Вариант 12

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$а)\ \sin(2+2i); \qquad б)\ \sqrt{3+4i}$$

<u>Решение</u>. а). По формуле тригонометрии sin(2+2i)=sin2·cos2i+cos2·sin2i. Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

cos2i=ch2; sin2i= ish2. Получим sin(2+2i)=sin2·ch2+ i·cos2·sh2.

б). Корни находятся по формуле $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})$, где k=0, 1. При k=0 получим первый корень $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{2})$. Полагая k=1, получим второй корень $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot(\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi)+i\cdot\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi))=-\sqrt{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{2})$ (по формулам приведения). В данном примере z=3+4i. Тогда $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ и, следовательно, $z=5(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot i)$. Поскольку $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, то в данном случае cosφ=3/5, а sinφ=4/5. Учитывая, что

$$\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\varphi) \text{ и } \cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi),$$ получим:

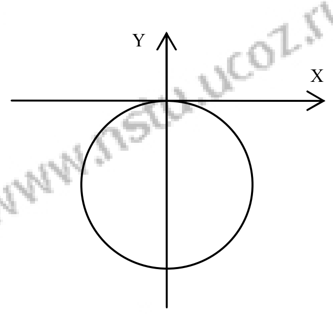
$$\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1-\frac{3}{5})=\frac{1}{5} \text{ и } \cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1+\frac{3}{5})=\frac{4}{5}.$$ Так как 0<φ<π/2, то, соответственно, 0<φ/2< π/2. В таком случае $\sin\frac{\varphi}{2}>0$ и $\cos\frac{\varphi}{2}>0$, т.е. $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Окончательно получаем $\sqrt{z}=\pm\sqrt{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{2})=\pm\sqrt{5}\cdot(\frac{2}{\sqrt{5}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{5}})=\pm(2+i)$.

<u>Ответ</u>. а) sin(2+2i)= sin2·ch2+ i·cos2·sh2; б) $\sqrt{3+4i}=\pm(2+i)$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$\operatorname{Im}\frac{1}{z}<\frac{1}{2}.$$



<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $\operatorname{Im}\frac{1}{x+iy}<\frac{1}{2}$.

Или $\operatorname{Im}\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}<\frac{1}{2}$. Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим: $x^2+y^2>-2y$.

Выделяя полный квадрат суммы, можно записать: $x^2+(y+1)^2>1$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение определяет область, расположенную вне круга радиуса 1 с центром в точке (0;-1).

Задача 3. *Решить уравнение*: $\operatorname{sh} iz=-i$.

<u>Решение</u>. Перейдём от гиперболической функции к функции e^{iz}:

$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=-i$. Умножим всё уравнение на $2e^{iz}$, получим $e^{2iz}-1=-2ie^{iz}$. Обозначим $v=e^{iz}$ и решим квадратное уравнение $v^2+2iv-1=0$, $v_{1,2}=-i\pm\sqrt{(-i)^2+1}=-i$. Таким образом, $v=e^{iz}=-i$ или $z=-i\mathrm{Ln}(-i)=-i[\ln|-i|+i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)]=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Ответ. $z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Задача 4. *Доказать тождество.* $sh(z+\pi i)=-shz$.

Решение. Рассмотрим левую часть равенства:

$$sh(z+\pi i)=\frac{e^{z+\pi i}-e^{-z-\pi i}}{2}=\frac{1}{2}(e^z e^{\pi i}-e^{-z}e^{-\pi i})=\frac{1}{2}(e^z(\cos\pi+i\sin\pi)-e^{-z}(\cos\pi-i\sin\pi))=$$

$=\frac{1}{2}(e^z(-1)-e^{-z}(-1))=-\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=-shz$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$Re\, f(z)=u=Ax^3-3xy+x\text{ , }\textit{если } f(i)=i.$$

Решение. Чтобы функция u(x,y) бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: Δu=0, $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*:

$\frac{\partial u}{\partial x}=3Ax^2-3y+1,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6Ax,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-3x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Чтобы лапласиан Δu был равен нулю, нужно положить A=0. Таким образом, функция $u(x,y)=-3xy+x$ является гармонической. Восстановим мнимую часть v(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$

Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-3y+1$. Тогда $v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy+\varphi(x)$, или

$v(x,y)=\int(-3y+1)dy+\varphi(x)=-\frac{3y^2}{2}+y+\varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна

$\frac{\partial v}{\partial x}=\varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x}=3x$.

Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x)=3x$. Или $\varphi(x)=\frac{3x^2}{2}+C$. Таким образом,

$v(x,y)=-\frac{3y^2}{2}+y+\frac{3x^2}{2}+C$. Тогда $f(z)=-3xy+x+i\cdot(-\frac{3y^2}{2}+y+\frac{3x^2}{2}+C)$. Перейдём к переменной z: $f(z)=\frac{3}{2}i(x^2+2ixy-y^2)+x+iy+iC=\frac{3}{2}iz^2+z+iC$. Воспользуемся дополнительным условием f(i)=i. В данном случае $f(i)=-\frac{3}{2}i+i+iC$. Следовательно, C=3/2.

Ответ. $f(z)=-3xy+x+i\cdot(-\frac{3y^2}{2}+y+\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{2})=\frac{3}{2}i(z^2+1)+z.$

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C Im\,\bar{z}\,dz;\qquad C: x=y^2,\quad z_1=0,\ z_2=4-2i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=-y, т.е.u=-y, v=0.

Значит $\int\limits_C \operatorname{Im}\bar{z}dz = -\left(\int\limits_C ydx + i\int\limits_C ydy\right)$. Примем y за параметр. Тогда: $x = y^2, \quad dx = 2ydy$.

Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение $y=0$, конечной $z_2=4-2i$ – значение $y=-2$.

Следовательно, $\int\limits_C \operatorname{Im}\bar{z}\,dz = -2\int\limits_0^{-2} y^2dy - i\int\limits_0^{-2} ydy = -\left.\frac{2y^3}{3}\right|_0^{-2} - i\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{-2} = -\frac{16}{3} - 2i$.

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C \operatorname{Im}\bar{z}\,dz = -\frac{16}{3} - 2i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_0^{1+i} z\cdot\cos z\,dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{1+i} z\cdot\cos z\,dz = \begin{vmatrix} u=z & du=dz \\ dv=\cos z\,dz & v=\sin z \end{vmatrix} = z\sin z\Big|_0^{1+i} - \int\limits_0^{1+i}\sin z\,dz = (1+i)\sin(1+i) + \cos z\Big|_0^{1+i} =$$
$$= (1+i)[\sin 1\cdot\cos i + \cos 1\cdot\sin i] + \cos 1\cdot\cos i - \sin 1\cdot\sin i - 1.$$

Перейдём к гиперболическим функциям: $\sin i = i\operatorname{sh}1, \quad \cos i = \operatorname{ch}1$. Получим:

$$\int\limits_0^{1+i} z\cdot\cos z\,dz = (i+1)[\sin 1\operatorname{ch}1 + i\cos 1\operatorname{sh}1] + \cos 1\operatorname{ch}1 - i\sin 1\operatorname{sh}1 - 1 = \operatorname{ch}1(\sin 1 + \cos 1) - \cos 1\operatorname{sh}1 +$$
$$+ i(\cos 1\operatorname{sh}1 - \sin 1\operatorname{sh}1 + \cos 1\operatorname{ch}1).$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_0^{1+i} z\cdot\cos z\,dz = \operatorname{ch}1(\sin 1 + \cos 1) - \cos 1\operatorname{sh}1 + i(\cos 1\operatorname{sh}1 - \sin 1\operatorname{sh}1 + \cos 1\operatorname{ch}1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L \frac{e^z dz}{z^3 + i\frac{\pi}{2}z^2}$, 1) $L_1: \left|z - \frac{3}{2}\right| = 1$, 2) $L_2: |z| = \pi$, 3) $L_3: |z| = 1$.

<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек $z=0$ и $z = -\frac{\pi i}{2}$. В круге $\left|z - \frac{3}{2}\right| = 1$ нет особых точек. Тогда по теореме Коши $I_1=0$.

2). Внутри круга $|z| \le \pi$ расположены две особые точки $z=0$ и $z = -\frac{\pi i}{2}$. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$\int\limits_{L2} \frac{e^z dz}{z^3 + i\frac{\pi}{2}z^2} = \int\limits_{l_1} \frac{e^z dz}{z^3 + i\frac{\pi}{2}z^2} + \int\limits_{l_2} \frac{e^z dz}{z^3 + i\frac{\pi}{2}z^2}$, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z=0$, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке $z = -\frac{\pi i}{2}$.

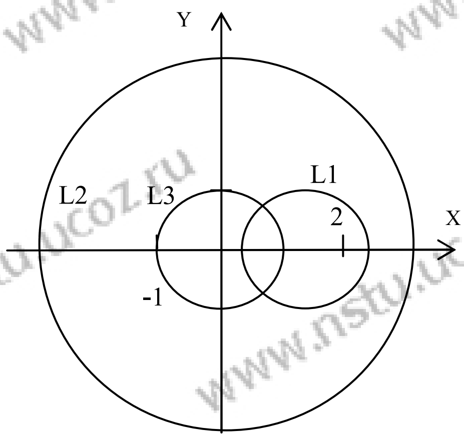
Вычислим оба интеграла по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_1} \frac{e^z dz}{z^3 + i\frac{\pi}{2}z^2} = \int\limits_{L_2} \frac{\frac{e^z dz}{z + i\pi/2}dz}{z^2} = 2\pi i\cdot\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{(z + i\pi/2)}\right)\right]_{z=0} = 2\pi i\cdot\left.\frac{e^z(z + i\pi/2) - e^z}{(z + i\pi/2)^2}\right|_{z=0} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + i\right).$$

$$\int\limits_{l_2}\frac{e^z dz}{z^3+i\dfrac{\pi}{2}z^2}=\int\limits_{l_2}\frac{\dfrac{e^z dz}{z^2}dz}{z+\dfrac{\pi}{2}i}=2\pi i\cdot\left[\left(\frac{e^z}{z^2}\right)\right]_{z=-i\frac{\pi}{2}}=-\frac{8}{\pi}.$$ Здесь учтено, что $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$

Окончательно получаем: $I_2=\int\limits_{L2}\dfrac{e^z dz}{z^3-i\dfrac{\pi}{2}z^2}=\dfrac{8}{\pi}(\dfrac{\pi}{2}+i)+\dfrac{\pi i}{8}=\dfrac{4}{\pi}(\pi-2+2i)$

3) Внутри круга $|z|\le 1$ находится одна особая точки: $z=0$. Интеграл по контуру L_3 совпадает с уже вычисленным интегралом по контуру L_1. $I_3=\int\limits_{L_3}\dfrac{e^z dz}{z^3+i\dfrac{\pi}{2}z^2}=\dfrac{8}{\pi}(\dfrac{\pi}{2}+i)$.



Ответ. $I_1=0,\quad I_2=\dfrac{4}{\pi}(\pi-2+2i),\quad I_3=\dfrac{8}{\pi}(\dfrac{\pi}{2}+i).$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\dfrac{z-6}{z^2-5z+4}$, 1) $1<|z|<4$ 2) $|z|>4$.

Решение. Корнями уравнения z^2-5z+4=0 являются числа z_1=1 и z_2=4. Разложим эту дробь на простые дроби: $\dfrac{z-6}{z^2-5z+4}=\dfrac{A}{z-4}+\dfrac{B}{z-1}=\dfrac{A(z-1)+B(z-4)}{(z-4)(z-1)}$. Или $A(z-1)+B(z-4)=z-6$. При z=4 получим A=-2/3. Если положить z=1, то получим B=5/3. Следовательно,

$\dfrac{z-6}{z^2-5z+4}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{z-4}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{z-1}$. 1). В кольце $1<|z|<4$ имеем $\dfrac{1}{|z|}<1$ и $\dfrac{|z|}{4}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом: $\dfrac{z-6}{z^2-5z+4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4(1-\dfrac{z}{4})}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{z(1-\dfrac{1}{z})}$.

Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\dfrac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби $q=z/4$, во второй дроби $q=1/z$.

Следовательно, $\dfrac{z-6}{z^2-5z+4}=\dfrac{2}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^{n+1}}+\dfrac{5}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$. 2). В кольце $|z|>4$ выполняются неравенства $\dfrac{1}{|z|}<1$ и $\dfrac{4}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-6}{z^2-5z+4}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z(1-\dfrac{4}{z})}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{z(1-\dfrac{2}{z})}=-\frac{2}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n}+\frac{5}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5-2\cdot4^{n-1}}{z^n}.$$

Ответ. 1). $\dfrac{z-6}{z^2-5z+4}=\dfrac{2}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^{n+1}}+\dfrac{5}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$. в кольце $1<|z|<4$.

2). $\dfrac{z-6}{z^2-5z+4}=\dfrac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5-2\cdot4^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>4$.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{\frac{-\pi z}{3}}}{(4z^2+1)^2}dz$ **11.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}z\cos\frac{z}{z-1}dz$

Решение. **10.** Преобразуем подинтегральную функцию: $\dfrac{e^{-\frac{\pi z}{3}}}{(4z^2+1)^2}=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{e^{-\frac{\pi z}{3}}}{(z^2+\frac{1}{4})^2}$.

Корни знаменателя: $z_1=-\dfrac{i}{2}$, $z_2=\dfrac{i}{2}$ i. Значения z_1 и z_2 являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{-\frac{i}{2}}\frac{e^{-\frac{\pi z}{3}}}{16(z^2+\frac{1}{4})^2}=\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\frac{d}{dz}\Big[\frac{(z+\frac{i}{2})^2e^{-\frac{\pi z}{3}}}{16(z+\frac{i}{2})^2(z-\frac{i}{2})^2}\Big]=\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\Big[\frac{-\frac{\pi}{3}e^{-\frac{\pi z}{3}}(z-\frac{i}{2})^2-2e^{-\frac{\pi z}{3}}(z-\frac{i}{2})}{16(z-\frac{i}{2})^4}\Big]=$$

$$=\frac{1}{16}(\frac{\pi}{3}+2i)e^{\frac{\pi}{6}i}=\frac{1}{16}(\frac{\pi}{3}+2i)(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})=\frac{1}{16}(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-1+i(\sqrt{3}+\frac{\pi}{6})),$$

$$\operatorname*{Res}_{\frac{i}{2}}\frac{e^{-\frac{\pi z}{3}}}{16(z^2+\frac{1}{4})^2}=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{d}{dz}\Big[\frac{(z-\frac{i}{2})^2e^{-\frac{\pi z}{3}}}{16(z+\frac{i}{2})^2(z-\frac{i}{2})^2}\Big]=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\Big[\frac{-\frac{\pi}{3}e^{-\frac{\pi z}{3}}(z+\frac{i}{2})^2-2e^{-\frac{\pi z}{3}}(z+\frac{i}{2})}{16(z+\frac{i}{2})^4}\Big]=$$

$$=\frac{1}{16}(\frac{\pi}{3}+2i)e^{-\frac{\pi}{6}i}=\frac{1}{16}(\frac{\pi}{3}-2i)(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})=\frac{1}{16}(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-1-i(\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}))$$

Получим окончательно:

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^{\frac{-\pi z}{3}}}{(4z^2+1)^2}dz=\frac{2\pi i}{16}(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-1+i(\sqrt{3}+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-1-i(\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}))=\frac{\pi i}{8}(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-2).$$

11. Преобразуем подинтегральную функцию:

$z\cos\dfrac{z}{z-1}=z\cos\dfrac{z-1+1}{z-1}=z\cos(1+\dfrac{1}{z-1})=z(\cos1\cos\dfrac{1}{z-1}-\sin1\sin\dfrac{1}{z-1})$. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку $z=1$. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функций $\cos w$ и $\sin w$ по степеням w:

$\cos(w)=1-\dfrac{w^2}{2!}+\dfrac{w^4}{4!}-\dfrac{w^6}{6!}+...,\quad \sin(w)=w-\dfrac{w^3}{3!}+\dfrac{w^5}{5!}-\dfrac{w^7}{7!}+...$ Полагая $w=\dfrac{1}{z-1}$, получим:

$$z\cos\frac{z}{z-1}=z\{\cos1[1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\frac{1}{24(z-1)^4}-\frac{1}{720(z-1)^6}+...]-\sin1[\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{6(z-1)^3}+$$

$$+\frac{1}{120(z-1)^5}+...]\}=\cos1[1-\frac{z-1+1}{2(z-1)^2}+\frac{z}{24(z-1)^4}-\frac{z}{720(z-1)^6}+...]-\sin1[\frac{z-1+1}{(z-1)}-\frac{z}{6(z-1)^3}+$$

$$+\frac{z}{120(z-1)^5}+...]\}=\cos1[1-\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z-1)^2}+...]-\sin1[1+\frac{1}{(z-1)}-\frac{z}{6(z-1)^3}+...]$$

Последующие слагаемые не содержат степени $(z-1)^{-1}$. Коэффициентом при $(z-1)^{-1}$ в разложении функции будет число $-(\dfrac{1}{2}\cos1+\sin1)$. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z-1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{1}[z\cos\dfrac{z}{z-1}]=-(\dfrac{1}{2}\cos1+\sin1)$.

Следовательно.

$$\oint_{|z|=2}z\cos\frac{z}{z-1}dz=-2\pi i\cdot(\frac{1}{2}\cos1+\sin1)=-\pi i(\cos1+2\sin1).$$

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{\frac{-\pi z}{3}}}{(4z^2+1)^2}\,dz = \frac{\pi i}{8}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$. 11. $\int\limits_{|z|=2} z\cos\frac{z}{z-1}\,dz = -\pi i(\cos 1 + 2\sin 1)$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$:

$z = \sqrt[6]{-1} = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{6} + i\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{6}$. Полагая здесь к=0, 1, 2, находим три корня, лежащие в верхней половине комплекснойплоскости:

$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$. Остальные три корня являются сопряжёнными по отношению к найденным корням и находятся в нижней полуплоскости. Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{z^6+1} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{1}{z^6+1} + \operatorname*{Res}_{z_2}\frac{1}{z^6+1} + \operatorname*{Res}_{z_3}\frac{1}{z^6+1}\right).$$

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} \frac{\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)}{(z^2+1)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\left[\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]} = \frac{1}{\frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})i(3+i\sqrt{3})} = \frac{-i}{3(1+i\sqrt{3})}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2}\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)}{(z+i)(z-i)\left[\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]} = \frac{1}{2i(-i\sqrt{3})(i\sqrt{3})} = \frac{1}{6i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_3}\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} \frac{\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)}{(z^2+1)\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\left[\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]} = \frac{1}{\frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})i(3-i\sqrt{3})} = \frac{-i}{3(1-i\sqrt{3})}.$$

Следовательно. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2\pi i\left(\frac{-i(1-i\sqrt{3})+1+i\sqrt{3})}{3(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} + \frac{1}{6i}\right) = 2\pi i\cdot\left(\frac{2}{12i}+\frac{1}{6i}\right) = \frac{2\pi}{3}.$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}.$

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой С от точки z_1 до точки z_2.*

$\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z-i}}$, где С: прямая, $z_1=1+i$, $z_2=0$, $\sqrt{1}=-1$.

Решение. Точки z_1 и z_2 не являются особыми точками для подинтегральной функции. Следовательно, можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z-i}} = 2\sqrt{z-i}\Big|_{z_1}^{z_2} = 2\left(\sqrt{z_2-i}-\sqrt{z_1-i}\right)$. Рассмотрим функцию

$\sqrt{z-i} = \sqrt{|z-i|}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{2}\right)$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=i+1 функция будет принимать заданное значение. С одной стороны

$\sqrt{i+1-i}=\sqrt{1}=\cos\frac{2k\pi}{2}+i\sin\frac{2k\pi}{2}$. С другой стороны $\sqrt{i+1-i}=\sqrt{1}=-1=\cos(\pi)+i\sin(\pi)$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение к=1. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt{z-i}=\sqrt{|z-i|}(\cos\frac{\varphi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{2})$. Таким образом,

$\sqrt{z_1-i}=\sqrt{1+i-i}=\sqrt{1}=\sqrt{1}(\cos\pi+i\sin\pi)=-1$,

$\sqrt{z_2-i}=\sqrt{-i}=\cos\frac{-\pi/2+2\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi/2+2\pi}{2})=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\int_C\frac{dz}{\sqrt{z-i}}=2\sqrt{z-i}\Big|_{z_1}^{z_2}=2(\sqrt{z_2-i}-\sqrt{z_1-i})=2(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}+1)=2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}.$$

Ответ. $\int_C\frac{dz}{\sqrt{z-i}}=2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.