Вариант 19

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\operatorname{sh}(3-2i)$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{2}(1+i)}$

<u>Решение</u>. а). Воспользуемся формулой связи между тригонометрическим синусом и гиперболическим синусом: ; $\operatorname{sh}(z) = -i\sin(iz)$. Получим $\operatorname{sh}(3-2i) = -i\cdot\sin(3i-2i^2) = -i\cdot\sin(2+3i)$. По формуле тригонометрии $\sin(2+3i) = \sin 2\cdot\cos(3i) + \cos 2\cdot\sin(3i)$.

Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$\cos(3i) = \operatorname{ch}3$; $\sin(3i) = i\operatorname{sh}3$. Получим $\operatorname{sh}(3-2i) = -i(\sin 2\cdot\operatorname{ch}3 + i\cdot\cos 2\cdot\operatorname{sh}3) = \cos 2\cdot\operatorname{sh}3 - i\cdot\sin 2\cdot\operatorname{ch}3$.

б). Воспользуемся формулой $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3})$. В данном примере

$z = 4\sqrt{2}(1+i)$. Тогда $|z| = \left|4\sqrt{2}(1+i)\right| = z = 4\sqrt{2}\sqrt{1^2+1^2} = 8$, а $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.

Следовательно,

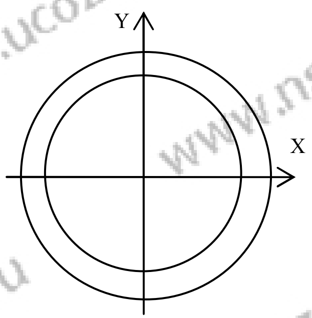
$$\sqrt[3]{4\sqrt{2}(1+i)} = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{2}) = 2[\cos(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})]$$

<u>Ответ. а)</u> $\operatorname{sh}(3-2i) = \cos 2\cdot\operatorname{sh}3 - i\cdot\sin 2\cdot\operatorname{ch}3$.

б). $\sqrt[3]{4\sqrt{2}(1+i)} = 2[\cos(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})],\ k = 0, 1, 2.$

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$3 < |z-i| < 4.$$



<u>Решение</u>. Так как $z=x+iy$, то данное соотношение имеет вид: $3 < |x+i(y-1)| < 4$.

Или $3 < \sqrt{x^2+(y-1)^2} < 4$. Возведём все части неравенства в квадрат. Получим: $9 < x^2+(y-1)^2 < 16$. Это неравенство определяет кольцо, заключённое между окружностью $x^2+(y-1)^2 = 9$ радиуса 3 с центром в точке (0;1) и окружностью $x^2+(y-1)^2 = 16$ радиуса 4 с центром в той же точке.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение определяет кольцо $9 < x^2+(y-1)^2 < 16$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\sin z = i\operatorname{sh} z$

<u>Решение</u>. Воспользуемся равенством $\operatorname{sh} z = -i\sin iz$, получим: $\sin z = i(-i\sin iz) = \sin iz$ или $\sin z - \sin iz = 0$. Применим формулу для разности синусов:

$\sin z - \sin iz = 2\cos\frac{z+iz}{2}\sin\frac{z-iz}{2} = 0$. Это равенство возможно, если $\cos\frac{z+iz}{2} = 0$ или $\sin\frac{z-iz}{2} = 0$. Из первого равенства следует: $\frac{z+iz}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ или $z(1+i) = \pi(2k+1)$. Тогда $z = \frac{\pi(2k+1)}{1+i} = \frac{\pi(2k+1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\pi(2k+1)(1-i)}{2}$. Из второго равенства получаем

$\frac{z-iz}{2} = k\pi$ или $z(1-i) = 2k\pi$. Тогда $z = \frac{2k\pi}{1-i} = \frac{2k\pi(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2k\pi(1+i)}{2} = k\pi(1+i)$ ..

<u>Ответ</u>. $z_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)(1-i)$, $z_2 = \pi k(1+i)$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2$.

<u>Решение</u>. Воспользуемся формулами $\sin z = -i \cdot \operatorname{sh} iz$ и $\cos z = \operatorname{ch} iz$ и рассмотрим правую часть тождества:

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = [\operatorname{ch}(i z_1)\operatorname{ch}(iz_2) - (-i)^2 \operatorname{sh}(iz_1)\operatorname{sh}(iz_2)] = \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} +$$

$$+ \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2} = \frac{e^{iz_1} e^{iz_2} + e^{iz_1} e^{-iz_2} + e^{-iz_1} e^{iz_2} + e^{-iz_1} e^{-iz_2} + e^{iz_1} e^{iz_2} - e^{-iz_1} e^{iz_2}}{4} +$$

$$+ \frac{-e^{iz_1} e^{-iz_2} + e^{-iz_1} e^{-iz_2}}{4} = \frac{2(e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2})}{4} = \operatorname{ch}(iz_1 + iz_2) = \cos(z_1 + z_2),$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\operatorname{Re} f(z) = u = Ax^2 y + y^3 + 2x, \text{ *если* } f(i) = 1 + i.$$

<u>Решение</u>. Чтобы функция $u(x,y)$ бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: $\Delta u = 0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2Axy + 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2Ay, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Ax^2 + 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y.$$

Чтобы лапласиан Δu был равен нулю, нужно положить $A=3$. Таким образом, функция $u(x, y) = -3x^2 y + y^3 + 2x$ является гармонической. Восстановим мнимую часть $v(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy + 2$. Тогда $v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + \varphi(x)$, или

$v(x, y) = \int (-6xy + 2) dy + \varphi(x) = -3xy^2 + 2y + \varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + \varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x) = 3x^2$. Или $\varphi(x) = x^3 + C$.

Таким образом, $v(x, y) = -3xy^2 + 2y + x^3 + C$. Тогда

$f(z) = -3x^2 y + y^3 + 2x + i \cdot (-3xy^2 + 2y + x^3 + C)$. Перейдём к переменной z:

$f(z) = i(x^3 + 3ix^2 y - 3xy^2 - iy^3) + 2(x + iy) + iC = iz^3 + 2z + iC$. .

Воспользуемся дополнительным условием $f(i)=1+i$. В данном случае $f(i)=1+2i+iC$. Следовательно, $C=-1$.

<u>Ответ</u>. $f(z) = -3x^2 y + y^3 + 2x + i \cdot (-3xy^2 + 2y + x^3 - 1) = i(z^3 - 1) + 2z$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C (i + \bar{z})\, dz; \qquad C - \text{прямая}, \quad z_1 = 0, \; z_2 = -2 - i.$$

<u>Решение</u>. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx$. В данном случае $f(z)=(i+x-iy)$, т.е. $u=x$, $v=1-y$. Значит $\int_C (i + \bar{z}) dz = \int_C x dx - (1 - y) dy + i \int_C x dy + (1 - y) dx$. Примем x за параметр.

Составим уравнение прямой, проходящей через две точки:

$\frac{y}{-1}=\frac{x}{-2}$, т.е. $y=\frac{x}{2}$, $dy=\frac{dx}{2}$. Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение $x=0$, конечной $z_2=-2-i$ – значение $x=-2$.

Следовательно, $\int\limits_C (i+\bar{z})\,dz = \int\limits_0^{-2}(x-\frac{1}{2}+\frac{x}{4})dx + i\int\limits_0^{-2}(\frac{x}{2}+1-\frac{x}{2})dx = [\frac{5x^2}{8}-\frac{x}{2}]\Big|_0^{-2} + ix\Big|_0^{-2} = \frac{7}{2}-2i$.

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C (i+\bar{z})\,dz = \frac{7}{2}-2i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int\limits_0^i (z+i)\cdot \operatorname{sh} z\,dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу интегрирования по частям:

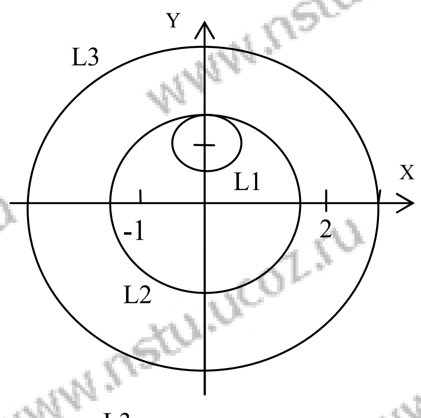
$$\int\limits_0^i (z+i)\cdot \operatorname{sh} z\,dz = \begin{vmatrix} u=z+i & du=dz \\ dv=\operatorname{sh} z\,dz & v=\operatorname{ch} z \end{vmatrix} = (z+i)\cdot \operatorname{ch} z\Big|_0^i - \int\limits_0^i \operatorname{ch} z\,dz = 2i\cdot \operatorname{ch} i - i - \operatorname{sh} z\Big|_0^i = 2i\cdot \operatorname{ch} i - i - \operatorname{sh} i.$$

Перейдём к тригонометрическим функциям: $\operatorname{sh} i = i\sin 1$, $\operatorname{ch} i = \cos 1$. Получим:

$$\int\limits_0^i (z+i)\cdot \operatorname{sh} z\,dz = 2i\cos 1 - i - i\sin 1.$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_0^i (z+i)\cdot \operatorname{sh} z\,dz = i(2\cos 1-\sin 1-1)$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам* L_1, L_2, L_3. $\int\limits_L \frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}$, 1) $L_1: |z-i|=\frac{1}{2}$, 2) $L_2: |z|=\frac{3}{2}$, 3) $L_3: |z|=3$.



<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек $z=-1$ и $z=2$. В круге $|z-i|\le\frac{1}{2}$ подынтегральная функция аналитична. Следовательно, $I_1=\int\limits_L \frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}=0$.

2). Внутри области $|z|\le\frac{3}{2}\sqrt{2}$ расположена одна особая точка $z=-1$. Вычислим интеграл по интегральной формуле Коши:

$$L_2=\int\limits_{L_2}\frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}=\int\limits_{L_2}\frac{\frac{e^z}{z-2}dz}{(z+1)^3}=\frac{2\pi i}{2!}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{e^z}{z-2}\right]_{z=-1}=$$

$$=\pi i\frac{d}{dz}\frac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=-1}=\pi i\frac{d}{dz}\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}\Bigg|_{z=-1}=\pi i\frac{[e^z(z-3)+e^z](z-2)^2-2e^z(z-3)(z-2)}{(z-2)^4}\Bigg|_{z=-1}=$$

$$=\pi i\frac{e^z[z^2-6z+10]}{(z-2)^3}\Bigg|_{z=-1}=-\frac{17}{27}\pi i e^{-1}$$

3). В круге $|z|\le 3$ есть две особые точки $z=-1$ и $z=2$. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$I_3=\int\limits_{L_3}\frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}=\int\limits_{l_1}\frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}+\int\limits_{l_2}\frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}$, где L_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z=-1$, а L_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=2. Первый интеграл совпадает с уже вычисленным интегралом I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int_{l_2}\frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}=\int_{l_2}\frac{\frac{e^z}{(z+1)^3}dz}{z-2}=2\pi i\cdot\left[\frac{e^z}{(z+1)^3}\right]_{z=2}=2\pi i\cdot\frac{e^2}{27}=\frac{2}{27}\pi i e^2$$

. Следовательно, $I_3=\int_{L_3}\frac{e^z dz}{(z+1)^3(z-2)}=2\pi i\cdot\frac{e^2}{27}=\frac{2}{27}\pi i e^2-\frac{17}{27}\pi i e^{-1}=\frac{\pi i}{27}(2e^2-17e^{-1})$

Ответ. $I_1=0,\ I_2=-\frac{17}{27}\pi i e^{-1},\ I_3=\frac{\pi i}{27}(2e^2-17e^{-1})$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-4}{z^2+8z+15}$, 1) $3<|z|<5$ 2) $|z|>5$.

Решение. Корнями уравнения $z^2+8z+15=0$ являются числа $z_1=-3$ и $z_2=-5$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-4}{z^2+8z+15}=\frac{A}{z+3}+\frac{B}{z+5}=\frac{A(z+5)+B(z+3)}{(z+3)(z+5)}$. Или $A(z+5)+B(z+3)=z-4$. При z=-3 получим A=-7/2. Если положить z=-5, то получим B=9/2. Следовательно, $\frac{z-4}{z^2+8z+15}=-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{z+3}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{z+5}$. 1). В кольце $3<|z|<5$ имеем $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-4}{z^2+8z+15}=-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{5(1+\frac{z}{5})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=-3/z, во второй дроби q= -z/5. Следовательно,

$\frac{z-4}{z^2+8z+15}=-\frac{7}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}+\frac{9}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства $\frac{3}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-4}{z^2+8z+15}=-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{3}{z})}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{5}{z})}=-\frac{7}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}+\frac{9}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^{n-1}}{z^n}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{9\cdot 5^{n-1}-7\cdot 3^{n-1}}{z^n}.$$

Ответ. 1). $\frac{z-4}{z^2+8z+15}=-\frac{7}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}+\frac{9}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$. в кольце $3<|z|<5$.

2). $\frac{z-4}{z^2+8z+15}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{9\cdot 5^{n-1}-7\cdot 3^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>5$.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int_{|z|=2}\frac{\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z^2+1)}dz$ **11.** $\int_{|z|=2}z^2\sin\frac{1}{z+1}dz$

Решение. **10.**. .Найдём корни знаменателя: $z_1=1$, $z_2=-i$, $z_3=i$. Значениz $z_2=-i$ и $z_3=i$ являются простыми полюсами подынтегральной функции, а значение $z_1=1$ -

полюсом кратности 3. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{-i}\frac{\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z^2+1)}=\lim_{z\to -i}\left[\frac{(z+i)\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z+i)(z-i)}\right]=\lim_{z\to -i}\left[\frac{\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z-i)}\right]=-\frac{\cos^2(-\frac{\pi i}{2})}{4(i+1)}=-\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}}{4(i+1)},$$

$$\operatorname*{Res}_{i}\frac{\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z^2+1)}=\lim_{z\to i}\left[\frac{(z-i)\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z+i)(z-i)}\right]=\lim_{z\to i}\left[\frac{\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z+i)}\right]=-\frac{\cos^2\frac{\pi i}{2}}{4(i-1)}=\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}}{4(i-1)}$$

$$\operatorname*{Res}_{1}\frac{\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z^2+1)}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3\frac{\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z-1)^3(z^2+1)}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{-\frac{\pi}{2}(z^2+1)\sin\pi z-2z\cos^2\frac{\pi z}{2}}{(z^2+1)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[\frac{-(\pi\sin\pi z+\frac{\pi^2}{2}(z^2+1)\cos\pi z+2\cos^2\frac{\pi z}{2}-\pi z\sin\pi z)(z^2+1)^2}{(z+1)^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\frac{\pi}{2}(z^2+1)\sin\pi z+2z\cos^2\frac{\pi z}{2})4z(z^2+1)}{(z+1)^4}\right]=\frac{\pi^2}{8}$$

Получим окончательно: $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^2(z^2-1)}dz=2\pi i\cdot\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}}{4(i+1)}+\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}}{4(i-1)}\right)=\frac{\pi i}{4}\left(\pi^2-2\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}\right).$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=-1. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции sh(w) по степеням w:

$\sin(w)=w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\frac{w^7}{7!}+\dots$ Полагая $w=\frac{1}{z+1}$, получим:

$$z^2\sin\frac{1}{z+1}=(z^2-1+1)\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\frac{1}{5!(z+1)^5}-\frac{1}{7!(z+1)^7}+\dots\right]=z-1+\frac{1}{z+1}-\frac{z+1-2}{3!(z+1)^2}-$$

$$-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\dots=z-1+\left(1-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{z+1}+\frac{2}{3!(z+1)^2}+\dots$$

Коэффициентом при $(z+1)^{-1}$ в разложении функции будет число 5/6. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z+1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{-1}\left[z^2\sin\frac{1}{z+1}\right]=\frac{5}{6}$.

Следовательно.

$$\int\limits_{|z|=2}z^2\sin\frac{1}{z+1}dz=2\pi i\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{3}\pi i.$$

<u>Ответ</u>. 10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{\sin^2\pi z}{(z-1)^2(z^2-1)}dz=\frac{\pi i}{4}\left(\pi^2-2\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}\right)$. 11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}z^2\sin\frac{1}{z+1}dz=\frac{5}{3}\pi i$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+1}{(x^2+9)(x^2+16)}dx.$$

<u>Решение</u>. Корнями знаменателя функции $f(z)=\frac{z^2-z+1}{(z^4+9)(z^2+16)}$ являются числа

$z_{1,2}=\pm 3i,\quad z_{3,4}=\pm 4i$. В верхней полуплоскости расположены два полюса z=3i и z=4i данной функции.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+1}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=2\pi i(\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{3i}\frac{z^2-z+1}{(z^2+9)(z^2+16)}+\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{4i}\frac{z^2-z+1}{(z^2+9)(z^2+16)})$.

$$\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{3i}\frac{z^2-z+1}{(z^2+9)(z^2+16)}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)(z^2-z+1)}{(z+3i)(z-3i)(z^2+16)}=\frac{-(8+3i)}{6i(9i^2+16)}=\frac{-(8+3i)}{42i}.$$

$$\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{4i}\frac{z^2-z+1}{(z^2+9)(z^2+16)}=\lim_{\substack{z\to 4i\\ i}}\frac{(z-4i)(z^2-z+1)}{(z+4i)(z-4i)(z^2+9)}=\frac{-(15+4i)}{8i(16i^2+9)}=\frac{15+4i}{56i}.$$

Следовательно. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=2\pi i(\frac{15+4i}{56i}-\frac{8+3i}{42i})=\frac{2\pi i}{14}\cdot\frac{45+12i-32-12i}{12}=\frac{13\pi}{84}$.

Ответ. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+9)(x^2+16)}dx=\frac{13\pi}{84}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C\frac{dz}{\sqrt{i\sqrt{3}-z}}$, где C: прямая, $z_1=-1$, $z_2=1$, $\sqrt{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$.

Решение. Точки z_1 и z_2 не являются особыми точками для подинтегральной функции. Следовательно, можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$\int\limits_C\frac{dz}{\sqrt{i\sqrt{3}-z}}=-2\sqrt{z-i}\Big|_{z_1}^{z_2}=-2(\sqrt{i\sqrt{3}-z_2}-\sqrt{i\sqrt{3}-z_1})$. Рассмотрим функцию $\sqrt{i\sqrt{3}-z}=\sqrt{\left|i\sqrt{3}-z\right|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке $z=-1$ функция будет принимать заданное значение. С одной стороны $\sqrt{i\sqrt{3}+1}=\sqrt{\left|i\sqrt{3}+1\right|}(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2})$. С другой стороны $\sqrt{i\sqrt{3}+1}=2\frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{2}}$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что k должно быть таким, чтобы $\cos(\frac{\pi}{12}+k\pi)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и $\sin(\frac{\pi}{12}+k\pi)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Это достигается при k=0. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt{i\sqrt{3}-z}=\sqrt{\left|i\sqrt{3}-z\right|}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$. Таким образом, $\sqrt{i\sqrt{3}-z_1}=\sqrt{i\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$,

$\sqrt{i\sqrt{3}-z_2}=\sqrt{i\sqrt{3}-1}=\sqrt{2}(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi}{2})=\sqrt{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Следовательно,

$$\int\limits_C\frac{dz}{\sqrt{i\sqrt{3}-z}}=-2\sqrt{z-i}\Big|_{z_1}^{z_2}=-2(\sqrt{i\sqrt{3}-z_2}-\sqrt{i\sqrt{3}-z_1})=-2[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(1-i).$$

Ответ. $\int\limits_C\frac{dz}{\sqrt{i\sqrt{3}-z}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(1-i)$.