Вариант 14

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\mathrm{Arch}2i$; б) $\sqrt[3]{i-1}$

<u>Решение</u>. а). Будем вычислять Arch3 по формуле $\mathrm{Arch}(z) = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$. В данном примере z=2i, следовательно, $\mathrm{Arch}\,2i = \mathrm{Ln}(2i \pm \sqrt{-5}) = \mathrm{Ln}(2i \pm i\sqrt{5})$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. В данном случае у функции Ln(z) имеется два значения z: $z_1 = (2+\sqrt{5})i$ и $z_2 = (2-\sqrt{5})i$. Найдём модули и аргументы этих чисел: $|z_1| = 2+\sqrt{5}$, $\varphi_1 = \arg z_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $|z_2| = \sqrt{5}-2$, $\varphi_2 = \arg z_2 = -\dfrac{\pi}{2}$, так как $2-\sqrt{5} < 0$. Таким образом $\mathrm{Arch}\,2i = \mathrm{Ln}((2\pm\sqrt{5})i) = \ln(\sqrt{5}\pm 2) + i\pi(2k \pm \dfrac{1}{2})$.

б) Воспользуемся формулой $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\cdot(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n})$. В данном случае $\sqrt[3]{i-1} = \sqrt[3]{|i-1|}\cdot(\cos\dfrac{3\pi/4+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{3\pi/4+2k\pi}{3}) = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot(\cos(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{3}))$. При k=0, 1, 2 получаем корни: $z_1 = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt[6]{2}\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1+i}{\sqrt[3]{2}}$,

$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot(\cos(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3})) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12})$,

$z_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot(\cos(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4\pi}{3})) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12})$. Найдём значения синусов и косинусов: $\cos\dfrac{11\pi}{12} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos\dfrac{11\pi}{6})} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2})} = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Тогда

$\sin\dfrac{11\pi}{12} = \pm\sqrt{1-\cos^2\dfrac{11\pi}{12}} = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{4}(2+\sqrt{3})} = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Аналогично,

$\cos\dfrac{19\pi}{12} = \cos(\dfrac{7\pi}{12}+\pi) = -\cos\dfrac{7\pi}{12} = \mp\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos\dfrac{7\pi}{6})} = \mp\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2})} = \mp\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Тогда

$\sin\dfrac{19\pi}{12} = \pm\sqrt{1-\cos^2\dfrac{19\pi}{12}} = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{4}(2-\sqrt{3})} = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Знаки синуса и косинуса определяем по расположению корней на комплексной плоскости. Корень z_2 расположен во второй четверти, а корень z_3 расположен в четвёртой четверти. Следовательно,

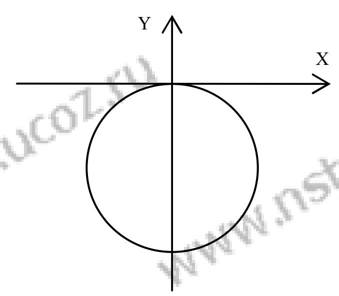
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}\cdot(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}(-\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}),$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}\cdot(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}).$$

<u>Ответ</u>. а) $\mathrm{Arch}\,2i = \ln(\sqrt{5}\pm 2) + i\pi(2k\pm\dfrac{1}{2})$; б). $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt[3]{2}}$. $z_2 = \dfrac{\sqrt[6]{2}}{2}(-\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})$, $z_3 = \dfrac{\sqrt[6]{2}}{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}})$

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$\mathrm{Im}\frac{1}{z} < 1.$$



<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $\mathrm{Im}\dfrac{1}{x+iy} < 1$.

Или $\operatorname{Im}\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}<1$. Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим: $x^2+y^2>-y$. Выделяя полный квадрат суммы, можно записать: $x^2+(y+\frac{1}{2})^2>\frac{1}{4}$.

Ответ. Данное соотношение определяет область, расположенную вне круга радиуса 1/2 с центром в точке (0; -1/2).

Задача 3. *Решить уравнение*: $e^{2z}-(2+3i)e^z+3i=1$.

Решение. Обозначим V=e^Z и решим квадратное уравнение V^2-(2+3i)V+3i-1=0:

$V_{1,2}=\frac{2+3i}{2}\pm\sqrt{\frac{(2+3i)^2}{4}-\frac{12i-4}{4}}=\frac{2+3i}{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}=\frac{2+3i}{2}\pm\frac{i}{2}=\frac{2+(3\pm1)i}{2}$. Таким образом, имеем два корня: $V_1=1+2i,\quad V_2=1+i$.

Найдём модули и аргументы этих чисел: $|V_1|=\sqrt{5},\quad \arg V_1=\operatorname{arctg}2,\quad |V_2|=\sqrt{2},\quad \arg V_2=\frac{\pi}{4}$.

Так как V=e^Z, то z=LnV. Далее воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}V=\ln|V|+i(\varphi+2k\pi)$.

Получим: $z_1=\operatorname{Ln}V_1=\ln\sqrt{5}+i(\operatorname{arctg}2+2k\pi),\qquad z_2=\operatorname{Ln}V_2=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi i}{4}+2k\pi i$

Ответ. $z_1=\ln\sqrt{5}+i\cdot\operatorname{arctg}2+2k\pi i,\qquad z_2=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi i}{4}+2k\pi i$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\sin(z+\pi)=-\sin z$.

Решение. Перейдём к синусу гиперболическому по формуле $\sin z=-i\cdot\operatorname{sh} iz$ и рассмотрим левую часть тождества:

$$\sin(z+\pi)=-i\cdot\operatorname{sh}(iz+\pi i)=-i\frac{e^{iz+\pi i}-e^{-iz-\pi i}}{2}=-\frac{i}{2}(e^{-iz}e^{\pi i}-e^{-iz}e^{-\pi i})=-\frac{i}{2}(e^{iz}(\cos\pi+i\sin\pi)-$$

$$-e^{-iz}(\cos\pi-i\sin\pi))=-\frac{i}{2}(e^{iz}(-1)-e^{-iz}(-1))=\frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz})=i\cdot\operatorname{sh} iz=-\sin z$$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\operatorname{Re} f(z)=u=\ln\sqrt{x^2+y^2}, \text{ если } f(i)=0.$$

Решение. Чтобы функция u(x,y) бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: Δu=0, $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{x^2+y^2}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2}=-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$. Лапласиан Δu равен нулю, значит функция $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ является гармонической. Восстановим мнимую часть v(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$

Из первого условия получаем: $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Тогда $v(x,y)=\int\dfrac{\partial v}{\partial y}dy+\varphi(x)$, или $v(x,y)=\int\dfrac{xdy}{x^2+y^2}+\varphi(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+\varphi'(x)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x)=0$.

Или $\varphi(x)=C$. Таким образом, $v(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+C$. Тогда $f(z)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+C)$.

Или, через переменную z $f(z)=\ln z+iC$.

Воспользуемся дополнительным условием f(i)=0. В данном случае

$f(i)=f(0+1\cdot i)=i(\operatorname{arctg}(\infty)+C)=i(\dfrac{\pi}{2}+C)$. Следовательно, C=-π/2.

<u>Ответ</u>. $f(z)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{\pi}{2})=\ln z-i\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C \bar{z}\operatorname{Im} z\,dz;\qquad C-\text{прямая},\quad z_1=0,\ z_2=4+2i.$$

<u>Решение</u>. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=(x-iy)y, т.е. u=xy, v=-y^2. Значит $\int_C \bar{z}\operatorname{Im} zdz=\int_C xydx+y^2dy+i\int_C xydy-y^2dx$. Примем x за параметр. Составим уравнение прямой, по которой проводится интегрирование: $\dfrac{y}{2}=\dfrac{x}{4}$, т.е. $y=\dfrac{x}{2},\quad dy=\dfrac{dx}{2}$.

Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение x=0, конечной $z_2=4+2i$ – значение x=4.

Следовательно, $\int_C \bar{z}\operatorname{Im} z\,dz=\dfrac{1}{2}\int_0^4(x^2+\dfrac{1}{4}x^2)dx+i\dfrac{1}{4}\int_0^4(x^2-x^2)dx=\left.\dfrac{5x^3}{8\cdot 3}\right|_0^4=\dfrac{40}{3}$.

<u>Ответ</u>. $\int_C \bar{z}\operatorname{Im} z\,dz=\dfrac{40}{3}$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_1^i (z-1)\cdot\operatorname{ch} z\,dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^i (z-1)\cdot\operatorname{ch} z\,dz=\begin{vmatrix}u=z-1 & du=dz\\ dv=\operatorname{ch} z\,dz & v=\operatorname{sh} z\end{vmatrix}=(z-1)\cdot\operatorname{sh} z\Big|_1^i-\int_1^i\operatorname{sh} z\,dz=(i-1)\cdot\operatorname{sh} i-\operatorname{ch} z\Big|_1^i=$$
$$=(i-1)\cdot\operatorname{sh} i-\operatorname{ch} i+\operatorname{ch}1.$$

Перейдём к тригонометрическим функциям: $\operatorname{sh} i=i\sin 1,\quad \operatorname{ch} i=\cos 1$. Получим:

$$\int_1^i (z-1)\cdot\operatorname{ch} z\,dz=\operatorname{ch}1-\sin 1-\cos 1-i\sin 1.$$

<u>Ответ</u>. $\int_1^i (z-1)\cdot\operatorname{ch} z\,dz=\operatorname{ch}1-\sin 1-\cos 1-i\sin 1$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по конту-*

рам L_1, L_2, L_3.

$$\int\limits_L \frac{\sin z\,dz}{(z-\frac{\pi}{6})(z-\pi)^2},\quad 1)\ L_1:(x+1)^2+\frac{y^2}{4}=1\left|z-1\right|=1,\quad 2)\ L_2:\ \left|z+1\right|=2,\quad 3)\ L_3:\ \left|z-2\right|=2.$$

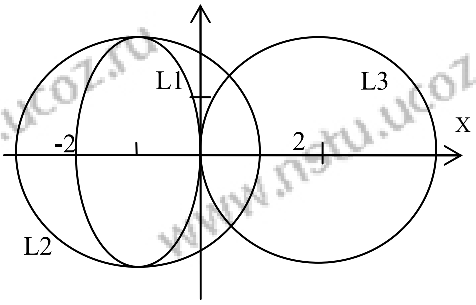
<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=π/6 и z= π. Внутри эллипса $(x+1)^2+\frac{y^2}{4}\le 1$ нет особых точек. Тогда по теореме Коши $I_1=0$.

2). Внутри области $\left|z+1\right|\le 2$ расположена одна особая точка π/6. Тогда по интегральной формуле Коши:

$$I_2=\int\limits_L \frac{\sin z dz}{(z-\frac{\pi}{6})(z-\pi)^2}=\int\limits_{L_2}\frac{\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}dz}{(z-\frac{\pi}{6})}=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}\right]_{z=\frac{\pi}{6}}=2\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{(\frac{\pi}{6}-\pi)^2}=\frac{36i}{25\pi}$$

3) В круге $\left|z-2\right|\le 2$ находится две особых точки: z=π/6 и z= π. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:



$$I_3=\int\limits_{L_3}\frac{\sin z dz}{(z-\frac{\pi}{6})(z-\pi)^2}=\int\limits_{l_1}\frac{\sin z dz}{(z-\frac{\pi}{6})(z-\pi)^2}=\int\limits_{l_2}\frac{\sin z dz}{(z-\frac{\pi}{6})(z-\pi)^2}$$

, где L_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z= π/6, а L_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z= π. Первый интеграл в этой сумме совпадает с I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{L_3}\frac{\sin z dz}{(z-\frac{\pi}{6})(z-\pi)^2}=\int\limits_{L_3}\frac{\frac{\sin z dz}{(z-\pi/6)}dz}{(z-\pi)^2}=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{\sin z dz}{(z-\frac{\pi}{6})}\right]_{z=\pi}=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\left[\frac{\cos z\cdot(z-\pi/6)-\sin z}{(z-\pi/6)^2}\right]_{z=\pi}=$$

$$=2\pi i\cdot\frac{-\frac{5\pi}{6}\cdot 36}{25\pi^2}=-\frac{12i}{5}.$$ Тогда $I_3=\frac{36i}{25\pi}-\frac{12\pi i}{5}=\frac{12}{25\pi}(3-5\pi)i..$

<u>Ответ</u>. $I_1=0,\quad I_2=\frac{36i}{25\pi},\quad I_3=\frac{12}{25\pi}(3-5\pi)i..$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$$\frac{z-2}{z^2+5z+6},\qquad 1)\quad 2<\left|z\right|<3\qquad 2)\quad \left|z\right|>3.\qquad 3)\quad 1<|z+2|.$$

<u>Решение</u>. Корнями уравнения $z^2+5z+6=0$ являются числа $z_1=-2$ и $z_2=-3$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-2}{z^2+5z+6}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z+3}=\frac{A(z+3)+B(z+2)}{(z+2)(z+3)}$. Или

$A(z+3)+B(z+2)=z-2$. При z=-2 получим A=-4. Если положить z=-3, то получим B=5. Следовательно, $\frac{z-2}{z^2+5z+6}=-4\cdot\frac{1}{z+2}+5\cdot\frac{1}{z+3}$. 1). В кольце $2<\left|z\right|<3$ имеем

$\frac{2}{|z|} < 1$ и $\frac{|z|}{3} < 1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-2}{z^2+5z+6} = -4 \cdot \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} + 5 \cdot \frac{1}{3(1+\frac{z}{3})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$, где $|q| < 1$. В первой дроби q=-2/z, во второй дроби q= -z/3. Следовательно,

$$\frac{z-2}{z^2+5z+6} = -4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n} + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{z^n} + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}.$$

2). В кольце $|z| > 3$ выполняются неравенства $\frac{2}{|z|} < 1$ и $\frac{3}{|z|} < 1$. Следовательно,

$$\frac{z-2}{z^2+5z+6} = -4 \cdot \frac{1}{z(1+\frac{2}{z})} + 5 \cdot \frac{1}{z(1+\frac{3}{z})} = -4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{z^n} + 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}}{z^n}.$$

3) $1 < |z+2|; \frac{1}{|z+2|} < 1;$

$$\frac{z-2}{z^2+5z+6} = \frac{-4}{z+2} + \frac{5}{z+3} = \frac{-4}{z+2} + \frac{5}{(z+2)(1-\frac{-1}{z+2})} = -4\sum_1^{\infty} \frac{(-1)z^n}{2^{n+1}} + 5\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+2)^{n+1}};$$

$$\frac{z-2}{z^2+5z+6} = -4\sum_1^{\infty} \frac{(-1)z^n}{2^{n+1}} + 5\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+2)^{n+1}};$$

$$\frac{z-2}{z^2+5z+6} = -4\sum_1^{\infty} \frac{(-1)z^n}{2^{n+1}} + 5\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+2)^{n+1}};$$

Ответ. 1). $\frac{z-2}{z^2+5z+6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{z^n} + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$ в кольце $2 < |z| < 3$.

2). $\frac{z-2}{z^2+5z+6} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}}{z^n}$ в кольце

3) $\frac{z-2}{z^2+5z+6} = -4\sum_1^{\infty} \frac{(-1)z^n}{2^{n+1}} + 5\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+2)^{n+1}}$; в кольце 1<|z+2|.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}\frac{\pi z}{2}}{(4z^2+1)^2} dz$ **11.** $\int\limits_{|z|=2} (z-1)^4 \, \mathrm{sh}\frac{3}{z-1} dz$

Решение. **10.** Преобразуем подинтегральную функцию: $\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}}{(4z^2+1)^2}=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}}{(z^2+\dfrac{1}{4})^2}$.

Корни знаменателя: $z_1=-\dfrac{i}{2},\quad z_2=\dfrac{i}{2}$ i. Значения z_1 и z_2 являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{-\frac{i}{2}}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}}{16(z^2+\frac{1}{4})^2}=\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\frac{d}{dz}\Big[\frac{(z+\frac{i}{2})^2\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}}{16(z+\frac{i}{2})^2(z-\frac{i}{2})^2}\Big]=\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\Big[\frac{\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2}(z-\frac{i}{2})^2-2\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}(z-\frac{i}{2})}{16(z-\frac{i}{2})^4}\Big]=$$

$$=-\frac{1}{16}\cdot\Big[\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}(-\frac{\pi i}{4})-2i\operatorname{sh}(-\frac{\pi i}{4})\Big]=-\frac{1}{16}\Big[\frac{\pi}{2}\cos(-\frac{\pi}{4})+2\sin(-\frac{\pi}{4})\Big]=-\frac{1}{16}\Big[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\Big]=\frac{\sqrt{2}}{64}(4-\pi),$$

$$\operatorname*{Res}_{\frac{i}{2}}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}}{16(z^2+\frac{1}{4})^2}=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{d}{dz}\Big[\frac{(z-\frac{i}{2})^2\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}}{16(z+\frac{i}{2})^2(z-\frac{i}{2})^2}\Big]=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\Big[\frac{\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2}(z+\frac{i}{2})^2-2\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}(z+\frac{i}{2})}{16(z+\frac{i}{2})^4}\Big]=$$

$$=-\frac{1}{16}\cdot\Big[\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}(\frac{\pi i}{4})+2i\operatorname{sh}(\frac{\pi i}{4})\Big]=-\frac{1}{16}\Big[\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{4})-2\sin(\frac{\pi}{4})\Big]=-\frac{1}{16}\Big[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\Big]=\frac{\sqrt{2}}{64}(4-\pi)$$

Здесь были использованы формулы $\operatorname{ch} iz=\cos z,\quad \operatorname{sh} iz=i\sin z$. Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}}{(4z^2+1)^2}dz=\frac{2\pi i}{64}\sqrt{2}(8-2\pi)=\frac{\pi i}{16}\sqrt{2}(4-\pi).$$

11. Подинтегральная функция имеет существенно особую точку $z=1$. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции shw степеням w:

$\operatorname{sh}(w)=w+\dfrac{w^3}{3!}+\dfrac{w^5}{5!}+\dfrac{w^7}{7!}+\ldots$ Полагая $w=\dfrac{3}{z-1}$, получим:

$$(z-1)^4\operatorname{sh}\frac{3}{z-1}=(z-1)^4\Big[\frac{3}{z-1}+\frac{3^3}{3!(z-1)^3}+\frac{3^5}{5!(z-1)^5}+\frac{3^7}{7!(z-1)^7}+\ldots\Big]=\frac{3(z-1)^4}{z-1}+\frac{3^3(z-1)^4}{3!(z-1)^3}+$$

$$+\frac{3^5(z-1)^4}{5!(z-1)^5}+\frac{3^7(z-1)^4}{7!(z-1)^7}+\ldots=3(z-1)^3+\frac{3^3}{3!}(z-1)+\frac{3^5}{5!(z-1)}+\frac{3^7}{7!(z-1)^3}+\ldots$$

Последующие слагаемые не содержат степени $(z-1)^{-1}$. Коэффициентом при $(z-1)^{-1}$ в разложении функции будет число $\dfrac{3^5}{5!}=\dfrac{81}{40}$. Вычет данной функции равен коэффициенту при

$(z-1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{1}[(z-1)^4\operatorname{sh}\dfrac{3}{z-1}]=\dfrac{81}{40}$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=2}(z-1)^4\operatorname{sh}\frac{3}{z-1}dz=2\pi i\cdot\frac{81}{40}=\frac{81\pi i}{20}.$$

Ответ. 10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}}{(4z^2+1)^2}dz=\frac{\pi i}{16}\sqrt{2}(4-\pi)$. 11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}(z-1)^4\operatorname{sh}\frac{3}{z-1}dz=2\pi i\cdot\frac{81}{40}=\frac{81\pi i}{20}$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^4+10x^2+9)}dx.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\dfrac{z^2+3}{(z^4+10z^2+9)}$, решая биквадратное уравнение: $(z^2)^2+10(z^2)+9=0$, $z^2=-5\pm\sqrt{25-9}=-5\pm4$. Следовательно, $z_{1,2}=\pm i,\quad z_{3,4}=\pm 3i$. В данном случае в верхней полуплоскости расположены два полюса z=i и z=3i функции $f(z)=\dfrac{z^2+3}{(z^4+10z^2+9)}=\dfrac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+9)}$.

Тогда $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+9)}dx=2\pi i(\operatorname*{Res}_{i}\frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+9)}+\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+9)})$.

$$\operatorname*{Res}_{i}\frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+3)}{(z+i)(z-i)(z^2+9)}=\frac{2}{2i(i^2+9)}=\frac{1}{8i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{3i}\frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)(z^2+3)}{(z+3i)(z-3i)(z^2+1)}=\frac{-6}{6i(9i^2+1)}=\frac{1}{8i}.$$

Следовательно. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+9)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+9)}dx=\frac{2\pi i}{2}(\frac{1}{8i}+\frac{1}{8i})=\frac{\pi}{4}$.

Ответ. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^4+10x^2+9)}dx=\frac{\pi}{4}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, где C – нижняя полуокружность $|z|=1$, $z_1=1$, $z_2=-1$, $\sqrt[4]{1}=-i$.

Решение. Рассмотрим функцию $\sqrt[4]{z}=|z|^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4})$ Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=1 функция будет принимать заданное значение. С одной стороны $\sqrt[4]{1}=|1|^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4})$, так как $1=\cos(0)+i\sin(0)$. С другой стороны $\sqrt[4]{1}=-i=(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=3. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt[4]{z}=|z|^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\varphi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\varphi+6\pi}{4})$.

Таким образом,

$$\int_C\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}=4\sqrt[4]{z}\Big|_1^{-1}=4\cdot(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}-(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}))=4(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}+i)=4i-2\sqrt{2}(1+i).$$

Ответ. $\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}=4\sqrt[4]{z}\Big|_1^{-1}=-2\sqrt{2}-i(2\sqrt{2}-4)$.