, $v(x,y) = 3x^2 y - y^3 - 6xy + y + C$. Тогда $f(z) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + x - 1 + i\cdot(3x^2 y - y^3 - 6xy + y + C)$. Перейдём к переменной z:

$f(z) = x^3 + 3ix^2 y - 3xy^2 - iy^3 - 3(x^2 + 2ixy - y^2) + (x + iy) - 1 + iC = z^3 - 3z^2 + z - 1 + iC$. .

Воспользуемся дополнительным условием $f(0)=-1$. В данном случае $f(0)=-1+iC$. Следовательно, $C=0$.

Ответ. $f(z) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + x - 1 + i\cdot(3x^2 y - y^3 - 6xy + y) = z^3 - 3z^2 + z - 1$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C \mathrm{Im}\, z\, dz; \quad C - \text{прямая}, \quad z_1 = 0, \; z_2 = 1 + 2i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$. В данном случае $f(z)=y$. Значит $\int_C \mathrm{Im}\, zdz = \int_C ydx + i\int_C ydy$. Примем x за параметр. Составим уравнение прямой, по которой проводится интегрирование: $\frac{y}{2} = \frac{x}{1}$, т.е. $y = 2x$, $dy = 2dx$. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение $x=0$, конечной $z_2=1+2i$ – значение $x=1$.

Следовательно, $\int\limits_C \operatorname{Im} z\,dz = 2\int\limits_0^1 x dx + 4i\int\limits_0^1 x dx = -\left.\dfrac{2x^2}{2}\right|_0^1 + 4i\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1 + 2i$.

Ответ. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\,dz = 1 + 2i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_1^{-i}(z-i)\cdot\sin z\,dz$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^{-i}(z-i)\cdot\sin z\,dz = \begin{vmatrix} u = z-i & du = dz \\ dv = \sin z\,dz & v = -\cos z \end{vmatrix} = -(z-i)\cos z\Big|_1^{-i} + \int\limits_1^{-i}\cos z\,dz = 2i\cos i + (1-i)\cos 1 +$$

$$+\sin z\Big|_1^{-i} = 2i\cos i + (1-i)\cos 1 - \sin(i) - \sin 1.$$

Перейдём к тригонометрическим функциям: $\sin i = i\operatorname{sh}1$, $\cos i = \operatorname{ch}1$. Получим:

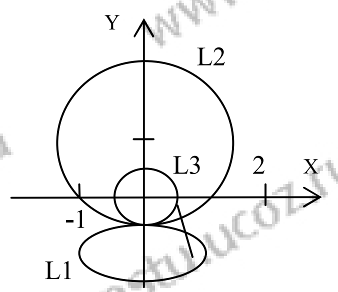
$$\int\limits_1^{-i}(z-i)\cdot\sin z\,dz = 2i\operatorname{ch}1 + (1-i)\cos 1 - i\operatorname{sh}1 - \sin 1.$$

Ответ. $\int\limits_1^{-i}(z-i)\cdot\sin z\,dz = \cos 1 - \sin 1 + (2\operatorname{ch}1 - \cos - \operatorname{sh}1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L \dfrac{e^{2z}dz}{z^3 - iz^2}$, 1) $L_1: x^2 + 4(y+1)^2 = 1$, 2) $L_2: |z-i| = \dfrac{3}{2}$, 3) $L_3: |z| = \dfrac{1}{2}$.

Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=0 и z=п. В эллипсе $x^2 + 4(y+1)^2 \le 1$ нет особых точка. Тогда по теореме Коши $I_1=0$.

2). Внутри круга $|z-i| \le \dfrac{3}{2}$ расположены две особые точки z=0 и z=i. Поэтому



применим теорему Коши для многосвязной области:

$$\int\limits_{L2}\frac{e^{2z}dz}{z^3 - iz^2} = \int\limits_{l_1}\frac{e^{2z}dz}{z^3 - iz^2} + \int\limits_{l_2}\frac{e^{2z}dz}{z^3 - iz^2},$$ где L_1 - окружность

достаточно малого радиуса с центром в точке z=0, а L_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=i.

Вычислим оба интеграла по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_1}\frac{e^{2z}dz}{z^3 - iz^2} = \int\limits_{l_2}\frac{\frac{e^{2z}dz}{z-i}dz}{z^2} = 2\pi i\cdot\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2z}}{(z-i)}\right)\right]_{z=0} =$$

$$= 2\pi i\cdot\left.\frac{2(z-i)e^{2z} - e^{2z}}{(z-i)^2}\right|_{z=0} = 2\pi(i-2).$$

$$\int\limits_{l_2}\frac{e^{2z}dz}{z^3 - iz^2} = \int\limits_{l_2}\frac{\frac{e^{2z}dz}{z^2}dz}{z-i} = 2\pi i\cdot\left[\left(\frac{e^{2z}}{z^2}\right)\right]_{z=i} = -2\pi i e^{2i}.$$

Окончательно получаем: $I_2 = \int\limits_{L2}\dfrac{e^{2z}dz}{z^3 - iz^2} = 2\pi(i-2) - 2\pi i e^{2z} = 2\pi i(1 + 2i - e^{2i})$

3) Внутри круга $|z| \le \frac{1}{2}$ также находится одна особая точки: z=0. Интеграл по контуру L_3 совпадает с уже вычисленным интегралом по контуру L_1. $I_3 = \int\limits_{L_3} \frac{e^{2z} dz}{z^3 - iz^2} = 2\pi(i-2)$.

<u>Ответ</u>. $I_1 = 0, \quad I_2 = 2\pi i(1 + 2i - e^{2i}), \quad I_3 = 2\pi(i-2).$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4}$, 1) $1 < |z| < 4$ 2) $|z| > 4$. 3) $0<|z+1|<5$;

<u>Решение</u>. Корнями уравнения z^2-3z-4=0 являются числа z_1=4 и z_2=-1. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1) + B(z-4)}{(z-4)(z+1)}$. Или

$A(z+1) + B(z-4) = z + 5$. При z=4 получим A=9/5. Если положить z=-1, то получим B=-4/5. Следовательно, $\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{z-4} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z+1}$. 1). В кольце $1 < |z| < 4$ имеем

$\frac{1}{|z|} < 1$ и $\frac{|z|}{4} < 1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = -\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{4(1 - \frac{z}{4})} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z(1 + \frac{1}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$, где $|q| < 1$. В первой дроби q=z/4, во второй дроби q=-1/z. Следовательно,

$\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = \frac{4}{5} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \frac{9}{5} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}$. 2). В кольце $|z| > 4$ выполняются неравенства

$\frac{1}{|z|} < 1$ и $\frac{4}{|z|} < 1$. Следовательно,

$$\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{z(1 - \frac{4}{z})} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z(1 - \frac{2}{z})} = \frac{9}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{z^n} - \frac{4}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 4^{n-1} + 4 \cdot (-1)^n}{z^n}.$$

3) $0<|z+1|<5$; $\frac{|z+1|}{5} < 1$;

$$\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{z-4} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{9}{5} \cdot \frac{-1}{5(1 - \frac{z+1}{5})} = -\frac{4}{5} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{1} - \frac{9}{5} \sum_{1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{5^{n+1}};$$

$$\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = -\frac{4}{5} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{1} - \frac{9}{5} \sum_{1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{5^{n+1}};$$

<u>Ответ</u>. 1). $\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = \frac{4}{5} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \frac{9}{5} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}$ в кольце $1 < |z| < 4$.

2). $\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = \frac{1}{5} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 4^{n-1} + 4 \cdot (-1)^n}{z^n}$ в кольце $|z| > 4$.

3) $\frac{z+5}{z^2 - 3z - 4} = -\frac{4}{5} \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{1} - \frac{9}{5} \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{5^{n+1}}$; в кольце $0<|z+1|<5$;

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\pi}\frac{e^z}{(4z^2+\pi^2)^2}dz$ **11.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}(z^2+1)e^{\frac{1}{z+1}}dz$

Решение. **10.** Преобразуем подинтегральную функцию: $\dfrac{e^z}{(4z^2+\pi^2)^2}=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{e^z}{(z^2+\frac{\pi^2}{4})^2}$.

Корни знаменателя: $z_1=-\dfrac{\pi i}{2}$, $z_2=\dfrac{\pi i}{2}$ i. Значения z_1 и z_2 являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{-\frac{\pi i}{2}}\frac{e^z}{16(z^2+\frac{\pi^2}{4})^2}=\lim_{z\to-\frac{\pi i}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+\frac{\pi i}{2})^2e^z}{16(z+\frac{\pi i}{2})^2(z-\frac{\pi i}{2})^2}\right]=\lim_{z\to-\frac{\pi i}{2}}\left[\frac{e^z(z-\frac{\pi i}{2})^2-2e^z(z-\frac{\pi i}{2})}{16(z-\frac{\pi i}{2})^4}\right]=\frac{i\pi+2}{16\pi^3},$$

$$\operatorname*{Res}_{\frac{\pi i}{2}}\frac{e^z}{16(z^2+\frac{\pi^2}{4})^2}=\lim_{z\to\frac{\pi i}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-\frac{\pi i}{2})^2e^z}{16(z+\frac{\pi i}{2})^2(z-\frac{\pi i}{2})^2}\right]=\lim_{z\to\frac{\pi i}{2}}\left[\frac{e^z(z+\frac{\pi i}{2})^2-2e^z(z+\frac{\pi i}{2})}{16(z+\frac{\pi i}{2})^4}\right]=\frac{-i\pi+2}{16\pi^3}.$$

Получим окончательно: $\displaystyle\int\limits_{|z|=\pi}\frac{e^z}{(4z^2+\pi^2)^2}dz=2\pi i\left(\frac{i\pi+2}{16\pi^3}+\frac{-i\pi+2}{16\pi^3}\right)=\frac{8i}{16\pi^2}=\frac{i}{2\pi^2}$.

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку $z=-1$. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции e^w по степеням w:

$sp(w)=1+w+\dfrac{w^2}{2!}+\dfrac{w^3}{3!}+\dfrac{w^4}{4!}+\ldots$ Полагая $w=\dfrac{1}{z+1}$, получим:

$$(z^2+1)e^{\frac{1}{z+1}}=(z^2+1)\left[1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2(z+1)^2}+\frac{1}{6(z+1)^3}+\frac{1}{24(z+1)^4}+\ldots\right]=z^2+1+\frac{z^2-1+2}{z+1}+$$

$$+\frac{z^2-1+2}{2(z+1)^2}+\frac{z^2-1+2}{6(z+1)^3}+\ldots=z^2+z+\frac{2}{z+1}+\frac{z-1}{2(z+1)}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{z-1}{6(z+1)^2}+\frac{2}{6(z+1)^3}+\ldots=$$

$=z^2+z+\dfrac{2}{z+1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{(z+1)^2}+\dfrac{1}{6(z+1)}-\dfrac{1}{3(z+1)^2}+\dfrac{2}{6(z+1)^3}+\ldots$ Последующие слагаемые не содержат степени $(z+1)^{-1}$. Коэффициентом при $(z+1)^{-1}$ в разложении функции будет число 7/6. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z+1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{-1}[(z^2+1)e^{\frac{1}{z+1}}]=\dfrac{7}{6}$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=2}(z^2+1)e^{\frac{1}{z+1}}dz=2\pi i\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{3}\pi i.$$

Ответ. 10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\pi}\frac{e^z}{(4z^2+\pi^2)^2}dz=\frac{i}{2\pi^2}$. 11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}(z^2+1)e^{\frac{1}{z+1}}dz=\frac{7}{3}\pi i$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^4+25x^2+144)}dx.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\dfrac{z^2+3}{(z^4+25z^2+144)}$, решая биквадратное уравнение: $(z^2)^2+25(z^2)+144=0$, $z^2=-\dfrac{25}{2}\pm\sqrt{\dfrac{625}{4}-\dfrac{576}{4}}=-\dfrac{25}{2}\pm\dfrac{7}{2}$.

Следовательно, $z_{1,2}=\pm 3i$, $z_{3,4}=\pm 4i$. В данном случае в верхней полуплоскости расположены два полюса $z=3i$ и $z=4i$ функции $f(z)=\dfrac{z^2+3}{(z^4+25z^2+144)}=\dfrac{z^2+3}{(z^2+9)(z^2+16)}$.

Тогда $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=2\pi i(\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2+3}{(z^2+9)(z^2+16)}+\operatorname*{Res}_{4i}\frac{z^2+3}{(z^2+9)(z^2+16)})$.

$$\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2+3}{(z^2+9)(z^2+16)}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)(z^2+3)}{(z+3i)(z-3i)(z^2+16)}=\frac{-6}{6i(9i^2+16)}=\frac{-1}{7i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{4i}\frac{z^2+3}{(z^2+9)(z^2+16)}=\lim_{z\to 4i}\frac{(z-4i)(z^2+3)}{(z+4i)(z-4i)(z^2+9)}=\frac{-13}{8i(16i^2+9)}=\frac{13}{8i\cdot 7}.$$

Следовательно, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=2\pi i(\frac{13}{56i}-\frac{1}{7i})=\frac{5\pi}{28}$.

Ответ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=\frac{5\pi}{28}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\displaystyle\int_C z\ln z dz$, где C – часть окружности $|z|=1$, $(x\ge 0, y\le 0)$, $z_1=1$, $z_2=-i$, $\ln 1=2\pi i$.

Решение. Рассмотрим функцию $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке $z=1$ величина $\operatorname{Ln} z$ будет принимать заданное значение. С одной стороны $\operatorname{Ln} 1=\ln|1|+i(0+2k\pi)$. С другой стороны $\ln 1=2\pi i$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение $k=1$. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение
$\ln z=\ln|z|+i(\varphi+2\pi)$.

Таким образом,

$$\int_C z\ln z\,dz=\left|\begin{matrix}u=\ln z & du=\dfrac{dz}{z}\\ dv=zdz & v=\dfrac{z^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{z^2}{2}\ln z\Big|_1^{-i}-\frac{1}{2}\int_C zdz=\frac{z^2}{4}(2\ln z-1)\Big|_1^{-i}=-\frac{1}{4}(2\ln(-i)-1)-$$
$$-\frac{1}{4}(2\ln(1)-1)=-\frac{1}{4}[2(\ln|-i|-\frac{i\pi}{2}+2\pi i)-1+2(\ln|1|+2\pi i)-1]=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(-\pi i+4\pi i+4\pi i)=\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\pi i.$$

Ответ. $\displaystyle\int_C z\ln zdz=\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\pi i$.