Вариант 17

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$\text{а)}\ \ \mathrm{sh}(i-2); \qquad \text{б)}\ \ i^{i+1}$$

<u>Решение</u>. а). Функция $\mathrm{sh}(z)$ является нечётной функцией. Поэтому $\mathrm{sh}(i-2)=-\mathrm{sh}(2-i)$. Воспользуемся формулой связи между тригонометрическим синусом и гиперболическим синусом: ; $\mathrm{sh}(z)= -i\sin(iz)$. Получим $\mathrm{sh}(2-i)=-i\cdot\sin(2i-i^2)= -i\cdot\sin(1+2i)$. По формуле тригонометрии $\sin(1+2i)=\sin 1\cdot\cos(2i)+\cos 1\cdot\sin(2i)$. Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями: $\cos(2i)=\mathrm{ch}2$; $\sin(2i)= i\,\mathrm{sh}2$. Получим $\mathrm{sh}(i-2)=-\mathrm{sh}(2-i)=i(\sin 1\cdot\mathrm{ch}2+ i\cdot\cos 1\cdot\mathrm{sh}2)=$
$= -\cos 1\cdot\mathrm{sh}2+i\cdot\sin 1\cdot\mathrm{ch}2$.

б). Воспользуемся формулой $i^{i+1}=e^{(i+1)\mathrm{Ln}(i)}$. Получим:

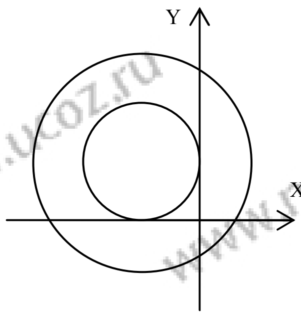
$$(i+1)\mathrm{Ln}(i)=(i+1)[\ln|i|+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]=i[\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]+\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi).$$

Тогда $i^{i+1}=e^{-\pi(2k+\frac{1}{2})+i\pi(2k+\frac{1}{2})}=e^{-\pi(2k+\frac{1}{2})}[\cos(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]=i\cdot e^{-\pi(2k+\frac{1}{2})}$

<u>Ответ</u>. а) $\cos(2i)=\cos 1\cdot\mathrm{sh}2+i\sin 1\cdot\mathrm{ch}2$; б). $i^{i+1}=i\cdot e^{-\pi(2k+\frac{1}{2})}$

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$1<|z+1-i|<2.$$



<u>Решение</u>. Так как $z=x+iy$, то данное соотношение имеет вид: $1<|x+1+i(y-1)|<2$.

Или $1<\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}<2$. Возведём все части неравенства в квадрат. Получим: $1<(x+1)^2+(y-1)^2<4$. Это неравенство определяет кольцо, заключённое между окружностью $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ радиуса 1 с центром в точке (-1;1) и окружностью $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ радиуса 2 с центром в той же точке.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение определяет кольцо $1<(x+1)^2+(y-1)^2<4$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\sin z=2$

<u>Решение</u>. Воспользуемся равенством $\sin z=-i\,\mathrm{sh}\,iz$ и перейдём от гиперболической функции к функции e^{iz}: $-i\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=2$. Умножим всё уравнение на $2e^{iz}$, получим $-i(e^{2iz}-1)=4e^{iz}$. Обозначим $v=e^{iz}$ и решим квадратное уравнение

$v^2-4iv-1=0, \quad v_{1,2}=2i\pm\sqrt{-4+1}=2i\pm i\sqrt{3}=i(2\pm\sqrt{3})$. Таким образом,

$v_1=e^{iz}=i(2+\sqrt{3})$ или $iz_1=\mathrm{Ln}[i(2+\sqrt{3})]=\ln(2+\sqrt{3})+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$. Или

$z_1=-i\ln(2+\sqrt{3})+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2+\sqrt{3})$. Аналогично,

$v_2=e^{iz}=i(2-\sqrt{3})$ или $iz_1=\mathrm{Ln}[i(2-\sqrt{3})]=\ln(2-\sqrt{3})+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$. Или

$z_2=-i\ln(2-\sqrt{3})+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2-\sqrt{3})$.

<u>Ответ</u>. $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3})$

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$.

Решение. Воспользуемся формулами $\sin z=-i\cdot \operatorname{sh} iz$ и $\cos z=\operatorname{ch} iz$ и рассмотрим правую часть тождества:

$$\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2=-i\cdot[\operatorname{sh}(iz_1)\operatorname{ch}(iz_2)+\operatorname{ch}(iz_1)\operatorname{sh}(iz_2)]=-i\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}-$$
$$-i\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2}=-i\frac{e^{iz_1}e^{iz_2}+e^{iz_1}e^{-iz_2}-e^{-iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2}+e^{iz_1}e^{iz_2}+e^{-iz_1}e^{iz_2}}{4}-$$
$$-i\frac{-e^{iz_1}e^{-iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{4}=-i\frac{2(e^{iz_1+iz_2}-e^{-iz_1-iz_2})}{4}=-i\cdot\operatorname{sh}(iz_1+iz_2)=\sin(z_1+z_2)$$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\operatorname{Re} f(z)=u=-\frac{y}{x^2+y^2}\text{, *если* } f(1)=0.$$

Решение. Чтобы функция $u(x,y)$ бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: $\Delta u=0$, $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по x и по y:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y(x^2+y^2)^2-8yx^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{2(y^3-3yx^2)}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{(x^2+y^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2}=$$
$$=\frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y(x^2+y^2)^2-4y(x^2+y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}=-\frac{2(y^3-3yx^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$ Лапласиан Δu равен нулю, значит функция $u(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$ является гармонической. Восстановим мнимую часть $v(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. Тогда

$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy+\varphi(x)$, или $v(x,y)=\int\frac{2xydy}{(x^2+y^2)^2}+\varphi(x)=-\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi(x)$. Производная по x от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x)=0$. Или $\varphi(x)=C$. Таким образом,

$v(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2}+C$. Тогда $f(z)=-\frac{y}{x^2+y^2}-i(\frac{x}{x^2+y^2}+C)$. Или, через переменную z

$$f(z)=\frac{-i(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}+iC=.$$

$=\frac{-i}{(x+iy)}+iC=i(C-\frac{1}{z})$ Воспользуемся дополнительным условием $f(1)=0$. В данном случае $f(1)=i(C-1)$. Следовательно, $C=0$.

Ответ. $f(z)=-\frac{y+ix}{x^2+y^2}=-\frac{i}{z}$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Im}\,\bar{z}\,dz; \qquad C - \text{прямая}, \quad z_1 = 0,\ z_2 = -1-2i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C udx - vdy + i\int\limits_C udy + vdx$. В данном случае $f(z)=(x-iy)(-y)$, т.е. $u=-xy$, $v=y^2$. Значит $\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Im}\,\bar{z}dz = -\int\limits_C xydx + y^2dy - i\int\limits_C xydy - y^2dx$. Примем x за параметр. Составим уравнение прямой, по которой проводится интегрирование: $\frac{y}{-2} = \frac{x}{-1}$, т.е. $y = 2x, \quad dy = 2dx$. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение $x=0$, конечной $z_2=-1-2i$ – значение $x=-1$.

Следовательно, $\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Im}\,\bar{z}\,dz = -\int\limits_0^{-1}(2x^2 + 8x^2)dx - i\int\limits_0^{-1}(4x^2 - 4x^2)dx = -\left.\frac{10x^3}{3}\right|_0^{-1} = \frac{10}{3}$.

Ответ. $\int\limits_C \bar{z}\,\mathrm{Im}\,\bar{z}\,dz = \frac{10}{3}$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_0^{-i}(z+i)\cdot\sin z\,dz$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{-i}(z+i)\cdot\sin z\,dz = \begin{vmatrix} u = z+i & du = dz \\ dv = \sin z\,dz & v = -\cos z \end{vmatrix} = -(z+i)\cos z\Big|_0^{-i} + \int\limits_0^{-i}\cos z\,dz = -i + \sin z\Big|_0^{-i} = -i - \sin i$$

Перейдём к гиперболическому синусу: $\sin i = i\mathrm{sh}1$. Получим:

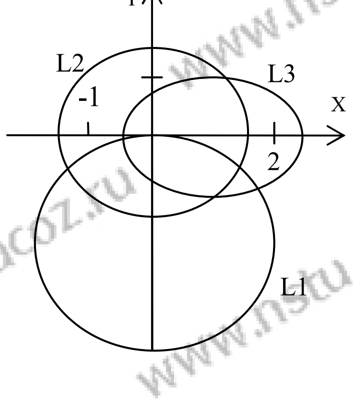
$$\int\limits_0^{-i}(z+i)\cdot\sin z\,dz = -i(1+\mathrm{sh}1).$$

Ответ. $\int\limits_0^{-i}(z+i)\cdot\sin z\,dz = -i(1+\mathrm{sh}1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L \frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}dz$, 1) $L_1: |z+2i| = 2$, 2) $L_2: |z| = \frac{3}{2}$, 3) $L_3: \frac{4(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$.

Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек $z=1$ и $z=2$. В круге $|z+2i| \le 2$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно, $I_1 = \int\limits_L \frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}dz = 0$. 2). В круге $|z| \le \frac{3}{2}$ есть одна особая точка $z=1$. Применим формулу Коши:

$$I_2 = \int\limits_{L_2}\frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}dz = \int\limits_{L_2}\frac{\frac{e^{-z^2}}{z-2}dz}{(z-1)^2} = 2\pi i\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-z^2}}{z-2}\right]_{z=1} = 2\pi i\left.\frac{-2ze^{-z^2}(z-2) - e^{-z^2}}{(z-2)^2}\right|_{z=1} = 2\pi i e^{-1}$$



3). В эллипсе $\frac{4(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$ есть две особые точки $z=1$ и $z=2$. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$$I_3 = \int\limits_{L3}\frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}dz = \int\limits_{l_1}\frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}dz + \int\limits_{l_2}\frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}dz,$$

где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=1, а L_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=2. Первый интеграл совпадает с I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_2} \frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}\,dz = \int\limits_{l_2} \frac{\frac{e^{-z^2}}{(z-1)^2}\,dz}{z-2} = 2\pi i\left[\frac{e^{-z^2}}{(z-1)^2}\right]_{z=2} = 2\pi i e^{-4}.$$ Следовательно,

$$I_3 = \int\limits_{L3} \frac{e^{-z^2}}{(z-2)(z-1)^2}\,dz = 2\pi i(e^{-1} + e^{-4}).$$

Ответ. $I_1 = 0,\ I_2 = 2\pi i e^{-1},\ I_3 = 2\pi i(e^{-1} + e^{-4})$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-2}{z^2+9z+20}$,   1) $4<|z|<5$ 2) $|z|>5$.   3) $1<|z+5|$.

Решение. Корнями уравнения $z^2+9z+20=0$ являются числа $z_1=-4$ и $z_2=-5$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-2}{z^2+9z+20} = \frac{A}{z+4} + \frac{B}{z+5} = \frac{A(z+5)+B(z+4)}{(z+4)(z+5)}$. Или $A(z+5)+B(z+4) = z-2$. При z=-4 получим A=-6. Если положить z=-5, то получим B=7.

Следовательно, $\frac{z-2}{z^2+9z+20} = \frac{-6}{z+4} + \frac{7}{z+5}$.   1). В кольце $4<|z|<5$ имеем $\frac{4}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$.

Тогда дробь можно представить следующим образом: $\frac{z-2}{z^2+9z+20} = \frac{-6}{z(1+\frac{4}{z})} + \frac{7}{5(1+\frac{z}{5})}$.

Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$, где $|q|<1$. В первой дроби q=-4/z, во второй дроби q= -z/5.

Следовательно, $\frac{z-2}{z^2+9z+20} = -6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{n-1}}{z^n} + 7\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства $\frac{4}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-2}{z^2+9z+20} = \frac{-6}{z(1+\frac{4}{z})} + \frac{7}{z(1+\frac{5}{z})} = -6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^{n-1}}{z^n} =$$

3) $1<|z+5|;\ \frac{1}{|z+5|}<1;$

$$\frac{z-2}{z^2+9z+20} = \frac{-6}{z+4} + \frac{7}{z+5} = \frac{6}{1-(z+5)} + \frac{7}{z+5} = 6\sum_1^{\infty}(z+5)^n + 7\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{5^{n+1}};$$

$$\frac{z-2}{z^2+9z+20} = 6\sum_1^{\infty}(z+5)^n + 7\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{5^{n+1}};$$

$$\frac{z-2}{z^2+9z+20} = 6\sum_1^{\infty}(z+5)^n + 7\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{5^{n+1}};$$

Ответ. 1). $\frac{z-2}{z^2+9z+20} = -6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{n-1}}{z^n} + 7\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$ в кольце $4<|z|<5$.

2). $\frac{z-2}{z^2+9z+20} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{7\cdot 5^{n-1} - 6\cdot 4^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>5$.

3) $\dfrac{z-2}{z^2+9z+20} = 6\sum\limits_{1}^{\infty}(z+5)^n + 7\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 7^n}{5^{n+1}}$; в кольце $1<|z+5|$.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{\frac{i\pi z}{3}}}{(4z^2-1)^2}dz$ **11.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z-1}}dz$

Решение. **10.** Преобразуем подинтегральную функцию: $\dfrac{e^{\frac{i\pi z}{3}}}{(4z^2-1)^2} = \dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{e^{\frac{i\pi z}{3}}}{(z^2-\frac{1}{4})^2}$.

Корни знаменателя: $z_1 = -\dfrac{1}{2}$, $z_2 = \dfrac{1}{2}$ I. Значения z_1 и z_2 являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$$\operatorname{Res}_{-\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{i\pi z}{3}}}{16(z^2-\frac{1}{4})^2} = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+\frac{1}{2})^2 e^{\frac{i\pi z}{3}}}{16(z+\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{2})^2}\right] = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left[\frac{\frac{i\pi}{3}e^{\frac{i\pi z}{3}}(z-\frac{1}{2})^2-2e^{\frac{i\pi z}{3}}(z-\frac{1}{2})}{16(z-\frac{1}{2})^4}\right] = \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}}{16}\left(\frac{i\pi}{3}+2\right),$$

$$\operatorname{Res}_{\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{i\pi z}{3}}}{16(z^2-\frac{1}{4})^2} = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-\frac{1}{2})^2 e^{\frac{i\pi z}{3}}}{16(z+\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{2})^2}\right] = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left[\frac{\frac{i\pi}{3}e^{\frac{i\pi z}{3}}(z+\frac{1}{2})^2-2e^{\frac{i\pi z}{3}}(z+\frac{1}{2})}{16(z+\frac{1}{2})^4}\right] = \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{16}\left(\frac{i\pi}{3}-2\right).$$

Получим окончательно: $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{\frac{i\pi z}{3}}}{(4z^2-1)^2}dz = 2\pi i\left[\frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}}{16}\left(\frac{i\pi}{3}+2\right)+\frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{16}\left(\frac{i\pi}{3}-2\right)\right] = -\frac{\pi^2}{12}\left(e^{-\frac{i\pi}{6}}+e^{\frac{i\pi}{6}}\right).$

Или $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{\frac{i\pi z}{3}}}{(4z^2-1)^2}dz = -\frac{\pi^2}{6}\operatorname{ch}\left(\frac{i\pi}{6}\right) = -\frac{\pi^2}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12}$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку $z=1$. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции e^w по степеням w:

$\operatorname{sh}(w) = 1 + w + \dfrac{w^2}{2!} + \dfrac{w^3}{3!} + \dfrac{w^4}{4!} + \ldots$ Полагая $w = \dfrac{1}{z-1}$, получим:

$$ze^{\frac{1}{z-1}} = (1+z-1)\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2(z-1)^2}+\frac{1}{6(z-1)^3}+\frac{1}{24(z-1)^4}+\ldots\right] = z+1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\ldots$$

Последующие слагаемые не содержат степени $(z-1)^{-1}$. Коэффициентом при $(z-1)^{-1}$ в разложении функции будет число 3/2. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z-1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname{Res}_1[ze^{\frac{1}{z-1}}] = \dfrac{3}{2}$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=1} ze^{\frac{1}{z-1}}dz = 2\pi i\cdot\frac{3}{2} = 3\pi i.$$

Ответ. 10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{\frac{i\pi z}{3}}}{(4z^2-1)^2}dz = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12}$. 11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} ze^{\frac{1}{z-1}}dz = 3\pi i$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Решение. Корнями знаменателя функции $f(z)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$ являются числа $z_{1,2}=\pm i$. В данном случае в верхней полуплоскости расположен один полюс z=i данной функции кратности 3. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{(z^2+1)^3}$.

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{(z-i)^3}{(z+i)^3(z-i)^3} = \frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{-3}{(z+i)^4} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5} = \frac{6}{64i} = \frac{3}{32i}$$

Следовательно. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \underset{i}{\frac{3}{32i}}) = \frac{3\pi}{16}$.

Ответ. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{16}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \sqrt[3]{z+i}\,dz$, где C: прямая, $z_1=8-i$, $z_2=7i$, $\sqrt[3]{8}=-1+i\sqrt{3}$.

Решение. Точки z_1 и z_2 не являются особыми точками для подинтегральной функции. Следовательно, можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$\int\limits_C \sqrt[3]{z+i}\,dx = \frac{3}{4}(z+i)\sqrt[3]{z+i}\Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{3}{4}((z_2+i)\sqrt[3]{z_2+i}-(z_1+i)\sqrt[3]{z_1+i})$. Рассмотрим функцию $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|^2}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=8 функция будет принимать заданное значение. С одной стороны $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{|8|}(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}) = 2(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3})$. С другой стороны $\sqrt[3]{8}=-1+i\sqrt{3}=2(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=1. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение. $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{3})$. Таким образом,

$$(z_1+i)\cdot\sqrt[3]{z_1+i} = 8\cdot\sqrt[3]{8} = 16(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}) = 16(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}) = -8(1-i\sqrt{3}),$$

$$(z_2+i)\cdot\sqrt[3]{z_2+i} = 8i\cdot\sqrt[3]{8i} = 16i(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}) = 16i(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}) = -8(1+i\sqrt{3}).$$

Следовательно,

$$\int\limits_C \sqrt[3]{z+i}\,dx = \frac{3}{4}(z+i)\sqrt[3]{z+i}\Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{3}{4}((z_2+i)\sqrt[3]{z_2+i}-(z_1+i)\sqrt[3]{z_1+i}) = \frac{-3\cdot 8}{4}(1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}) = -12i\sqrt{3}.$$

Ответ. $\int\limits_C \sqrt[3]{z+i}\,dx = -12i\sqrt{3}$.