Вариант 18

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\mathrm{ch}(2-3i)$; б) $\ln(4-3i)$

<u>Решение</u>. а). Воспользуемся формулой связи между тригонометрическим косинусом и гиперболическим косинусом: ; ch(z)= cos(iz). Получим ch(2-3i)=cos(2i-3i^2)= cos(3+2i). По формуле тригонометрии cos(3+2i)=cos(2i)·cos3-sin(2i)·sin3. Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

cos(2i)=ch2; sin(2i)= ish2. Получим ch(2-3i)=cos3·ch2- i·sin3·sh2.

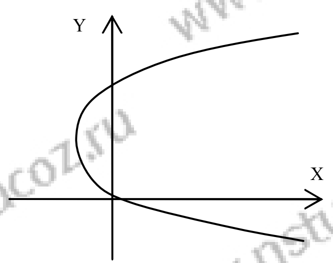
б). Воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z)=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)$. В данном случае z=4-3i, следовательно, $|z|=\sqrt{16+9}=5$, $\varphi=\arg z=-\mathrm{arctg}\dfrac{3}{4}$. Тогда

$$\mathrm{Ln}(4-3i)=\ln 5+i(-\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+2k\pi)=\ln 5+i\cdot(2k\pi-\mathrm{arctg}\frac{1}{2})$$

<u>Ответ. а).</u> ch(2-3i)=cos3·ch2- i·sin3·sh2. б). $\mathrm{Ln}(4-3i)=\ln 5+i\cdot(2k\pi-\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2})$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z-i|=\mathrm{Re}\,z+1.$$



<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $|x+i(y-1)|=x+1$.

Или $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=x+1$. Возведём обе части неравенства в квадрат. Получим: $x^2+(y-1)^2=x^2+2x+1$. Или $(y-1)^2=2x+1$. Это неравенство определяет параболу с фокусом на оси OX с вершиной в точке (-1/2; 1

<u>Ответ</u>. Данное соотношение определяет параболу $(y-1)^2=2x+1$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\mathrm{sh}\,z=2$.

<u>Решение</u>. Перейдём от гиперболической функции к функции e^{iz}:

$\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}=2$. Умножим всё уравнение на $2e^z$, получим $e^{2z}-1=4e^z$. Обозначим $v=e^z$ и решим квадратное уравнение $v^2-4v-1=0$, $v_{1,2}=2\pm\sqrt{4+1}=2\pm\sqrt{5}$. Таким образом,

$v_1=e^z=2+\sqrt{5}$ или $z_1=\mathrm{Ln}(2+\sqrt{5})=\ln(2+\sqrt{5})+2k\pi i$.

$v_2=e^z=2-\sqrt{5}$ или $z_2=\mathrm{Ln}(2-\sqrt{5})=\ln(\sqrt{5}-2)+\pi i(2k+1)$

<u>Ответ</u>. $z_1=\ln(2+\sqrt{5})+2k\pi i$, $z_2=\ln(\sqrt{5}-2)+(2k+1)\pi i$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\mathrm{sh}(z-\pi i)=-\mathrm{sh}z$.

<u>Решение</u>. Рассмотрим левую часть тождества:

$$\cdot\mathrm{sh}(z-\pi i)=\frac{e^{z-\pi i}-e^{-z+\pi i}}{2}=\frac{1}{2}(e^z e^{-\pi i}-e^{-z}e^{\pi i})=\frac{1}{2}(e^{iz}(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))-$$

$$-e^{-z}(\cos\pi+i\sin\pi))=\frac{1}{2}(e^z(-1)-e^{-z}(-1))=-\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=-\mathrm{sh}\,iz$$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной мнимой части её:*

$$\mathrm{Im}\,f(z)=v=3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}+2x^2-2y^2-x,\ \textit{если}\ f(i)=\frac{3}{2}i.$$

<u>Решение</u>. Чтобы функция v(x,y) бала мнимой частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δv был бы равен нулю: Δv=0,

$\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от v по *x* и по *y*:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 + \frac{y(x^2+y^2)^2 - 4x^2 y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = 2 + \frac{y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y - \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{2(x^2+y^2)^2} = -2y - \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2 - \frac{-y(x^2+y^2)^2 - 2y(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= -2 - \frac{y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Очевидно,что лапласиан Δv равен нулю. Таким образом, данная функция является гармонической. Восстановим действиительную часть u(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Из второго условия получаем: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2x - \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$. Тогда $u(x,y) = \int \dfrac{\partial u}{\partial y} dy + \varphi(x)$, или

$u(x,y) = -\int \{2x + \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}\} dy + \varphi(x) = -2xy + \dfrac{x}{2(x^2+y^2)} + \varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -2y + \dfrac{(x^2+y^2)-2x^2}{2(x^2+y^2)} + \varphi'(x) = -2y - \dfrac{y^2-x^2}{2(x^2+y^2)} + \varphi'(x)$ С другой стороны по первому условию Даламбера-Эйлера $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2y - \dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}$.

Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x) = 0$. Или $\varphi(x) = C$. Таким образом,

$u(x,y) = \dfrac{x}{2(x^2+y^2)} - 2xy + C$. Тогда $f(z) = \dfrac{x}{2(x^2+y^2)} - 2xy + C + i(3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2+y^2)})$.

Перейдём к переменной z:

$$f(z) = \frac{x-iy}{2(x^2+y^2)} + i(x^2 + 2ixy - y^2) + 3i + C = \frac{\bar{z}}{2z\bar{z}} + iz^2 + 3i + C = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + C.$$

Воспользуемся дополнительным условием $f(i) = \dfrac{3}{2}i$. В данном случае

$f(1) = \dfrac{1}{2i} - i + 3i + C = \; = -\dfrac{i}{2} + 2i + C = \dfrac{3i}{2} + C$ Следовательно, C=0.

<u>Ответ</u>. $f(z) = \dfrac{x}{2(x^2+y^2)} - 2xy + i(3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2+y^2)}) = \dfrac{1}{2z} + iz^2 + 3i.$

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C (1 - 2\bar{z})\, dz; \qquad C: y = x^2, \quad z_1 = 0, \; z_2 = -2 + 4i.$$

<u>Решение</u>. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$. В данном случае f(z)=(1-2x+2iy), т.е. u=1-2x, v=2y. Значит $\int_C (1-2\bar{z})dz = \int_C (1-2x)dx - 2ydy + i\int_C (1-2x)dy + 2ydx$. Примем x за параметр. Тогда $y=x^2$, $dy=2xdx$. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение x=0, конечной $z_2=-2+4i$ – значение x=-2.

Следовательно, $\int_C (1-2\bar{z})\, dz = \int_0^{-2} (1 - 2x - 4x^3)dx - i\int_0^{-2} (2x - 4x^2 + 2x^2)dx =$

$$=[x-x^2-x^4]\Big|_0^{-2}+i[x^2-\frac{2x^3}{3}]\Big|_0^{-2}=-22+\frac{28}{3}i$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C (1-2\bar{z})\,dz=-22+\frac{28}{3}i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_{-1}^{i}(z-i)\cdot\cos z\,dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{-1}^{i}(z-i)\cdot\cos z\,dz=\begin{vmatrix}u=z-i & du=dz\\ dv=\cos z\,dz & v=\sin z\end{vmatrix}=(z-i)\sin z\Big|_{-1}^{i}-\int\limits_{-1}^{i}\sin z\,dz=-(1+i)\sin 1+\cos z\Big|_{-1}^{i}=$$

$=-(1+i)\sin 1+\cos i-\cos 1$. Перейдём к гиперболическому косинусу: $\cos i=\mathrm{ch}1$. Получим:

$$\int\limits_{-1}^{i}(z-i)\cdot\cos z\,dz=\mathrm{ch}1-\cos 1-\sin 1-i\sin 1$$

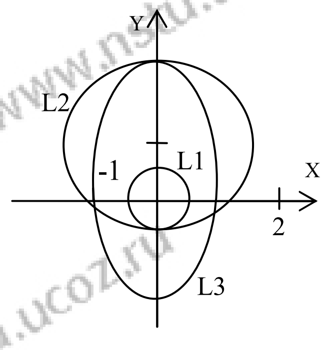
<u>Ответ</u>. $\int\limits_{-1}^{i}(z-i)\cdot\cos z\,dz=\mathrm{ch}1-\cos 1-\sin 1-i\sin 1$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int\limits_L \frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz$, 1) $L_1: |z|=\frac{1}{2}$, 2) $L_2: |z-i|=\frac{3}{2}$, 3) $L_3: x^2+\frac{(2y-1)^2}{16}=1$.

<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек $z=-i$ и $z=2i$. В круге $|z|\le\frac{1}{2}$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно,

$I_1=\int\limits_L \frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz=0$. 2). В круге $|z-i|\le\frac{3}{2}$ есть одна особая точка $z=2i$. Применим формулу Коши:

$$I_2=\int\limits_{L_2}\frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz=\int\limits_{L_2}\frac{\frac{e^{z^2}}{z+i}dz}{(z-2i)^2}=2\pi i\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{z^2}}{z+i}\right]_{z=2i}=2\pi i\frac{2ze^{z^2}(z+i)-e^{z^2}}{(z+i)^2}\Bigg|_{z=1}=\frac{26}{9}\pi ie^{-4}$$



3). В эллипсе $x^2+\frac{(2y-1)^2}{16}=1$ есть две особые точки $z=-i$ и $z=2i$. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$$I_3=\int\limits_{L_3}\frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz=\int\limits_{l_1}\frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz+\int\limits_{l_2}\frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz,$$

где L_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z=-i$, а L_2 - окружность малого радиуса с центром в точке $z=2i$. Второй интеграл совпадает с I_2. Вычислим первый интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_1}\frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz=\int\limits_{l_1}\frac{\frac{e^{z^2}}{(z-2i)^2}dz}{z+i}=2\pi i\left[\frac{e^{z^2}}{(z-2i)^2}\right]_{z=-i}=-\frac{2}{9}\pi ie^{-1}.$$ Следовательно,

$$I_3=\int\limits_{L_3}\frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-2i)^2}dz=\frac{2\pi i}{9}(13e^{-4}-e^{-1}).$$

Ответ. $I_1 = 0,\ I_2 = \frac{26\pi i}{9} e^{-4},\ I_3 = \frac{2\pi i}{9}(13e^{-4} - e^{-1})$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-2}{z^2+2z-15}$, 1) $3 < |z| < 5$ 2) $|z| > 5$.

Решение. Корнями уравнения $z^2+2z-15=0$ являются числа $z_1=3$ и $z_2=-5$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-2}{z^2+2z-15} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+5} = \frac{A(z+5)+B(z-3)}{(z-3)(z+5)}$. Или $A(z+5)+B(z-3) = z-2$. При $z=3$ получим $A=1/8$. Если положить $z=-5$, то получим $B=7/8$. Следовательно, $\frac{z-2}{z^2+2z-15} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z-3} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{z+5}$. 1). В кольце $3 < |z| < 5$ имеем $\frac{3}{|z|} < 1$ и $\frac{|z|}{5} < 1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-2}{z^2+2z-15} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{5(1+\frac{z}{5})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$, где $|q| < 1$. В первой дроби $q=3/z$, во второй дроби $q=-z/5$. Следовательно,

$\frac{z-2}{z^2+2z-15} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} + \frac{7}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z| > 5$ выполняются неравенства $\frac{3}{|z|} < 1$ и $\frac{5}{|z|} < 1$. Следовательно,

$$\frac{z-2}{z^2+2z-15} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{5}{z})} = \frac{1}{8}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} + \frac{7}{8}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^{n-1}}{z^n} = = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+7(-5)^{n-1}}{z^n}.$$

Ответ. 1). $\frac{z-2}{z^2+2z-15} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n} + \frac{7}{8}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$. в кольце $3 < |z| < 5$.

2). $\frac{z-2}{z^2+2z-15} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+7(-5)^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z| > 5$.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z^3+8)}dz$ **11.** $\int\limits_{|z|=2} z\cos\frac{z}{z+1}dz$

Решение. **10.** Преобразуем подинтегральную функцию: $\frac{2z-1}{z(z^3+8)} = \frac{2z-1}{z(z+2)(z^2-2z+4)}$.

Корни знаменателя: $z_1 = 0,\quad z_2 = -2,\quad z_3 = 1 - i\sqrt{3},\quad z_4 = 1 + i\sqrt{3}$. Все корни являются простыми полюсами подынтегральной функции. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{0}\frac{2z-1}{z(z^3+8)} = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z(2z-1)}{z(z^3+8)}\right] = -\frac{1}{8},\quad \operatorname*{Res}_{-2}\frac{2z-1}{z(z^3+8)} = \lim_{z\to -2}\left[\frac{(z+2)(2z-1)}{z(z+2)(z^2-2z+4)}\right] = \frac{5}{24},$$

$$\operatorname*{Res}_{1-i\sqrt{3}}\frac{2z-1}{z(z^3+8)} = \lim_{z\to 1-i\sqrt{3}}\left[\frac{(z-1+i\sqrt{3})(2z-1)}{z(z+2)(z-1+i\sqrt{3})(z-1-i\sqrt{3})}\right] = \frac{(1-2i\sqrt{3})}{-2i\sqrt{3}(1-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})} = -\frac{(1-2i\sqrt{3})}{24}$$

$$\operatorname*{Res}_{1+i\sqrt{3}}\frac{2z-1}{z(z^3+8)} = \lim_{z\to 1+i\sqrt{3}}\left[\frac{(z-1-i\sqrt{3})(2z-1)}{z(z+2)(z-1+i\sqrt{3})(z-1-i\sqrt{3})}\right] = \frac{(1+2i\sqrt{3})}{2i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = -\frac{(1+2i\sqrt{3})}{24}$$

Получим окончательно: $\int\limits_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z^3+8)}dz=2\pi i(-\frac{1}{8}+\frac{5}{24}-\frac{1-2i\sqrt{3}+1+2i\sqrt{3}}{24})=0$.

11. Преобразуем подинтегральную функцию:

$z\cos\frac{z}{z+1}=z\cos\frac{z+1-1}{z+1}=z\cos(1-\frac{1}{z+1})=z(\cos 1\cos\frac{1}{z+1}+\sin 1\sin\frac{1}{z+1})$. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=-1. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функций cosw и sinw по степеням w:

$\cos(w)=1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\frac{w^6}{6!}+...,\quad \sin(w)=w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\frac{w^7}{7!}+...$ Полагая $w=\frac{1}{z+1}$, получим:

$$z\cos\frac{z}{z+1}=z\{\cos 1[1-\frac{1}{2(z+1)^2}+\frac{1}{24(z+1)^4}-\frac{1}{720(z+1)^6}+...]-\sin 1[\frac{1}{(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^3}+$$

$$+\frac{1}{120(z+1)^5}+...]\}=\cos 1[1-\frac{z+1-1}{2(z+1)^2}+\frac{z}{24(z+1)^4}-\frac{z}{720(z+1)^6}+...]-\sin 1[\frac{z+1-1}{(z+1)}-\frac{z}{6(z+1)^3}+$$

$$+\frac{z}{120(z+1)^5}+...]\}=\cos 1[1-\frac{1}{2(z+1)}+\frac{1}{2(z+1)^2}+...]-\sin 1[1-\frac{1}{(z+1)}-\frac{z}{6(z+1)^3}+...]$$

Последующие слагаемые не содержат степени $(z+1)^{-1}$. Коэффициентом при $(z+1)^{-1}$ в разложении функции будет число $-(\frac{1}{2}\cos 1+\sin 1)$. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z+1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\underset{-1}{\mathrm{Res}}[z\cos\frac{z}{z+1}]=-(\frac{1}{2}\cos 1+\sin 1)$.

Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=2}z\cos\frac{z}{z+1}dz=-2\pi i\cdot(\frac{1}{2}\cos 1+\sin 1)=-\pi i(\cos 1+2\sin 1).$$

<u>Ответ</u>. 10. $\int\limits_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z^3+8)}dz=0$. 11. $\int\limits_{|z|=2}z\cos\frac{z}{z-1}dz=-\pi i(\cos 1+2\sin 1)$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(x^2+4)^3}.$$

<u>Решение</u>. Корнями знаменателя функции $f(z)=\frac{1}{(x^2+4)^3}$ являются числа $z_{1,2}=\pm 2i$. В данном случае в верхней полуплоскости расположен один полюс z=2i данной функции кратности 3. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^3}=2\pi i\cdot\underset{2i}{\mathrm{Res}}\frac{1}{(z^2+4)^3}$.

$$\underset{2i}{\mathrm{Res}}\frac{1}{(z^2+4)^3}=\frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{(z-2i)^3}{(z+2i)^3(z-2i)^3}=\frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\frac{-3}{(z+2i)^4}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{12}{(z+2i)^5}=\frac{6}{1024i}=\frac{3}{512i}.$$

Следовательно. $\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(x^2+4)^3}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^3}=\frac{1}{2}2\pi i\frac{3}{512i}=\frac{3\pi}{512}$.

<u>Ответ</u>. $\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(x^2+4)^3}=\frac{3\pi}{512}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C z \ln z dz$, где C – четверть окружности $|z| = 1$, $(x \geq 0, y \leq 0)$, $\quad z_1 = 1, \quad z_2 = -i, \quad \ln 1 = 0$.

<u>Решение</u>. Рассмотрим функцию $\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке z=1 величина lnz будет принимать заданное значение. С одной стороны $\mathrm{Ln}\, 1 = \ln|1| + i(0 + 2k\pi)$. С другой стороны $\ln 1 = 0$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=0. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\ln z = \ln|z| + i\varphi$. Таким образом,

$$\int\limits_C z \ln z\, dz = \begin{vmatrix} u = \ln z & du = \dfrac{dz}{z} \\ dv = zdz & v = \dfrac{z^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{z^2}{2} \ln z \Big|_1^{-i} - \frac{1}{2} \int\limits_C zdz = \frac{z^2}{4}(2\ln z - 1)\Big|_1^{-i} = -\frac{1}{4}(2\ln(-i) - 1) -$$

$$-\frac{1}{4}(2\ln(1) - 1) = -\frac{1}{4}[2(\ln|-i| - \frac{i\pi}{2} +) - 1 - 1] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-\pi i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi i.$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C z \ln z dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi i$.