Вариант 16

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$\text{а)}\ \ e^{1-i}\operatorname{cth}\frac{\pi i}{4};\qquad \text{б)}\ \ \operatorname{Ln}(i-2)$$

Решение. а). Воспользуемся формулой связи между тригонометрическим котангенсом и гиперболическим котангенсом: $\operatorname{cth}(iz)=-i\cdot\operatorname{ctg}(z)$. Получим $\operatorname{cth}\frac{\pi i}{4}=-i\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=-i$. Кроме того, $e^{1-i}=e\cdot e^{-i}=e(\cos 1-i\cdot\sin 1)$. Таким образом,

$$e^{1-i}\operatorname{cth}\frac{\pi i}{4}=e(\cos 1-i\cdot\sin 1)\cdot(-i)=-e\cdot\sin 1-i\cdot e\cdot\cos 1.$$

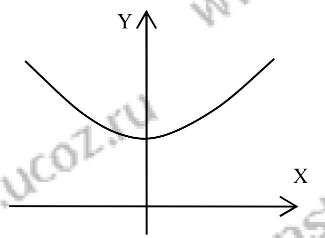
б). Воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}(z)=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)$. В данном случае $z=i-2$, следовательно, $|z|=\sqrt{5}$, $\varphi=\arg z=\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Тогда

$$\operatorname{Ln}(i-2)=\ln\sqrt{5}+i(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2k\pi)=\ln\sqrt{5}-i\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+i(2k+1)\pi$$

Ответ. а). $e^{1-i}\operatorname{cth}\frac{\pi i}{4}=-e\cdot(\sin 1+i\cdot\cos 1)$. б). $\operatorname{Ln}(i-2)=\ln\sqrt{5}-i\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+i(2k+1)\pi$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z+i|-|z-i|=1$$



Решение. Так как $z=x+iy$, то данное соотношение имеет вид: $|x+i(y+1)|-|x+i(y-1)|=1$.

Или $\sqrt{x^2+(y+1)^2}-\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$. Перенесём второй корень в правую часть равенства и возведём обе части в квадрат. Получим: $x^2+y^2+2y+1=1+2\sqrt{x^2+(y-1)^2}+x^2+y^2-2y+1$.

Или $2\sqrt{x^2+(y-1)^2}=4y-1$. Заметим, что правая часть не должна быть отрицательной, т.е. $y>1/4$. Возведём ещё раз в квадрат: $4x^2+4y^2-8y+4=1-8y+16y^2$. Или $4x^2-12y^2=-3$.

Поделив всё равенство на правую часть, получим каноническое уравнение гиперболы с фокусами на мнимой оси: $\frac{y^2}{4}-\frac{4x^2}{3}=1$.

Ответ. Данное соотношение определяет верхнюю ветвь гиперболы $\frac{y^2}{4}-\frac{4x^2}{3}=1$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $e^{3z}+4\sqrt{2}(1-i)=0$.

Решение. Перепишем уравнение: $e^{3z}=-4\sqrt{2}(1-i)$. Тогда $z=\frac{1}{3}\operatorname{Ln}[-4\sqrt{2}(1-i)]$. Найдём модуль и аргумент числа, стоящего под знаком логарифма:

$\left|-4\sqrt{2}(1-i)\right|=4\sqrt{2}\sqrt{2}=8,\quad \arg[-4\sqrt{2}(1-i)]=\frac{3\pi}{4}$. Далее воспользуемся формулой $\operatorname{Ln}V=\ln|V|+i(\varphi+2k\pi)$. Получим: $\operatorname{Ln}[-4\sqrt{2}(1-i)]=\ln 8+i(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)$. Следовательно,

$$z=\frac{1}{3}\operatorname{Ln}[-4\sqrt{2}(1-i)]=\frac{1}{3}[\ln 8+i(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)]=\ln 2+i\pi(\frac{2k}{3}+\frac{1}{4}).$$

Ответ. $z=\ln 2+i\pi(\frac{2k}{3}+\frac{1}{4})$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\cos^2 z-\sin^2 z=\cos 2z$.

Решение. Перейдём к гиперболическим функциям, пользуясь равенствами $\cos z = \operatorname{ch} iz,\ \sin z = -i\cdot \operatorname{sh} iz$, и рассмотрим левую часть тождества:

$$\cos^2 z - \sin^2 z = \operatorname{ch}^2 iz + \operatorname{sh}^2 iz = \frac{(e^{iz}+e^{-iz})^2}{4} + \frac{(e^{iz}-e^{-iz})^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz} + e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}) = \frac{1}{4}(2e^{2iz} + 2e^{-2iz}) = \frac{1}{2}(e^{2iz} + e^{-2iz}) = \operatorname{ch} 2iz = \cos 2z,$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\operatorname{Re} f(z) = u = x^3 + Axy^2 + 3x^2 - 3y^2 - 1, \text{ *если* } f(0)=-1.$$

Решение. Чтобы функция $u(x,y)$ бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: $\Delta u=0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + Ay^2 + 6x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 6,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2Axy - 6y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2Ax - 6.$$

Чтобы лапласиан Δu был равен нулю, нужно положить $A=-3$. Таким образом, функция $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 - 1$ является гармонической. Восстановим мнимую часть $v(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 6x$.

Тогда $v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}dy + \varphi(x)$, или $v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2 + 6x)dy + \varphi(x) = 3x^2y - y^3 + 6xy + \varphi(x)$.

Производная по *x* от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x} = 6yx + 6y + \varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 6y$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x) = 0$. Или $\varphi(x) = C$. Таким образом, $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 6xy + C$. Тогда $f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 - 1 + i\cdot(3x^2y - y^3 + 6xy + C)$. Перейдём к переменной z:

$$f(z) = (x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + 3(x^2 + 2ixy - y^2) - 1 + iC = z^3 + 3z^2 - 1 + iC.$$

Воспользуемся дополнительным условием $f(0)=-1$. Здесь $f(0)=-1+iC$. Следовательно, $C=0$.

Ответ. $f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 - 1 + i\cdot(3x^2y - y^3 + 6xy) = z^3 + 3z^2 - 1$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге* C *от точки* z_1 *до точки* z_2.

$$\int_C \bar{z} \operatorname{Re} \bar{z}\, dz; \qquad C - \text{прямая}, \quad z_1 = 1 + i,\ z_2 = 2 + 2i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$. В данном случае $f(z)=(x-iy)x$, т.е. $u=x^2$, $v=-xy$. Значит $\int_C \bar{z}\operatorname{Re}\bar{z}dz = \int_C x^2dx + xydy + i\int_C x^2dy - xydx$. Примем x за параметр. Составим уравнение прямой, по которой проводится интегрирование: $\frac{y}{1} = \frac{x}{1}$, т.е. $y = x,\quad dy = dx$.

Начальной точке $z_1=1+i$ соответствует значение $x=1$, конечной $z_2=2+2i$ – значение $x=2$.

Следовательно, $\int\limits_C \bar z \operatorname{Re}\bar z\, dz = \int\limits_1^2 (x^2 + x^2)dx + i\int\limits_1^2 (x^2 - x^2)dx = \left.\dfrac{2x^3}{3}\right|_1^2 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$.

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C \bar z \operatorname{Re}\bar z\, dz = \dfrac{14}{3}$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_{-i}^{1} (z+1)\cdot e^z\, dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{-i}^{1} (z+1)\cdot e^z\, dz = \begin{vmatrix} u = z+1 & du = dz \\ dv = e^z\, dz & v = e^z \end{vmatrix} = (z+1)e^z\Big|_{-i}^{1} - \int\limits_{-i}^{1} e^z\, dz = 2e - (-i+1)e^{-i} + e^z\Big|_{-i}^{1} =$$

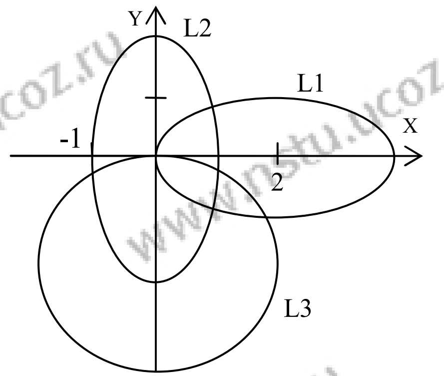
$$= 2e + ie^{-i} - e^{-i} + e - e^{-i} = 3e + (i-2)e^{-i} = 3e + (i-2)[\cos 1 - i\sin 1] = 3e - 2\cos 1 + \sin 1 + i(\cos 1 + 2\sin 1).$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_{-i}^{1} (z+1)\cdot e^z\, dz = 3e - 2\cos 1 + \sin 1 + i(\cos 1 + 2\sin 1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.*

$$\int\limits_L \frac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz,\quad 1)\ L_1: \frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1,\quad 2)\ L_2: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\quad 3)\ L_3: |z+2i| = 2.$$

<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек



$z=-i$ и $z=i$. В эллипсе $\dfrac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно,

$I_1 = \int\limits_L \dfrac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz = 0$. 2). В эллипсе $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ есть две особые точки $z=-i$ и $z=i$. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$$I_2 = \int\limits_{L2} \frac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz = \int\limits_{l_1} \frac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz + \int\limits_{l_2} \frac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz$$

, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z=-i$, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке $z=i$. Вычислим интегралы по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_1} \frac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz = \int\limits_{l_1} \frac{\dfrac{z^4+1}{(z-i)^2}dz}{(z+i)} = 2\pi i\left[\frac{z^4+1}{(z-i)^2}\right]_{z=-i} = 2\pi i\frac{2}{-4} = -\pi i$$

$$\int\limits_{l_2} \frac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz = \int\limits_{l_2} \frac{\dfrac{z^4+1}{z+i}dz}{(z-i)^2} = \frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{z^4+1}{z+i}\right]_{z=i} = 2\pi i\left.\frac{4z^3(z+i) - z^4}{(z+i)^2}\right|_{z=i} = \frac{2\pi i(8-1)}{-4} = -\frac{7\pi i}{2}.$$

Следовательно, $I_2 = \int\limits_{L2} \dfrac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)}dz = -\dfrac{7\pi i}{2} - \pi i = -\dfrac{9\pi i}{2}$.

3). Внутри области $|z+2i| \le 2$ расположена одна особая точка $z=-i$. Интеграл по контуру L_3 совпадает с уже вычисленным интегралом по контуру L_1:

$$I_3 = \int_{l_1} \frac{z^4+1}{(z^2+1)(z-i)} dz = -\pi i .$$

<u>Ответ</u>. $I_1 = 0,\ I_2 = -\frac{9\pi i}{2},\ I_3 = -\pi i.$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-1}{z^2+z-20}$, 1) $4<|z|<5$ 2) $|z|>5$. 3) $0<|z+5|<9$;

<u>Решение</u>. Корнями уравнения $z^2+z-20=0$ являются числа $z_1=4$ и $z_2=-5$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-1}{z^2+z-20} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+5} = \frac{A(z+5)+B(z-4)}{(z-4)(z+5)}$. Или

$A(z+5)+B(z-4) = z-1$. При $z=4$ получим $A=1/3$. Если положить $z=-5$, то получим $B=2/3$.

Следовательно, $\frac{z-1}{z^2+z-20} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+5}$. 1). В кольце $4<|z|<5$ имеем

$\frac{4}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-4}{z^2+z-20} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5(1+\frac{z}{5})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$, где $|q|<1$. В первой дроби $q=4/z$, во второй дроби $q=-z/5$. Следовательно,

$\frac{z-1}{z^2+z-20} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n} + \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства

$\frac{4}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-1}{z^2+z-20} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{5}{z})} = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n} + \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^{n-1}}{z^n} =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^{n-1}+2(-1)^{n-1}5^{n-1}}{z^n}.$$

3) $0<|z+5|<9; \Rightarrow \frac{|z+5|}{9}<1;$

$$\frac{z-1}{z^2+z-20} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+5} = \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{9(1-\frac{z+5}{9})} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+5} = -\frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+5)^n}{9^{n+1}} + \frac{2}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}};$$

$$\frac{z-1}{z^2+z-20} = -\frac{1}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+5)^n}{9^{n+1}} + \frac{2}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}};$$

<u>Ответ</u>. 1). $\frac{z-1}{z^2+z-20} == \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^{n-1}+2(-1)^{n-1}5^{n-1}}{z^n}$. в кольце $4<|z|<5$.

2). $\frac{z-1}{z^2+z-20} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{z^n} + \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$. в кольце $|z|>5$.

3) $\dfrac{z-1}{z^2+z-20}=-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(z+5)^n}{9^{n+1}}+\dfrac{2}{3}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$; в кольце $0<|z+5|<9$.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z^2+9)}dz$ **11.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{7z^7+1}{z^8+256}dz$

<u>Решение</u>. **10.**. .Найдём корни знаменателя: $z_1=1$, $z_2=-3i$, $z_3=3i$. Значения z_2 и z_3 являются простыми полюсами подынтегральной функции, а значение $z_1=1$ - полюсом кратности 2. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{-3i}\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z^2+9)}=\lim_{z\to-3i}\Big[\frac{(z+3i)\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z+3i)(z-3i)}\Big]=\lim_{z\to-3i}\Big[\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z-3i)}\Big]=\frac{\cos\frac{3\pi i}{2}}{12i(4-3i)}=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}}{12(3+4i)},\qquad \operatorname*{Res}_{3i}\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z^2+9)}=\lim_{z\to3i}\Big[\frac{(z-3i)\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z+3i)(z-3i)}\Big]=\lim_{z\to3i}\Big[\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z+3i)}\Big]=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}}{-12i(4+3i)}=\frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}}{12(3-4i)}.$$

$$\operatorname*{Res}_{1}\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z^2+9)}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\Big[(z-1)^2\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z^2+9)}\Big]=\lim_{z\to1}\Big[\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi z}{2}(z^2+9)-2z\cos\frac{\pi z}{2}}{(z^2+9)^2}\Big]=$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\cdot10-2\cos\frac{\pi}{2}}{100}=\frac{\pi}{20}.$$ Получим окончательно: $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z^2+9)}dz=$

$$=2\pi i\Big[\frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}}{12(3+4i)}+\frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}}{12(3-4i)}+\frac{\pi}{20}\Big]=\pi i\Big[\frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}(3-4i+3+4i)}{6(3+4i)(3-4i)}+\frac{\pi}{10}\Big]=\pi i\Big[\frac{\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}}{25}+\frac{\pi}{10}\Big]=\frac{\pi i}{50}\Big[2\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}+5\pi\Big].$$

11. Подынтегральная функция имеет восемь простых полюсов, которые определяются формулой: $z_k=\sqrt[8]{-256}=\sqrt[8]{|-256|}\cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}}=2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}}$, $k=0,1,2,\ldots,15$. Все полюсы расположены на окружности радиуса $|z|=2$. Вне круга $|z|>2$ подинтегральная функция является аналитической кроме точки $z=\infty$, которая является устронимой особой точкой. Действительно, $f(z)=\dfrac{7z^7+1}{z^8+256}=\Big(\dfrac{7}{z}+\dfrac{1}{z^8}\Big)\dfrac{1}{1+\frac{1}{z^8}}$.

Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\dfrac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$, где $|q|<1$. В данном случае $q=-256/z^8$, причём в области $|z|>2$ выполняется неравенство $256/z^8<1$. Тогда

$f(z)=\Big(\dfrac{7}{z}+\dfrac{1}{z^8}\Big)\Big(1-\dfrac{256}{z^8}+\Big(\dfrac{256}{z^8}\Big)^2-\Big(\dfrac{256}{z^8}\Big)^3+\ldots\Big)=\dfrac{7}{z}+\dfrac{1}{z^8}-\dfrac{7\cdot256}{z^9}-\dfrac{256}{z^{16}}+\ldots$ В соответствии с основной теоремой о вычетах $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{7z^7+1}{z^8+256}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{8}\operatorname*{Res}_{z_k}f(z)=2\pi i\big(-\operatorname*{Res}_{\infty}f(z)\big)$. Вычет в точке $z=\infty$ равен коэффициенту при z^{-1} в разложении фунуции в ряд Лорана, взятый с противоположным знаком. Таким образом,

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -7 \quad \text{и} \quad \int\limits_{|z|=3} \frac{7z^7+1}{z^8+256}\,dz = 2\pi i(-\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)) = 2\pi i \cdot 7 = 14\pi i.$$

Ответ. 10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2(z^2+9)}\,dz = \frac{\pi i}{50}[2\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}+5\pi]$. 11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{7z^7+1}{z^8+256}\,dz = 14\pi i$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^4 dx}{x^6+1}.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$:

$z = \sqrt[6]{-1} = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{6} + i\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{6}$. Полагая здесь $k=0, 1, 2$, находим три корня, лежащие в верхней половине комплекснойплоскости:

$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$. Остальные три корня являются сопряжёнными по отношению к найденным корням и находятся в нижней полуплоскости. Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{x^6+1} = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^4}{z^6+1} + \operatorname*{Res}_{z_2}\frac{z^4}{z^6+1} + \operatorname*{Res}_{z_3}\frac{z^4}{z^6+1}).$$

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^4}{z^6+1} = \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} \frac{(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})\cdot z^4}{(z^2+1)(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})[(z+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}]} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^4}{\frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})i(3+i\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{-(1-i\sqrt{3})}{6i(1+i\sqrt{3})} = \frac{1+i\sqrt{3}}{12i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2}\frac{z^4}{z^6+1} = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)z^4}{(z+i)(z-i)[(z-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}][(z+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}]} = \frac{1}{2i(-i\sqrt{3})(i\sqrt{3})} = \frac{1}{6i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^4}{z^6+1} = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} \frac{(z+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})\cdot z^4}{(z^2+1)(z+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})[(z-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}]} = \frac{(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^4}{\frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})i(3-i\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{-(1+i\sqrt{3})}{6i(1-i\sqrt{3})} = \frac{1-i\sqrt{3}}{12i}.$$

Следовательно. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^4 dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4 dx}{x^6+1} = \pi i(\frac{1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3})}{12i} + \frac{1}{6i}) = \pi i\cdot(\frac{1}{6i}+\frac{1}{6i}) = \frac{\pi}{3}.$

Ответ. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^4 dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}.$

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \ln z dz$, ГДЕ С ПРЯМАЯ, z_1=2-2I, z_2=-2-2I, $\ln(2-2i) = \ln\sqrt{8} - \frac{\pi i}{4}$.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. РАССМОТРИМ ФУНКЦИЮ $\ln z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. РАССМАТРИВАЕТСЯ ТА ВЕТВЬ ФУНКЦИИ, ДЛЯ КОТОРОЙ В ТОЧКЕ 2-2I ВЕЛИЧИНА LNZ БУДЕТ ПРИНИМАТЬ ЗАДАННОЕ ЗНАЧЕНИЕ. С ОДНОЙ СТОРОНЫ $\ln(2-2i) = \ln\sqrt{8} + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$. С ДРУГОЙ СТОРОНЫ $\ln(2-2i) = \ln\sqrt{8} - \frac{\pi i}{4}$.

СРАВНИВАЯ ЭТИ ВЫРАЖЕНИЯ, ПРИХОДИМ К ВЫВОДУ, ЧТО УКАЗАННОЙ ВЕТВИ ФУНКЦИИ СООТВЕТСТВУЕТ ЗНАЧЕНИЕ K=0. СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ДАННАЯ ВЕТВЬ ФУНКЦИИ ИМЕЕТ УРАВНЕНИЕ $\ln z = \ln|z| + i\varphi$.

ТАКИМ ОБРАЗОМ,

$$\int\limits_C \ln z\,dz = \begin{vmatrix} u = \ln z & du = \frac{dz}{z} \\ dv = dz & v = z \end{vmatrix} = z\ln z\Big|_{2-2i}^{-2-2i} - \int\limits_C dz = z(\ln z - 1)\Big|_{2-2i}^{-2-2i} = (-2-2i)(\ln\sqrt{8} + i(-\frac{3\pi}{4})) -$$

$$-(2-2i)(\ln\sqrt{8} + i(-\frac{\pi}{4})) = -4\ln\sqrt{8} + 2\pi i - \pi.$$

<u>ОТВЕТ</u>. $\int\limits_C \ln z dz = -4\ln\sqrt{8} + 2\pi i - \pi$.