Вариант 15

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) Arctg2i; б) $\sqrt[4]{-1}$

Решение. а). Будем вычислять Arctg2i по формуле $\mathrm{Arctg}(z)=\dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$. В данном примере z=2i, следовательно, $\mathrm{Arctg}\,3=\dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\dfrac{1+i\cdot 2i}{1-i\cdot 2i}=\dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\dfrac{-1}{3}$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z)=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)$. В данном случае $z=-\dfrac{1}{3}$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z|=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=\arg z=\pi$. Таким образом

$$\mathrm{Arctg}\,2i=\frac{1}{2i}(\mathrm{Ln}(-\frac{1}{3})=\frac{1}{2i}[\ln(\frac{1}{3})+i(\pi+2k\pi)]=(k+\frac{1}{2})\pi+\frac{i}{2}\cdot\ln 3.$$

б) Воспользуемся формулой $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n})$. В данном случае $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{|-1|}\cdot(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4})=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4})$. При k=0, 1 получаем первые два корня: $z_1=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$, $z_2=\cos\dfrac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$,

Следующие два корня являются сопряжёнными по отношению к первым двум корням: $z_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$, $z_4=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

Ответ. а) $\mathrm{Arctg}\,2i=(k+\dfrac{1}{2})\pi+\dfrac{i}{2}\cdot\ln 3$; б). $\sqrt[4]{-1}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

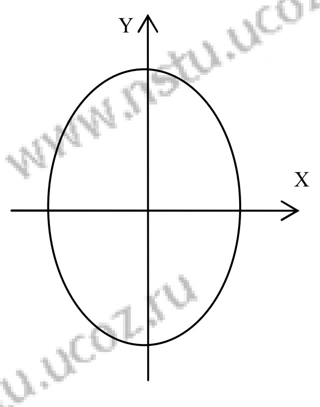
Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z+i|+|z-i|=4$$

Решение. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид:

$|x+i(y+1)|+|x+i(y-1)|=4.$

Или $\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=4$. Перенесём второй корень в правую часть равенства и возведём обе части в квадрат. Получим:



$x^2+y^2+2y+1=16-8\sqrt{x^2+(y-1)^2}+x^2+y^2-2y+1$. Или

$8\sqrt{x^2+(y-1)^2}=16-4y$. Возведём ещё раз в квадрат:

$64x^2+64y^2-128y+64=256-128y+16y^2$. Или $64x^2+48y^2=192$.

Поделив всё равенство на правую часть, получим каноническое уравнение эллипса с фокусами на мнимой оси: $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Ответ. Данное соотношение представляет уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $e^{2z}-2ie^z-5=0$.

Решение. Обозначим $V=e^Z$ и решим квадратное уравнение $V^2-2iV-5=0$:

$V_{1,2}=i\pm\sqrt{i^2+5}=i\pm 2$. Таким образом, имеем два корня: $V_1=i-2$, $V_2=i+2$.

Найдём модули и аргументы этих

чисел: $|V_1| = \sqrt{5}, \quad \arg V_1 = \pi - \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}, \quad |V_2| = \sqrt{5}, \quad \arg V_2 = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Так как $V=e^z$, то $z=\mathrm{Ln}V$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}V = \ln|V| + i(\varphi + 2k\pi)$.

Получим: $z_1 = \mathrm{Ln}V_1 = \ln\sqrt{5} + i(\pi - \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + 2k\pi) = \ln\sqrt{5} - i\cdot \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + (2k+1)\pi i,$

$z_2 = \mathrm{Ln}V_2 = \ln\sqrt{5} + i\cdot \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + 2k\pi i$

Ответ. $z_1 = \ln\sqrt{5} - i\cdot \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + (2k+1)\pi i, \quad z_2 = \ln\sqrt{5} + i\cdot \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} + 2k\pi i$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\mathrm{ch}(z + \dfrac{\pi i}{2}) = i\cdot \mathrm{sh} z$.

Решение. Рассмотрим левую часть равенства:

$$\mathrm{ch}(z + \frac{\pi i}{2}) = \frac{e^{z+\frac{\pi i}{2}} + e^{-z-\frac{\pi i}{2}}}{2} = \frac{1}{2}(e^z e^{\frac{\pi i}{2}} + e^{-z} e^{-\frac{\pi i}{2}}) = \frac{1}{2}(e^z(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) + e^{-z}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^z i + e^{-z}(-i)) = \frac{i}{2}(e^z - e^{-z}) = i\cdot \mathrm{sh}\, z,$$ что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной мнимой части её:*

$$\mathrm{Im}\, f(z) = v = -\frac{y}{x^2+y^2} + 2x^2 - 2y^2 - x, \text{ если } f(1)=2+i.$$

Решение. Чтобы функция $v(x,y)$ бала мнимой частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δv был бы равен нулю: $\Delta v=0$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от v по x и по y:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 4x - 1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2y(x^2+y^2)^2 - 8x^2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} + 4 = \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} + 4,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} - 4y = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - 4y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{-2y(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4} -$$

$$-4 = -\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} - 4$$

Очевидно,что лапласиан Δv равен нулю. Таким образом, данная функция является гармонической. Восстановим действиительную часть $u(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Из второго условия получаем: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - 4x + 1$. Тогда $u(x,y) = \int \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \varphi(x)$, или $u(x,y) = -\int \{\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 4x - 1\}dy + \varphi(x) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - 4xy + y + \varphi(x)$. Производная по x от этого выражения равна $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = -\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - 4y + \varphi'(x)$. С другой стороны по первому условию Даламбера-Эйлера $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - 4y$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x) = 0$. Или $\varphi(x) = C$. Таким образом,

$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}-4xy+y+C.$ Тогда $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-4xy+y+C+i(-\frac{y}{x^2+y^2}+2x^2-2y^2-x).$

Перейдём к переменной z:

$$f(z)=\frac{x-iy}{(x^2+y^2)}+2i(x^2+2ixy-y^2)-i(x+iy)+C=\frac{\bar z}{z\bar z}+2iz^2-iz+C=\frac{1}{z}+2iz^2-iz+C.$$

Воспользуемся дополнительным условием f(1)=2+i. В данном случае $f(1)=1+i+C$. Следовательно, C=1.

<u>Ответ</u>. $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-4xy+y+1+i(-\frac{y}{x^2+y^2}+2x^2-2y^2-x)=\frac{1}{z}+2iz^2-iz+1.$

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C z\,\mathrm{Im}\,\bar z\,dz;\qquad C:\ x=y^2,\quad z_1=0,\ z_2=4+2i.$$

<u>Решение</u>. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz=-\int_C udx-vdy-i\int_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=(x+iy)(-y), т.е.u=-xy, v=-y^2. Значит $\int_C z\,\mathrm{Im}\,\bar z dz=-\int_C xydx-y^2dy-i\int_C xydy+y^2dx$. Примем y за параметр., т.е. $x=y^2,\quad dx=2ydy$. Начальной точке z_1=0 соответствует значение y=0, конечной z_2=4+2i – значение y=2. Следовательно,

$$\int_C z\,\mathrm{Im}\,\bar z\,dz=-\int_0^2(2y^4-y^2)dy-i\int_0^1(y^3+2y^3)dy=-\frac{2y^5}{5}\Bigg|_0^2+\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2-i\frac{3y^4}{4}\Bigg|_0^2=-\frac{152}{15}-12i\,.$$

<u>Ответ</u>. $\int_C z\,\mathrm{Im}\,\bar z\,dz=-\frac{152}{15}-12i\,.$

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции.* $\int_i^{2+2i}(9z^2+2z+3)dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу Ньютона - Лейбница:

$$\int_i^{2+2i}(9z^2+2z+3)dz=\left[3z^3+z^2+3z\right]_i^{2+2i}=24+72i-72-24i+4+8i-4+6+6i+3i+1-3i=-41+62i\,.$$

<u>Ответ</u>. $\int_i^{2+2i}(9z^2+2z+3)dz=-41+62i\,\cdot$

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int_L\frac{\cos z\,dz}{(z-\frac{\pi}{3})(z+\frac{\pi}{2})^2}$, 1) $L_1:\left|z+\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$, 2) $L_2:\ |z+\pi|=2$, 3) $L_3:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$

<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=π/3 и z= -π/2. В круге $\left|z+\frac{i}{2}\right|\le\frac{1}{2}$ нет особых точек. Тогда по теореме Коши I_1=0.

2). Внутри области $|z+\pi|\le 2$ расположена одна особая точка -π/2. Тогда по интегральной формуле Коши:

$$I_2=\int\limits_{L}\frac{\cos z dz}{(z-\frac{\pi}{3})(z+\frac{\pi}{2})^2}=\int\limits_{L_2}\frac{\frac{\cos z}{(z-\pi/3)}dz}{(z+\frac{\pi}{2})^2}=$$

$$=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{\cos z}{(z-\pi/3)}\right]_{z=-\frac{\pi}{2}}=$$

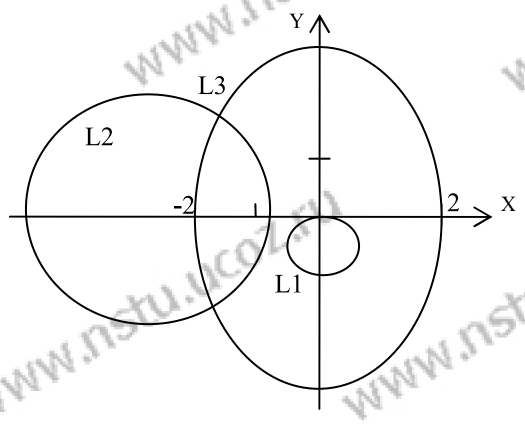
$$=2\pi i\left.\frac{-\sin z\cdot(z-\pi/3)-\cos z}{(z-\pi/3)^2}\right|_{z=-\pi/2}=-\frac{12i}{5}$$

3) Внутри эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$ находятся две особых точки: $z=-\pi/2$ и $z=\pi/3$. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$I_3=\int\limits_{L_3}\frac{\cos z dz}{(z-\frac{\pi}{3})(z+\frac{\pi}{2})^2}=\int\limits_{l_1}\frac{\cos z dz}{(z-\frac{\pi}{3})(z+\frac{\pi}{2})^2}+\int\limits_{l_2}\frac{\cos z dz}{(z-\frac{\pi}{3})(z+\frac{\pi}{2})^2}$, где L_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z=-\pi/2$, а L_2 - окружность малого радиуса с центром в точке $z=\pi/3$. Первый интеграл в этой сумме совпадает с I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{L_3}\frac{\cos z dz}{(z-\frac{\pi}{3})(z+\frac{\pi}{2})^2}=\int\limits_{L_3}\frac{\frac{\cos z dz}{(z+\pi/2)^2}dz}{(z-\pi/3)}=2\pi i\left[\frac{\cos z dz}{(z+\frac{\pi}{2})^2}\right]_{z=\pi/3}=2\pi i\cdot\frac{36}{2\cdot 25\cdot\pi^2}=\frac{36i}{25\pi}.$$

Тогда $I_3=\frac{36i}{25\pi}-\frac{12i}{5}=\frac{12}{25\pi}(3-5\pi)i$..



Ответ. $I_1=0$, $I_2=-\frac{12i}{5\pi}$, $I_3=\frac{12}{25\pi}(3-5\pi)i$..

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z+4}{z^2+4z+3}$, 1) $1<|z|<3$ 2) $|z|>3$. 3) $2<|z+3|$.

Решение. Корнями уравнения $z^2+4z+3=0$ являются числа $z_1=-1$ и $z_2=-3$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z+4}{z^2+4z+3}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+3}=\frac{A(z+3)+B(z+1)}{(z+1)(z+3)}$. Или $A(z+3)+B(z+1)=z+4$. При $z=-1$ получим $A=3/2$. Если положить $z=-3$, то получим $B=-1/2$. Следовательно, $\frac{z+4}{z^2+4z+3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3}$. 1). В кольце $1<|z|<3$ имеем $\frac{1}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{3}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$$\frac{z+4}{z^2+4z+3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3(1+\frac{z}{3})}.$$ Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$, где $|q|<1$. В первой дроби q=-1/z, во второй дроби q= -z/3. Следовательно,

$$\frac{z+4}{z^2+4z+3}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}.$$ 2). В кольце $|z|>3$ выполняются неравенства $\frac{1}{|z|}<1$ и $\frac{3}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z+4}{z^2+4z+3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}=\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}==\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3-3^{n-1}}{z^n}.$$

3) $2<|z+3|\Rightarrow\frac{2}{|z+3|}<1;$

$$\frac{z+4}{z^2+4z+3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(z+3)(1-\frac{2}{z+3})}=-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}+\frac{3}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{(z+3)^{n+1}}$$

$$\frac{z+4}{z^2+4z+3}=-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}+\frac{3}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{(z+3)^{n+1}}$$

Ответ. 1). $\frac{z+4}{z^2+4z+3}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$. в кольце $1<|z|<3$.

2). $\frac{z+4}{z^2+4z+3}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3-3^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>3$.

3) $\frac{z+4}{z^2+4z+3}=-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}+\frac{3}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{(z+3)^{n+1}}$ в кольце 2<|z+3|;

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin\pi z}{z^2(z^2-1)^2}dz$ **11.** $\int\limits_{|z+1|=2}\frac{z-1}{z+2}\operatorname{ch}\frac{3}{z+2}dz$

Решение. **10.** Корни знаменателя: $z_1=-1,\quad z_2=1,\quad z_3=0$. Значения z_1 и z_2 являются простыми полюсами подынтегральной функции, а z_3 – полюсом кратности 2. Тогда

$\operatorname*{Res}_{-1}\frac{\sin\pi z}{z^2(z^2-1)}=\lim_{z\to-1}[\frac{(z+1)\sin\pi z}{z^2(z+1)(z-1)}]=\lim_{z\to-1}[\frac{\sin\pi z}{z^2(z-1)}]=0$, так как sin(-π)=0. Аналогично,

$\operatorname*{Res}_{1}\frac{\sin\pi z}{z^2(z^2-1)}=0$, так как sin(π)=0.

$$\operatorname*{Res}_{0}\frac{\sin\pi z}{z^2(z^2-1)}=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}[\frac{z^2\sin\pi z}{(z^2-1)}]=\lim_{z\to2i}[\frac{\pi\cdot\cos\pi z\cdot(z^2-1)-2z\sin\pi z}{(z^2-1)^2}]=-\pi$$

Получим окончательно: $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin\pi z}{z^2(z^2-1)^2}dz=2\pi i\cdot(-\pi)=-2\pi^2 i$.

11). Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=-2. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд

Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции ch(w) по степеням w:

$ch(w) = 1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \frac{w^6}{6!} + ...$ Полагая $w = \frac{3}{z+2}$, получим:

$$\frac{z-1}{z+2} ch\frac{3}{z+2} = (1 - \frac{3}{z+2})(1 + \frac{3^2}{2!(z+2)^2} + \frac{3^4}{4!(z+2)^4} + \frac{3^6}{6!(z+2)^6} + ...) = 1 - \frac{3}{z+2} + \frac{3^2}{2!(z+2)^2} + ...$$

Последующие слагаемые не содержат степени $(z+2)^{-1}$. Коэффициентом при $(z+2)^{-1}$ в разложении функции будет число -3. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z+2)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\underset{-2}{Res}[\frac{z-1}{z+2} ch\frac{3}{z+2}] = -3$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=1} (z+1)^2 \sin\frac{3}{z} dz = 2\pi i \cdot (-\frac{3}{2}) = -3\pi i.$$

<u>Ответ</u>. 10. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin \pi z}{z^2(z^2-1)^2} dz = -2\pi^2 i$. 11. $\int\limits_{|z+1|=2} \frac{z-1}{z+2} ch\frac{3}{z+2} dz = -3\pi i$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)}.$$

<u>Решение</u>. Найдём корни знаменателя функции $f(z) = \frac{1}{(z^4+1)}$:

$z^4 + 1 = 0$ или $z = |-1|(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4})$ или $z_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$. Следовательно, два корня из четырёх находятся в верхней полуплоскости:

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ и $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)} dx = 2\pi i(\underset{z_1}{Res}\frac{1}{(z^4+1)} + \underset{z_3}{Res}\frac{1}{(z^4+1)})$.

$$\underset{z_1}{Res}\frac{1}{(z^4+1)} = \lim_{z \to \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} \frac{(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))}{(z + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(i+1)\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}i} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}i}.$$

$$\underset{z_1}{Res}\frac{1}{(z^4+1)} = \lim_{z \to -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)} \frac{(z + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))}{(z + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}i \cdot (-\sqrt{2})[-\sqrt{2}(1-i)]} = \frac{1+i}{4\sqrt{2}i}.$$ Следовательно.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i(\underset{z_1}{Res}\frac{1}{(z^4+1)} + \underset{z_3}{Res}\frac{1}{(z^4+1)}) = \pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}i} + \frac{1+i}{4\sqrt{2}i}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}.$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(x^4+1)} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, ГДЕ C: $y=3-x^2-2x$, $z_1=1$, $z_2=-3$, $\sqrt{1}=-1$.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. ТОЧКИ z_1 И z_2 НЕ ЯВЛЯЮТСЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ ДЛЯ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ. КРИВАЯ C НЕ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ $z=0$. СЛЕДОВАТЕЛЬНО, МОЖНО ПРИМЕНИТЬ ФОРМУЛУ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА: $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_{z_1}^{z_2} = 2(\sqrt{z_2}-\sqrt{z_1})$. РАССМОТРИМ ФУНКЦИЮ

$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})$. РАССМАТРИВАЕТСЯ ТА ВЕТВЬ ФУНКЦИИ, ДЛЯ КОТОРОЙ В ТОЧКЕ $z=1$ ФУНКЦИЯ БУДЕТ ПРИНИМАТЬ ЗАДАННОЕ ЗНАЧЕНИЕ. С ОДНОЙ СТОРОНЫ $\sqrt{1} = \cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2} = \cos k\pi + i\sin k\pi$. С ДРУГОЙ СТОРОНЫ $\sqrt{1} = -1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$.

СРАВНИВАЯ ЭТИ ВЫРАЖЕНИЯ, ПРИХОДИМ К ВЫВОДУ, ЧТО УКАЗАННОЙ ВЕТВИ ФУНКЦИИ СООТВЕТСТВУЕТ ЗНАЧЕНИЕ $k=1$. СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ДАННАЯ ВЕТВЬ ФУНКЦИИ ИМЕЕТ УРАВНЕНИЕ $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi+2\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{2})$. ТАКИМ ОБРАЗОМ,

$\sqrt{z_1} = \sqrt{1} = \sqrt{1}(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$,

$\sqrt{-3} = \sqrt{3}(\cos\frac{-\pi+2\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi+2\pi}{2}) = i$. СЛЕДОВАТЕЛЬНО,

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_{z_1}^{z_2} = 2(\sqrt{z_2}-\sqrt{z_1}) = 2(i\sqrt{3}+1) = 2 + i2\sqrt{3}$.

<u>ОТВЕТ</u>. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2 + i2\sqrt{3}$.