Вариант 13

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\mathrm{Arch}2i$; б) $\sqrt[6]{-64}$

<u>Решение</u>. а). Будем вычислять Arch3 по формуле $\mathrm{Arch}(z) = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$. В данном примере z=2i, следовательно, $\mathrm{Arch}\,2i = \mathrm{Ln}(2i \pm \sqrt{-5}) = \mathrm{Ln}(2i \pm i\sqrt{5})$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае у функции Ln(z) имеется два значения z: $z_1 = (2 + \sqrt{5})i$ и $z_2 = (2 - \sqrt{5})i$. Найдём модули и аргументы этих чисел:

$|z_1| = 2 + \sqrt{5}$, $\varphi_1 = \arg z_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $|z_2| = \sqrt{5} - 2$, $\varphi_2 = \arg z_2 = -\dfrac{\pi}{2}$, так как $2 - \sqrt{5} < 0$. Таким образом $\mathrm{Arch}\,2i = \mathrm{Ln}((2 \pm \sqrt{5})i) = \ln(\sqrt{5} \pm 2) + i\pi(2k \pm \dfrac{1}{2})$.

б) Воспользуемся формулой $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n})$. В данном случае

$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{|-64|} \cdot (\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{6}) = 2 \cdot (\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{6})$. При k=0, 1, 2 получаем первые три корня: $z_1 = 2 \cdot (\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}) = 2 \cdot (\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}) = \sqrt{3} + i$,

$z_2 = 2 \cdot (\cos\dfrac{\pi + 2\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi + 2\pi}{6}) = 2i$, $z_3 = 2 \cdot (\cos\dfrac{\pi + 4\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi + 4\pi}{6}) = 2 \cdot (-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}) = -\sqrt{3} + i$.

Следующие три корня являются сопряжёнными по отношению к первым трём корням: $z_4 = \sqrt{3} - i$, $z_5 = -2i$, $z_6 = -\sqrt{3} - i$.

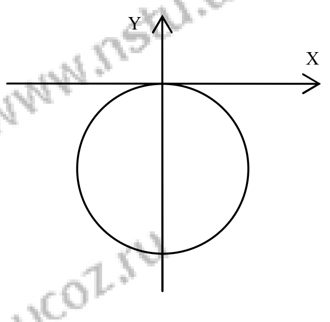
<u>Ответ</u>. а) $\mathrm{Arch}\,2i = \ln(\sqrt{5} \pm 2) + i\pi(2k \pm \dfrac{1}{2})$; б). $z = \pm\sqrt{3} \pm i$, $z = \pm 2i$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$\mathrm{Im}\frac{1}{z} = 1.$$

<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $\mathrm{Im}\dfrac{1}{x + iy} = 1$.

Или $\mathrm{Im}\dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} = 1$. Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его,



получим: $x^2 + y^2 = -y$. Выделяя полный квадрат суммы, можно записать: $x^2 + (y + \dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{1}{4}$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет окружность радиуса 1/2 с центром в точке (0; -1/2)

Задача 3. *Решить уравнение*: $4i \cdot \mathrm{ch}\,iz = 3$.

<u>Решение</u>. Перейдём от гиперболической функции к функции e^{iz}: $4i\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 3$. Умножим всё уравнение на e^{iz}, получим $2i(e^{2iz} + 1) = 3e^{iz}$. Обозначим $v = e^{iz}$ и решим квадратное уравнение

$2iv^2 - 3v + 2i = 0$, $v_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4i} = \dfrac{3 \pm 5}{4i}$. Таким образом,

$v_1 = e^{iz} = \dfrac{2}{i} = -2i$ или $z_1 = \mathrm{Ln}(-2) = [\ln|-2| + i(\pi + 2k\pi)] = \ln 2 + (2k + 1)\pi$. Аналогично,

$v_1 = e^{iz} = -\dfrac{1}{2i} = \dfrac{i}{2}$ или $z_2 = \mathrm{Ln}(\dfrac{1}{2}) = [\ln\left|\dfrac{1}{2}\right| + i(0 + 2k\pi)] = -\ln 2 + 2k\pi$

Ответ. $z_1 = \ln 2 + (2k+1)\pi, \quad z_2 = -\ln 2 + 2k\pi$

Задача 4. *Доказать тождество.* $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Решение. Перейдём к гиперболическим функциям, пользуясь равенствами $\cos z = \operatorname{ch} iz,\ \sin z = -i \cdot \operatorname{sh} iz$, и рассмотрим левую часть тождества:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \operatorname{ch}^2 iz - \operatorname{sh}^2 iz = \frac{(e^{iz}+e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz}-e^{-iz})^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} - e^{-2iz}) = = \frac{4e^{2iz}e^{-2iz}}{4} = 1$$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной мнимой части её:*

$$\operatorname{Im} f(z) = v = \frac{2x}{x^2 + Ay^2} + y + 1, \text{ если } f(i)=2(1+i).$$

Решение. Чтобы функция $v(x,y)$ бала мнимой частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δv был бы равен нулю: $\Delta v=0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от v по x и по y:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(x^2+Ay^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+Ay^2)^2} = \frac{2(Ay^2 - x^2)}{(x^2+Ay^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{-4x(x^2+Ay^2)^2 - 8x(x^2+Ay^2)(Ay^2-x^2)}{(x^2+Ay^2)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2-3Ay^2)}{(x^2+Ay^2)^3}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{4Axy}{(x^2+Ay^2)^2} + 1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{4Ax(x^2+Ay^2)^2 - 16A^2xy^2(x^2+Ay^2)}{(x^2+Ay^2)^4} =$$

$$= -\frac{4Ax(x^2-3Ay^2)}{(x^2+Ay^2)^3}$$. Чтобы лапласиан Δv был равен нулю, нужно положить $A=1$. Таким образом, функция $v(x,y) = \frac{2x}{x^2+1y^2} + y + 1$ является гармонической.

Восстановим действиительную часть $u(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} + 1$. Тогда $u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y)$, или

$u(x,y) = -\int \{\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} - 1\} dx + \varphi(y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)} + x + \varphi(y)$. Производная по y от этого выражения равна $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(y) = 0$. Или $\varphi(y) = +C$. Таким образом, $u(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)} + C$. Тогда

$f(z) = \frac{2y}{(x^2+y^2)} + x + C + i(\frac{2x}{x^2+y^2} + y + 1)$. Перейдём к переменной z:

$f(z) = \frac{2y+2ix}{(x^2+y^2)} + x + iy + C + i = \frac{2i\bar{z}}{z\bar{z}} + z + C + i = \frac{2i}{z} + z + C + i$. Воспользуемся дополнительным условием $f(i)=2(1+i)$. В данном случае $f(i) = 2 + i + C + i$. Следовательно, $C=0$.

Ответ. $f(z)=-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)}+x+i(\dfrac{2x}{x^2+y^2}+y+1)=\dfrac{2i}{z}+z-1.$

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z\,dz;\qquad C-\text{прямая},\quad z_1=0,\ z_2=1+i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_C udx-vdy+i\int\limits_C udy+vdx$. В данном случае $f(z)=(x+iy)x$, т.е. $u=x^2$, $v=xy$. Значит $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,zdz=\int\limits_C x^2dx-xydy+i\int\limits_C x^2dy+xydx$. Примем x за параметр. Составим уравнение прямой, по которой проводится интегрирование: $\dfrac{y}{1}=\dfrac{x}{1}$, т.е. $y=x,\quad dy=dx$.

Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение $x=0$, конечной $z_2=1+i$ – значение $x=1$.

Следовательно, $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z\,dz=2\int\limits_0^1(x^2-x^2)dx+i\int\limits_0^1(x^2+x^2)dx=i\dfrac{2x^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{2i}{3}$.

Ответ. $\int\limits_C z\,\mathrm{Re}\,z\,dz=\dfrac{2i}{3}$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_0^i(z+1)\cdot\mathrm{sh}\,z\,dz$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

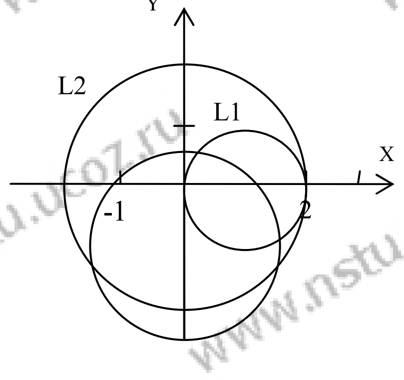
$$\int\limits_0^i(z+1)\cdot\mathrm{sh}\,z\,dz=\begin{vmatrix}u=z+1 & du=dz\\ dv=\mathrm{sh}\,z\,dz & v=\mathrm{ch}\,z\end{vmatrix}=(z+1)\cdot\mathrm{ch}\,z\Big|_0^i-\int\limits_0^i\mathrm{ch}\,z\,dz=(i+1)\cdot\mathrm{ch}\,i-\mathrm{sh}\,z\Big|_0^i=$$

$=(i+1)\cdot\mathrm{ch}\,i-1-\mathrm{sh}\,i$. Перейдём к тригонометрическим функциям: $\mathrm{sh}\,i=i\sin 1,\quad \mathrm{ch}\,i=\cos 1$.

Получим: $\int\limits_0^i(z+1)\cdot\mathrm{sh}\,z\,dz=\mathrm{ch}1-1+i(\mathrm{ch}1-\sin 1)$.

Ответ. $\int\limits_0^i(z+1)\cdot\mathrm{sh}\,z\,dz=\mathrm{ch}1-1+i(\mathrm{ch}1-\sin 1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L\dfrac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)}$, 1) $L_1:\ |z-1|=1$, 2) $L_2:\ |z|=2$, 3) $L_3:\ |z+i|=\sqrt{2}$.



Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек $z=-i$ и $z=i$. В круге $|z\ -\ |\le 1$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно, $I_1=\int\limits_{L_1}\dfrac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)}=0$. 2). В круге $|z|\le 2$ есть две особые точки $z=-i$ и $z=i$. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$$I_2=\int\limits_{L2}\frac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)}=\int\limits_{l_1}\frac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)}+\int\limits_{l_2}\frac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)},$$ где

L_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z=-i$, а L_2 - окружность малого радиуса с центром в точке $z=i$. Вычислим интегралы по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_1}\frac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)}=\int\limits_{l_1}\frac{\frac{e^{z-i}}{z-i}dz}{(z+i)^2}=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{z-i}}{z-i}\right]_{z=-i}=2\pi i\left.\frac{e^{z-i}(z-i)-e^{z-i}}{(z-i)^2}\right|_{z=-i}=\frac{\pi i e^{-2i}(1+2i)}{2},$$

$$\int\limits_{l_2}\frac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)}=\int\limits_{l_2}\frac{\frac{e^{z-i}}{(z+i)^2}dz}{(z-i)}=2\pi i\left[\frac{e^{z-i}}{(z+i)^2}\right]_{z=i}=-\frac{\pi i}{2}.$$ Следовательно,

$$I_2=\int\limits_{L2}\frac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)}=[\frac{\pi i e^{-2i}(1+2i)}{2}-\frac{\pi i}{2}]=\frac{\pi i}{2}[(1+2i)(\cos 2-i\sin 2)-1]=$$

$$=\frac{\pi}{2}[\sin 2-2\cos 2+i(\cos 2+2\sin 2-1)]$$

3). Внутри области $|z+i|\le\sqrt{2}$ расположена одна особая точка z=-i. Интеграл по контуру L_3 совпадает с уже вычисленным интегралом по контуру L_1:

$$I_3=\int\limits_{l_1}\frac{e^{z-i}dz}{(z^2+1)(z+i)}=\frac{\pi i e^{-2i}(1+2i)}{2}=\frac{\pi i}{2}(1+2i)(\cos 2-i\sin 2)=\frac{\pi i}{2}(\cos 2-i\sin 2+2i\cos 2+2\sin 2)=$$

$$=\frac{\pi}{2}[\sin 2-2\cos 2+i(\cos 2+2\sin 2)]$$

<u>Ответ</u>. $I_1=0,\ I_2=\frac{\pi}{2}[\sin 2-2\cos 2+i(\cos 2+2\sin 2-1)],\ I_3=\frac{\pi}{2}[\sin 2-2\cos 2+i(\cos 2+2\sin 2)].$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z+1}{z^2+z-6}$, 1) $2<|z|<3$ 2) $|z|>3$. 3) $5<|z+3|$;

<u>Решение</u>. Корнями уравнения z^2-5z+4=0 являются числа z_1=2 и z_2=-3. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z+1}{z^2+z-6}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+3}=\frac{A(z+3)+B(z-2)}{(z-2)(z+3)}$. Или $A(z+3)+B(z-2)=z+1$. При z=2 получим A=3/5. Если положить z=-3, то получим B=2/5. Следовательно, $\frac{z+1}{z^2+z-6}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+3}$. 1). В кольце $2<|z|<3$ имеем $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{3}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z+1}{z^2+z-6}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3(1+\frac{z}{3})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=2/z, во второй дроби q=-z/3. Следовательно,

$\frac{z+1}{z^2+z-6}=\frac{3}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\frac{2}{5}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>3$ выполняются неравенства $\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{3}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z+1}{z^2+z-6}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}=\frac{3}{5}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\frac{2}{5}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}=\frac{1}{5}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^{n-1}-2\cdot(-3)^{n-1}}{z^n}.$$

3) $5<|z+3|\Rightarrow\frac{5}{|z+3|}<1;$

$$\frac{z+1}{z^2+z+6}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{(z+3)(z-\dfrac{5}{z+3})}=\frac{2}{5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}+\frac{3}{5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(z+3)^{n+1}};$$

$$\frac{z+1}{z^2+z+6}=\frac{2}{5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}+\frac{3}{5}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(z+3)^{n+1}};$$

Ответ. 1). $\dfrac{z+1}{z^2+z-6}=\dfrac{3}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{z^n}+\dfrac{2}{5}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$. в кольце $2<|z|<3$.

2). $\dfrac{z+1}{z^2+z-6}=\dfrac{1}{5}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 2^{n-1}-2\cdot(-3)^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>3$.

3) $\dfrac{z+1}{z^2+z+6}=\dfrac{2}{5}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}+\dfrac{3}{5}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(z+3)^{n+1}}$; в кольце $5<|z+3|$;

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{\mathrm{sh}^2\pi z}{(z^2+4)^2}dz$ **11.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}(z+1)^2\sin\frac{3}{z}dz$

Решение. **10.** Корни знаменателя: $z_1=-2i$, $z_2=2i$. Значения z_1 и z_2 являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{-2i}\frac{\mathrm{sh}^2\pi z}{(z^2+4)^2}=\lim_{z\to-2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2i)^2\,\mathrm{sh}^2\pi z}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\right]=\lim_{z\to-2i}\left[\frac{2\pi\cdot\mathrm{sh}\pi z\cdot\mathrm{ch}\pi z\cdot(z-2i)^2-2(z-2i)\mathrm{sh}^2\pi z}{(z-2i)^4}\right]=$$

$=\dfrac{1}{256}(-32\pi\,\mathrm{sh}(2\pi i)\cdot\mathrm{sh}(2\pi i)+8i\,\mathrm{sh}^2 2\pi i)=0$, Здесь учтено, что $\mathrm{sh}(2\pi i)=i\sin(2\pi)=0$.

$$\operatorname*{Res}_{2i}\frac{\mathrm{sh}^2\pi z}{(z^2+4)^2}=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2i)^2\,\mathrm{sh}^2\pi z}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\right]=\lim_{z\to 2i}\left[\frac{2\pi\cdot\mathrm{sh}\pi z\cdot\mathrm{ch}\pi z\cdot(z+2i)^2-2(z+2i)\mathrm{sh}^2\pi z}{(z+2i)^4}\right]=$$

$=\dfrac{1}{256}(-32\pi\,\mathrm{sh}(2\pi i)\cdot\mathrm{sh}(2\pi i)-8i\,\mathrm{sh}^2 2\pi i)=0$. Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=4}\frac{\mathrm{sh}^2\pi z}{(z^2+4)^2}dz=2\pi i\cdot 0=0.$$

11.). Подынтегральная функция имеет существенно особую точку $z=0$. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции $\sin(w)$ по степеням w:

$\sin(w)=w-\dfrac{w^3}{3!}+\dfrac{w^5}{5!}-\dfrac{w^7}{7!}+\ldots$ Полагая $w=\dfrac{3}{z}$, получим:

$$(z+1)^2\sin\frac{3}{z}=(z+1)^2\left(\frac{3}{z}-\frac{3^3}{3!z^3}+\frac{3^5}{5!z^5}-\ldots\right)=\frac{3(z+1)^2}{z}-\frac{27(z+1)^2}{6z^3}+\frac{3^5(z+1)^2}{5!z^5}-\ldots=3z+6+\frac{3}{z}-$$

$-\dfrac{9}{2z}-\dfrac{9}{z^2}-\dfrac{9}{2z^3}+\dfrac{3^5(z+1)^2}{5!z^5}-\ldots$ Последующие слагаемые не содержат степени z^{-1}.

Коэффициентом при z^{-1} в разложении функции будет число $-\dfrac{3}{2}$. Вычет данной функции равен коэффициенту при z^{-1} в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{0}\left[(z+1)^2\sin\dfrac{3}{z}\right]=-\dfrac{3}{2}$.

Следовательно. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}(z+1)^2\sin\frac{3}{z}dz=2\pi i\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3\pi i$.

Ответ. 10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi z}{(z^2+4)^2} dz = 0$. 11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} (z+1)^2 \sin\frac{3}{z} dz = -3\pi i$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

Решение. Корнями знаменателя функции $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ являются числа $z_{1,2} = \pm i, \quad z_{3,4} = \pm 2i$. В данном случае в верхней полуплоскости расположены два полюса z=i и z=2i данной функции.

Тогда $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} + \operatorname*{Res}_{2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)})$.

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)z^2}{(z+i)(z-i)(z^2+4)} = \frac{-1}{6i},$$

$$\operatorname*{Res}_{2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)z^2}{(z+2i)(z-2i)(z^2+1)} = \frac{-4}{4i(-3)} = \frac{1}{3i}.$$

Следовательно. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{2\pi i}{2}(-\frac{1}{6i} + \frac{1}{3i}) = \frac{\pi}{3}$.

Ответ. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{3}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой С от точки z_1 до точки z_2.*

$\displaystyle\int_C \frac{dz}{\sqrt[3]{z+i}}$, где С: прямая, $z_1=8-i$, $z_2=0$, $\sqrt[3]{8} = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Точки z_1 и z_2 не являются особыми точками для подинтегральной функции. Следовательно, можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$\displaystyle\int_C \frac{dz}{\sqrt[3]{z+i}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(z+i)^2}\Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{(z_2+i)^2} - \sqrt[3]{(z_1+i)^2})$. Рассмотрим функцию $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{3})$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=8 функция будет принимать заданное значение. С одной стороны $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{|8|}(\cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3}) = 2(\cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3})$. С другой стороны $\sqrt[3]{8} = -1 - i\sqrt{3} = 2(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2})$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=2. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение. $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}(\cos\dfrac{\varphi+4\pi}{3} + i\sin\dfrac{\varphi+4\pi}{3})$. Таким образом,

$$\sqrt[3]{(z_1+i)^2} = \sqrt[3]{8^2} = 4(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -4(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}),$$

$\displaystyle\sqrt[3]{(z_2+i)^2} = \sqrt[3]{i^2} = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt[3]{z+i}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(z+i)^2}\Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{(z_2+i)^2} - \sqrt[3]{(z_1+i)^2}) = \frac{3}{2}(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + 4(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})) = \frac{3}{4}(5 + i3\sqrt{3}) .$$

<u>Ответ</u>. $\int_C \frac{dz}{\sqrt[3]{z+i}} = \frac{3}{4}(5 + i3\sqrt{3})$.