Вариант 20

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

$$а)\quad \cos(-3-i); \qquad б)\quad \sqrt{3-4i}$$

<u>Решение</u>. а). Функция cos(z) является чётной. Поэтому cos(-3-i)=cos(3+i). По формуле тригонометрии cos(3+i)=cos3·cos(i)-sin3·sin(i). Воспользуемся формулами связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:
cos(i)=ch1; sin(i)= ish1. Получим cos(-3-i)=cos3·ch1- i·sin3·sh1.

б). Корни находятся по формуле $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})$, где k=0, 1. При k=0 получим первый корень $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{2})$. Полагая k=1, получим второй корень $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot(\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi)+i\cdot\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi))=-\sqrt{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{2})$ (по формулам приведения). В данном примере z=3-4i. Тогда $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ и, следовательно, $z=5(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\cdot i)$. Поскольку
$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, то в данном случае cosφ=3/5, а sinφ=-4/5. Учитывая, что

$$\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\varphi) \text{ и } \cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi),$$ получим:

$$\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1-\frac{3}{5})=\frac{1}{5} \text{ и } \cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}(1+\frac{3}{5})=\frac{4}{5}.$$

Положительное значение косинуса и отрицательное значение синуса соответствуют четвёртому координатному углу комплексной плоскости, так что -π/2<φ<0. Поэтому, соответственно, -π/2<φ/2<0. В таком случае $\sin\frac{\varphi}{2}<0$, а $\cos\frac{\varphi}{2}>0$, т.е. $\sin\frac{\varphi}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Окончательно получаем $\sqrt{z}=\pm\sqrt{|z|}\cdot(\cos\frac{\varphi}{2}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{2})=\pm\sqrt{5}\cdot(\frac{2}{\sqrt{5}}-i\cdot\frac{1}{\sqrt{5}})=\pm(2-i)$.

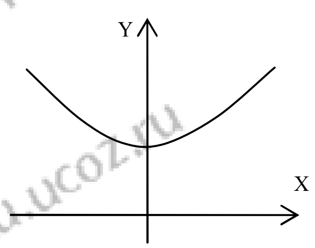
<u>Ответ</u>. а) cos(-3-i)= cos3·ch1- i·sin3·sh1; б) $\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z+2i|+|z-2i|=1.$$

<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид:
$|x+i(y+2)|-|x+i(y-2)|=1.$

Или $\sqrt{x^2+(y+2)^2}-\sqrt{x^2+(y-2)^2}=1$. Перенесём второй корень в правую часть равенства и возведём обе части в квадрат. Получим:
$x^2+y^2+4y+4=1+2\sqrt{x^2+(y-2)^2}+x^2+y^2-4y+4$. Или
$2\sqrt{x^2+(y-2)^2}=8y-1$. Заметим, что правая часть не должна быть отрицательной, т.е. y>1/8. Возведём ещё раз в квадрат:
$4x^2+4y^2-16y+16=1-16y+64y^2$. Или $4x^2-60y^2=-15$
Поделив всё равенство на правую часть, получим



каноническое уравнение гиперболы с фокусами на мнимой оси: $4y^2-\frac{4x^2}{15}=1$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение определяет верхнюю ветвь гиперболы $4y^2-\frac{4x^2}{15}=1$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\operatorname{ch} z=2$.

<u>Решение</u>. Перейдём от гиперболической функции к функции e^z:

$\dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = 2$. Умножим всё уравнение на $2e^z$, получим . . . . Обозначим $v = e^z$ и решим квадратное уравнение $v^2 - 4v + 1 = 0, \quad v_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$. Таким образом,

$v_1 = e^z = 2 + \sqrt{3} \quad$ или $\quad z_1 = \operatorname{Ln}(2+\sqrt{3}) = \ln(2+\sqrt{3}) + 2k\pi i$.

$v_2 = e^z = 2 - \sqrt{3} \quad$ или $\quad z_2 = \operatorname{Ln}(2-\sqrt{3}) = \ln(2-\sqrt{3}) + 2k\pi i$. Два решения можно объединить.

Ответ. $z = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$.

Задача 4. *Доказать тождество.*

$\sin(z + \dfrac{\pi}{2}) = \cos z$.

Решение. Перейдём к синусу гиперболическому по формуле $\sin z = -i \cdot \operatorname{sh} iz$ и рассмотрим левую часть тождества:

$$\sin(z+\frac{\pi}{2}) = -i \cdot \operatorname{sh}(iz + \frac{\pi i}{2}) = -i\frac{e^{iz+\frac{\pi i}{2}} - e^{-iz-\frac{\pi i}{2}}}{2} = -\frac{i}{2}(e^{-iz}e^{\frac{\pi i}{2}} - e^{-iz}e^{-\frac{\pi i}{2}}) = -\frac{i}{2}(e^{iz}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) -$$

$$- e^{-iz}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})) = -\frac{i}{2}(e^{iz}(i) - e^{-iz}(-i)) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \operatorname{ch} iz = \cos z,$$ что и требовалось доказать.

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её:*

$$\operatorname{Re} f(z) = u = Ax^2 + y^2 + 3x - 1, \text{ *если* } f(0)=-1.$$

Решение. Чтобы функция $u(x,y)$ бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: $\Delta u=0$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по x и по y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$$

Чтобы лапласиан Δu был равен нулю, нужно положить $A=-1$. Таким образом, функция $u(x,y) = -x^2 + y^2 + 3x - 1$ является гармонической. Восстановим мнимую часть $v(x,y)$ функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, пользуясь условиями Даламбера-Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из первого условия получаем: $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -2x + 3$. Тогда $v(x,y) = \int \dfrac{\partial v}{\partial y}dy + \varphi(x)$, или

$v(x,y) = \int(-2x+3)dy + \varphi(x) = -2xy + 3y + \varphi(x)$. Производная по x от этого выражения равна $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y + \varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y$. Приравнивая эти выражения, получим: $\varphi'(x) = 0$. Или $\varphi(x) = C$. Таким образом, $v(x,y) = -2xy + 3y + C$. Тогда

$f(z) = -x^2 + y^2 + 3x - 1 + i\cdot(-2xy + 3y + C)$. Перейдём к переменной z:

$f(z) = -(x^2 + 2ixy - y^2) + 3(x+iy) - 1 + iC = -z^2 + 3z - 1 + iC.$.

Воспользуемся дополнительным условием $f(0)=-1$. В данном случае $f(0)=-1+iC$. Следовательно, $C=0$.

Ответ. $f(z) = -x^2 + y^2 + 3x - 1 + i\cdot(-2xy + 3y) = -z^2 + 3z - 1$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C (i+2\bar z)\,dz; \qquad C-\text{прямая}, \quad z_1=0,\ z_2=-2-2i.$$

<u>Решение</u>. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$. В данном случае f(z)=(i+2x-2iy), т.е. u=2x, v=1-2y. Значит $\int_C (i+2\bar z)dz=\int_C 2xdx-(1-2y)dy+i\int_C 2xdy+(1-2y)dx$. Примем x за параметр.

Составим уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{y}{-2}=\frac{x}{-2}$, т.е. $y=x,\ dy=dx$.
Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение x=0, конечной $z_2=-2-i$ – значение x=-2.

Следовательно, $\int_C (i+2\bar z)dz=\int_C (2x-1+2x)dx+i\int_C (2x+1-2x)dx=\left[\frac{4x^2}{2}-x\right]\Big|_0^{-2}+ix\big|_0^{-2}=10-2i$.

<u>Ответ</u>. $\int_C (i+2\bar z)dz=10-2i$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_1^i (z-i)\cdot \operatorname{ch} z\,dz$.

<u>Решение</u>. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^i (z-i)\cdot \operatorname{ch} z\,dz=\begin{vmatrix} u=z-i & du=dz \\ dv=\operatorname{ch} z\,dz & v=\operatorname{sh} z\end{vmatrix}=(z-i)\cdot \operatorname{sh} z\Big|_1^i-\int_1^i \operatorname{sh} z\,dz=(i-1)\cdot \operatorname{sh}1-\operatorname{ch} z\Big|_1^i=$$
$$=(i-1)\cdot \operatorname{sh}1-\operatorname{ch} i+\operatorname{ch}1.$$

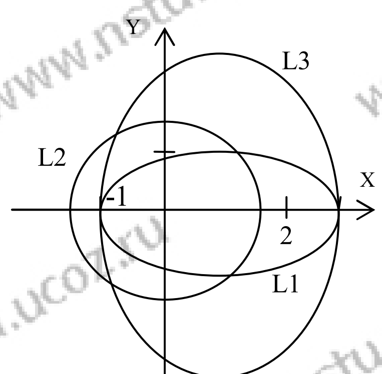
Перейдём к тригонометрическому косинусу: $\operatorname{ch} i=\cos 1$. Получим:

$$\int_1^i (z-i)\cdot \operatorname{ch} z\,dz=\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1-\cos 1+i\cdot \operatorname{sh}1.$$

<u>Ответ</u>. $\int_1^i (z-i)\cdot \operatorname{ch} z\,dz=\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1-\cos 1+i\cdot \operatorname{sh}1$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.*

$$\int_L \frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z+2i)}, \quad 1)\ L_1: \frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1, \quad 2)\ L_2: |z|=\frac{3}{2}, \quad 3)\ L_3: \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$



<u>Решение</u>. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=i и z=-2i. В эллипсе $\frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$ подынтегральная функция аналитична.

Следовательно, $I_1=\int_L \frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z+2i)}=0$. 2). Внутри области $|z|\le \frac{3}{2}$ расположена одна особая точка z=i.

Вычислим интеграл по интегральной формуле Коши:

$$L_2=\int_{L_2}\frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z+2i)}=\int_{L_2}\frac{\frac{e^{\pi z}}{z+2i}dz}{(z-i)^2}=\frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{\pi z}}{z+2i}\right]_{z=i}=2\pi i\frac{\pi e^{\pi z}(z+2i)-e^{\pi z}}{(z+2i)^2}\Bigg|_{z=i}=-\frac{2\pi}{9}(i+3\pi).$$

3). В эллипсе $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ есть две особые точки z=i и z=-2i. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$$I_3=\int\limits_{L_3}\frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z+2i)}=\int\limits_{l_1}\frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z+2i)}+\int\limits_{l_2}\frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z+2i)}$$, где L_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=i, а L_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=-2i. Первый интеграл совпадает с уже вычисленным интегралом I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_2}\frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z+2i)}=\int\limits_{l_2}\frac{\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}dz}{z+2i}=2\pi i\cdot\left[\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}\right]_{z=-2i}=-\frac{2\pi i}{9}$$

. Следовательно, $I_3=\int\limits_{L_3}\frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^2(z+2i)}=-\frac{2\pi i}{9}-\frac{2\pi}{9}(i+3\pi)=-\frac{2\pi}{9}(2i+3\pi)$

Ответ. $I_1=0,\ I_2=-\frac{2\pi}{9}(i+3\pi),\ I_3=-\frac{2\pi}{9}(2i+3\pi)$.

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z-5}{z^2+3z-10}$, 1) $2<|z|<5$ 2) $|z|>5$.

Решение. Корнями уравнения $z^2+3z-10=0$ являются числа $z_1=2$ и $z_2=-5$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z-5}{z^2+3z-10}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+5}=\frac{A(z+5)+B(z-2)}{(z-2)(z+5)}$. Или $A(z+5)+B(z-2)=z-5$. При z=2 получим A=-3/7. Если положить z=-5, то получим B=10/7. Следовательно, $\frac{z-5}{z^2+3z-10}=-\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{z+5}$. 1). В кольце $2<|z|<5$ имеем

$\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z-5}{z^2+3z-10}=-\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}+\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{5(1+\frac{z}{5})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=2/z, во второй дроби q= -z/5. Следовательно,

$\frac{z-5}{z^2+3z-10}=-\frac{3}{7}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\frac{10}{7}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства

$\frac{2}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно,

$$\frac{z-5}{z^2+3z-10}=-\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}+\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{5}{z})}=-\frac{3}{7}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\frac{10}{7}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^{n-1}}{z^n}=$$

$$=\frac{1}{7}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}5^n-3\cdot 2^{n-1}}{z^n}.$$

Ответ. 1). $\frac{z-5}{z^2+3z-10}=-\frac{3}{7}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\frac{2}{7}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{5^n}$. в кольце $2<|z|<5$.

2). $\dfrac{z-5}{z^2+3z-10}=\dfrac{1}{7}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot(-1)^{n-1}5^n-3\cdot 2^{n-1}}{z^n}$ в кольце $|z|>5$.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{i\frac{z}{2}}}{(9z^2-\pi^2)^2}dz$ **11.** $\displaystyle\oint\limits_{|z+2|=1}(z+2)^4\,\mathrm{sh}\frac{4}{z+2}dz$

<u>Решение</u>. **10.** Преобразуем подинтегральную функцию: $\dfrac{e^{i\frac{z}{2}}}{(9z^2-\pi^2)^2}=\dfrac{1}{81}\cdot\dfrac{e^{i\frac{z}{2}}}{\left(z^2-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right)^2}$.

Корни знаменателя: $z_1=-\dfrac{\pi}{3}$, $z_2=\dfrac{\pi}{3}$ I. Значения z_1 и z_2 являются полюсами подынтегральной функции кратности 2. Тогда

$$\mathrm{Res}_{-\frac{\pi}{3}}\frac{1}{81}\cdot\frac{e^{i\frac{z}{2}}}{\left(z^2-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right)^2}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{3}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+\frac{\pi}{3})^2e^{i\frac{z}{2}}}{81(z+\frac{\pi}{3})^2(z-\frac{\pi}{3})^2}\right]=\lim_{z\to-\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\frac{i}{2}e^{i\frac{z}{2}}(z-\frac{\pi}{3})^2-2e^{i\frac{z}{2}}(z-\frac{\pi}{3})}{81(z-\frac{\pi}{3})^4}\right]=$$

$$=\lim_{z\to-\frac{\pi}{3}}\left[\frac{[\frac{i}{2}(z-\frac{\pi}{3})-2]e^{i\frac{z}{2}}}{81(z-\frac{\pi}{3})^3}\right]=\frac{1}{24\pi^3}\cdot\left[\frac{\pi i}{3}+2\right]e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{24\pi^3}\cdot\left[\frac{\pi i}{3}+2\right]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{24\pi^3}\cdot\left[\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}-i+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right],$$

$$\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{81}\cdot\frac{e^{i\frac{z}{2}}}{\left(z^2-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right)^2}=\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+\frac{\pi}{3})^2e^{i\frac{z}{2}}}{81(z+\frac{\pi}{3})^2(z-\frac{\pi}{3})^2}\right]=\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\frac{i}{2}e^{i\frac{z}{2}}(z+\frac{\pi}{3})^2-2e^{i\frac{z}{2}}(z+\frac{\pi}{3})}{81(z+\frac{\pi}{3})^4}\right]=$$

$$=\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{[\frac{i}{2}(z+\frac{\pi}{3})-2]e^{i\frac{z}{2}}}{81(z+\frac{\pi}{3})^3}\right]=\frac{1}{24\pi^3}\cdot\left[\frac{\pi i}{3}-2\right]e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{24\pi^3}\cdot\left[\frac{\pi i}{3}-2\right]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{24\pi^3}\cdot\left[\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}-i-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right].$$

Получим окончательно:

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{i\frac{z}{2}}}{(9z^2-\pi^2)^2}dz=\frac{2\pi i}{24\pi^3}\left[\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}-i+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}-i-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{1}{24\pi^2}\left(2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

11. Подинтегральная функция имеет существенно особую точку $z=-2$. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана. Воспользуемся разложением в ряд функции $\mathrm{sh}w$ степеням w:

$\mathrm{sh}(w)=w+\dfrac{w^3}{3!}+\dfrac{w^5}{5!}+\dfrac{w^7}{7!}+\ldots$ Полагая $w=\dfrac{4}{z+2}$, получим:

$$(z+2)^4\,\mathrm{sh}\frac{4}{z+2}=(z+2)^4\left[\frac{4}{z+2}+\frac{4^3}{3!(z+2)^3}+\frac{4^5}{5!(z+2)^5}+\frac{4^7}{7!(z+2)^7}+\ldots\right]=\frac{4(z+2)^4}{z+2}+\frac{4^3(z+2)^4}{3!(z+2)^3}+$$

$$+\frac{4^5(z+2)^4}{5!(z+2)^5}+\frac{4^7(z+2)^4}{7!(z+2)^7}+\ldots=4(z+2)^3+\frac{4^3}{3!}(z+2)+\frac{4^5}{5!(z+2)}+\frac{4^7}{7!(z+2)^3}+\ldots$$

Последующие слагаемые не содержат степени $(z+2)^{-1}$. Коэффициентом при $(z+2)^{-1}$ в разложении функции будет число $\frac{4^5}{5!}=\frac{128}{15}$. Вычет данной функции равен коэффициенту при

$(z+2)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\operatorname*{Res}_{-2}[(z+2)^4 \operatorname{sh}\frac{4}{z+2}]=\frac{128}{15}$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z+2|=1}(z+2)^4 \operatorname{sh}\frac{4}{z+2}dz=2\pi i\cdot\frac{128}{15}=\frac{256\pi i}{15}.$$

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{i\frac{z}{2}}}{(9z^2-\pi^2)^2}dz=\frac{1}{24\pi^2}(2-\frac{\pi}{\sqrt{3}})$. 11. $\int\limits_{|z+2|=1}(z+2)^4 \operatorname{sh}\frac{4}{z+2}dz=\frac{256\pi i}{15}$.

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(x^4+25)}dx.$$

Решение. Найдём корни знаменателя функции $f(z)=\frac{z^2}{(z^4+25)}$:

$$z^4+25=0 \quad \text{или} \quad z=\sqrt[4]{|-25|}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}) \quad \text{или} \quad z_{1,2,3,4}=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1\pm i).$$

Следовательно, два корня из четырёх находятся в верхней полуплоскости:

$z_1=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1+i)$ и $z_3=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1-i)$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+25)}dx=2\pi i(\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+25)}+\operatorname*{Res}_{z_3}\frac{z^2}{(z^4+25)})$.

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+25)}=\lim_{z\to\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1+i)}\frac{(z-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1+i))z^2}{(z+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1+i))(z+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1-i))(z-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1+i))(z-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1-i))}=$$

$$=\frac{5i}{\sqrt{10}(i+1)\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}i}=\frac{1-i}{4\sqrt{10}}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+25)}=\lim_{z\to-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1-i)}\frac{(z+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1-i))z^2}{(z+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1+i))(z+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1-i))(z-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1+i))(z-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1-i))}=$$

$$=\frac{-5i}{\sqrt{10}i\cdot(-\sqrt{10})[-\sqrt{10}(1-i)]}=-\frac{1+i}{4\sqrt{10}}.$$ Следовательно.

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^2}{(x^4+1)}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+1)}dx=\frac{1}{2}\cdot2\pi i(\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+1)}+\operatorname*{Res}_{z_3}\frac{z^2}{(z^4+1)})=\pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{10}}-\frac{1+i}{4\sqrt{10}}\right)=\frac{\pi\sqrt{10}}{20}.$$

Ответ. $\int\limits_0^\infty\frac{x^2}{(x^4+1)}dx=\frac{\pi\sqrt{10}}{20}$.

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z)^2}}$, где C: прямая, $z_1=-7$, $z_2=3+2i$, $\sqrt[3]{8} \;=\; 2 \;-\; 1 \;+\; i\sqrt{3}$.

<u>Решение</u>. Точки z_1 и z_2 не являются особыми точками для подинтегральной функции. Следовательно, можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z)^2}} = -3\sqrt[3]{1-z}\Big|_{z_1}^{z_2} = -3(\sqrt[3]{1-z_2} - \sqrt[3]{1-z_1})$. Рассмотрим функцию

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2})$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке $z=8$ функция будет принимать заданное значение. С одной стороны

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{|8|}(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}) = 2(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3})$. С другой стороны $\sqrt[3]{8} = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$.

Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение $k=0$. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение. $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3})$. Таким образом, $\sqrt[3]{1-z_1} = \sqrt[3]{8} = 2$,

$$\sqrt[3]{1-z_2} = \sqrt[3]{1-3-2i} = \sqrt[3]{-2(1+i)} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\,(\cos\frac{-\frac{3\pi}{4}}{3} + i\sin\frac{-\frac{3\pi}{4}}{3}) = 8^{\frac{1}{6}}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Следовательно,

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z)^2}} = -3\sqrt[3]{1-z}\Big|_{z_1}^{z_2} = -3(\sqrt[3]{1-z_2} - \sqrt[3]{1-z_1}) = -3[1-i-2] = 3(1+i).$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z)^2}} = 3(1+i)$.