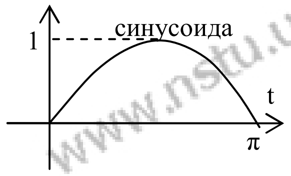
ВАРИАНТ 1
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\sin 2t\cdot\sin 3t$; **2)** $f(t)=e^{t}\cdot \mathrm{ch}2t-2\mathrm{sh}2t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t^2e^{-2t}dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-5)\cos 3(t-5)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^2\,\mathrm{ch}3\tau d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(3t^2-4t+1)\eta(t-1)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\sin 2t\cdot\sin 3t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем: $\sin 2t\cdot\sin 3t=\frac{1}{2}(\cos t-\cos 5t)$. По таблицам, $\cos t \fallingdotseq \frac{p}{p^2+1}$ и $\cos 5t\fallingdotseq\frac{p}{p^2+25}$. Далее, в силу свойства линейности, $\sin 2t\cdot\sin 3t\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+25}\right)=\frac{12p}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin 2t\cdot\sin 3t\fallingdotseq\frac{12p}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

2) $f(t)=e^{t}\cdot \mathrm{ch}2t-2\mathrm{sh}2t$. По таблице находим $\mathrm{ch}2t\fallingdotseq\frac{p}{p^2-4}$ и $\mathrm{sh}2t\fallingdotseq\frac{2}{p^2-4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^t\mathrm{ch}2t\fallingdotseq\frac{p-1}{(p-1)^2-4}$ и, по свойству линейности получаем:

$e^t\mathrm{ch}2t\text{-}2\mathrm{sh}2t\fallingdotseq\frac{p-1}{(p-1)^2-4}-2\cdot\frac{2}{p^2-4}=\frac{p^3-5p^2+4p+16}{[(p-1)^2-4](p^2-4)}$.

ОТВЕТ: $e^t\mathrm{ch}2t\text{-}2\mathrm{sh}2t\fallingdotseq\frac{p^3-5p^2+4p+16}{[(p-1)^2-4](p^2-4)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t^2e^{-2t}dt$. По таблице находим $t^2\fallingdotseq\frac{2}{p^3}$. Применяя теорему смещения, получим: $t^2e^{-2t}\fallingdotseq\frac{2}{(p+2)^3}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом, $\int\limits_0^t t^2e^{-2t}dt\fallingdotseq\frac{2}{p(p+2)^3}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^2e^{-2t}dt\fallingdotseq\frac{2}{p(p+2)^3}$.

4) $f(t)=\eta(t-5)\cos 3(t-5)$. По таблице $\cos 3t\cdot\eta(t)\fallingdotseq\frac{p}{p^2+9}$. Согласно теореме запаздывания

$\eta(t-5)\cdot\cos 3(t-5)\fallingdotseq\frac{pe^{-5p}}{p^2+9}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-5)\cdot\cos 3(t-5)\fallingdotseq\frac{pe^{-5p}}{p^2+9}$.

5) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch}3\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^2 и $\operatorname{ch}3t$. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$ и $\operatorname{ch}3t \risingdotseq \frac{p}{p^2-9}$. Следовательно, $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch}3\tau d\tau \risingdotseq \frac{2}{p^2(p^2-9)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch}3\tau d\tau \risingdotseq \frac{2}{p^2(p^2-9)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \sin t, & 0\le t<\pi, \\ 0, & t\ge\pi. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=\sin t\cdot\eta(t)+\sin(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi)$. Так как $\sin t=-\sin(t-\pi)$, то начиная с момента $t=\pi$ синусоиды уничтожаются. По таблице $\sin t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}$. Согласно теореме запаздывания $\sin(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi)\risingdotseq\frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}$. По свойству линейности получим: $f(t)\risingdotseq \frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq \frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$.

7) $f(t)=(3t^2-4t+1)\eta(t-1)$. Разложим функцию $u(t)=3t^2-4t+1$ по степеням $(t-1)$, пользуясь формулой Тейлора ($t_0=1$):

$u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=6t-4$, $u''(t)=6$, $u'(1)=2$, $u(1)=0$. Тогда $u(t)=2(t-1)+3(t-1)^2$. Окончательно получаем: $f(t)=u(t)\cdot\eta(t-1)=[2(t-1)+3(t-1)^2]\cdot\eta(t-1)$. Применим свойство линейности: $f(t)\risingdotseq\frac{2e^{-p}}{p^2}+\frac{6e^{-p}}{p^3})=\frac{2e^{-p}(p+3)}{p^3}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq\frac{2e^{-p}(p+3)}{p^3}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{2e^{-3p}}{(p-4)^2}.$$

РЕШЕНИЕ

По таблице $\frac{1}{p^2}\risingdotseq t$. Тогда на основании теоремы смещения $\frac{1}{(p-4)^2}\risingdotseq te^{4t}$. Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим: $\frac{2e^{-3p}}{(p-4)^2}\risingdotseq 2(t-3)e^{4(t-3)}\eta(t-3)$.

ОТВЕТ: $\frac{2e^{-3p}}{(p-4)^2}\risingdotseq 2(t-3)e^{4(t-3)}\eta(t-3)$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2-2p+2)}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-2p+2)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=1-i$, $p_3=1+i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Ф(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2-2p+2)=0$ и $\psi'(p)=3p^2-4p+2$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{2},\quad \operatorname*{res}_{p=1-i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(1-i)}{\psi'(1-i)}=\frac{e^{(1-i)t}}{3(1-i)^2-4(1-i)+2}=-\frac{e^{(1-i)t}}{2(i+1)},$$

$$\operatorname*{res}_{p=1+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(1+i)}{\psi'(1+i)}=\frac{e^{(1+i)t}}{3(1+i)^2-4(1+i)+2}=\frac{e^{(1+i)t}}{2(i-1)}.$$ Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=1-i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=1+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{2}[1+(\frac{e^{it}}{i-1}-\frac{e^{-it}}{i+1})e^t]=$$

$$=\frac{1}{2}[1-\frac{e^{it}(i+1)-e^{-it}(i-1)}{2}\cdot e^t]=\frac{1}{2}[1-(i\cdot sh(it)-ch(it))\cdot e^t]=$$

$$=\frac{1}{2}[1+(\sin t-\cos t)\cdot e^t].$$ Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\frac{1}{p(p^2-2p+2)}\risingdotseq\frac{1}{2}[1+(\sin t-\cos t)\cdot e^t]$

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{-1}{p(p^2-2p-15)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-2p-15)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-3$, $p_3=5$.

Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{-1}{p(p^2-2p-15)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{p-5}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-1}{p(p^2-2p-15)}=\frac{A(p+3)(p-5)+Bp(p-5)+Cp(p+3)}{p(p+3)(p-5)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $A(p+3)(p-5)+Bp(p-5)+Cp(p+3)=-1$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения A, B, C. Полагая p=0, получим A=1/15, при p=−3 получим B=−1/24, при p=5 находим C=−1/40. Таким образом,

$$\frac{-1}{p(p^2-2p-15)}=\frac{1}{15p}-\frac{1}{24(p+3)}-\frac{1}{40(p-5)}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{-1}{p(p^2-2p-15)} \risingdotseq \frac{1}{15}-\frac{1}{24}\cdot e^{-3t}-\frac{1}{40}\cdot e^{5t}.$$

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''+2x'-3x=3\operatorname{sh}3t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$ **;** **12.** $x''+9x=3\cos 3t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-6$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x''+2x'-3x=3\operatorname{sh}3t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1$. По таблице $3\operatorname{sh}3t\risingdotseq\dfrac{9}{p^2-9}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+2pX(p)-3X(p)+1=\dfrac{9}{p^2-9}$ или $X(p)[p^2+2p-3]=\dfrac{9}{p^2-9}-1$. Тогда

$X(p)=\dfrac{18-p^2}{(p^2-9)[p^2+2p-3]}=\dfrac{18-p^2}{(p-3)(p+3)^2(p-1)}$. Применим метод разложения на простые дроби: $\dfrac{18-p^2}{(p-3)(p+3)^2(p-1)}=\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p-3}+\dfrac{C}{p+3}+\dfrac{D}{(p+3)^2}$. Отсюда

$18-p^2=A(p-3)(p+3)^2+B(p-1)(p+3)^2+C(p-1)(p-3)(p+3)+D(p-1)(p-3)$. Если p=1, то $A=-\dfrac{17}{32}$, при $p=3$ получим $B=\dfrac{1}{8}$, при $p=-3$ получим $D=\dfrac{3}{8}$. Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=\dfrac{13}{32}$. Таким образом,

$X(p)=-\dfrac{17}{32(p-1)}+\dfrac{1}{8(p-3)}+\dfrac{13}{32(p+3)}+\dfrac{3}{8(p+3)^2}$. Пользуясь формулой $t^n\risingdotseq\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^ne^{\lambda t}\risingdotseq\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t)=-\dfrac{17}{32}e^t+\dfrac{1}{8}e^{3t}+\dfrac{13}{32}e^{-3t}+\dfrac{3}{8}te^{-3t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=-\dfrac{17}{32}e^t+\dfrac{1}{8}e^{3t}+\dfrac{12t+13}{32}e^{-3t}$

12. $x''+9x=3\cos 3t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-6$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+6$. По таблице $3\cos3t\risingdotseq\dfrac{3p}{p^2+9}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+9X(p)+6=\dfrac{3p}{p^2+9}$ или $X(p)[p^2+9]=\dfrac{3p}{p^2+9}-6=\dfrac{-6p^2+3p-54}{p^2+9}$. Тогда

$X(p)=\dfrac{-6p^2+3p-54}{(p^2+9)^2}$.

Или $X(p)=\dfrac{-6(p^2+9)}{(p^2+9)^2}+\dfrac{3p}{(p^2+9)^2}=-2\dfrac{3}{p^2+9}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{3}{p^2+9}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно,

$x(t)=-2\sin 3t+\dfrac{1}{2}t\cdot\sin 3t=(\dfrac{1}{2}t-2)\sin 3t$.

ОТВЕТ: $x(t)=(\dfrac{1}{2}t-2)\sin 3t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x' + x + y = -e^{2t} \\ y' - 2x - 2y = e^{3t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t) \fallingdotseq X(p)$, $y(t) \fallingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \fallingdotseq pX(p)$, $y'(t) \fallingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t} \fallingdotseq \frac{1}{p-2}$, $e^{3t} \fallingdotseq \frac{1}{p-3}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+1] + Y(p) = -\dfrac{1}{p-2} \\ -2X(p) + Y(p)[p-2] = \dfrac{1}{p-3} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p-2 и вычтем второе уравнение.

Получим: $X(p)[p+1](p-2) + 2X(p) = \frac{2-p}{p-3}$ или $p(p-1)X(p) = \frac{2-p}{p-3}$. Тогда $X(p) = \frac{2-p}{p(p-1)(p-3)}$.

Разложим правую часть на простые множители:

$\frac{2-p}{p(p-1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-3} = \frac{A(p-1)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p-1)}{p(p-1)(p-3)}$. Приравняем числители:

$A(p-1)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p-1) = 2-p$. Полагая p=0, находим A=2/3, при p=1 получим B=-1/2, при p=3 находим C=-1/6. Таким образом, $X(p) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-3}$. Следовательно,

$x(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{3t}$. Подставим найденное X(p) в первое уравнение, получим:

$Y(p) = -\frac{2-p}{p(p-1)(p-3)}(p+1) - \frac{1}{p-2} = \frac{(p+1)(p-2)^2 - p(p-1)(p-3)}{p(p-1)(p-3)(p-2)} = \frac{p^2-3p+4}{p(p-1)(p-3)(p-2)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$\frac{p^2-3p+4}{p(p-1)(p-3)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{p-2} = \frac{(p-2)[A(p-1)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p-1)] + Dp(p-1)(p-3)}{p(p-1)(p-3)(p-2)}$.

Приравняем числители: $(p-2)[A(p-1)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p-1)] + Dp(p-1)(p-3) = p^2 - 3p + 4$.

Полагая p=0, находим A=-2/3, при p=1 получим B=1, при p=3 находим C=2/3, при p=2 получим D=-1. Таким образом, $Y(p) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-2}$. Следовательно,

$y(t) = -\frac{2}{3} + e^{t} + \frac{2}{3}e^{3t} - e^{2t}$.

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}e^{t} - \dfrac{1}{6}e^{3t} \\ y(t) = -\dfrac{2}{3} + e^{t} + \dfrac{2}{3}e^{3t} - e^{2t} \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0) = 0, i_1(0) = 0.$

$L_1 = L_2 = 2,\ R_1 = R_2 = 1,\ M = \sqrt{3};\qquad u(t) = \begin{cases} 10t, & 0 \le t < 3 \\ 30, & t \ge 3 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+\sqrt{3}\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+i_2+\sqrt{3}\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть $u(t)\fallingdotseq U(p)$, $i_1(t)\fallingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\fallingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\fallingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\fallingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+I_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию $u(t)$ единичной функцией $\eta(t)$, для которой $\eta(t)\fallingdotseq\dfrac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+\sqrt{3}pX_2(p)=\dfrac{1}{p} \\ 2pX_2(p)+X_2(p)+\sqrt{3}pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\dfrac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p-\dfrac{3p^2}{2p+1}]=\dfrac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{4p^2+2p-3p^2}{2p+1}=\dfrac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\dfrac{2p+1}{p^2(p+2)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\dfrac{2p+1}{p^2(p+2)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p+2}=\dfrac{Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2}{p^2(p+2)}$. Приравняем числители:

$Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2=2p+1$. Полагая p=0, находим B=1/2, при $p=-2$ получим $C=-\dfrac{3}{4}$.

Приравнивая коэффициенты при p^2, получим A+C=0, т.е. A=3/4. Таким образом,

$X_1(p)=\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{p+2}$. Следовательно, $x_1(t)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{3}{4}e^{-2t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p)=pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int\limits_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{3}{4}e^{-2t}\right)'=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-2t}$, то при t<3 $i_1(t)=\int\limits_0^t 10\tau(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau=5\int\limits_0^t \tau(1+3e^{-2(t-\tau)})d\tau=$

$$=\int\limits_0^t 10\tau(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau=\frac{5}{2}\tau^2\Big|_0^t+15e^{-2t}\int\limits_0^t \tau e^{2\tau}d\tau=\frac{5}{2}t^2+15e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^t=\frac{15}{2}t+\frac{5}{2}t^2-\frac{15}{4}(1-e^{-2t})$$

. При $t\ge 3$ получим: $i_1(t)=\int\limits_0^3 10\tau(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau+\int\limits_3^t 30(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau=[\dfrac{5}{2}\tau^2+15e^{-2t}(\dfrac{\tau}{2}-\dfrac{1}{4})e^{2\tau})]\Big|_0^3+$

$+15\tau\Big|_3^t+\dfrac{45}{2}e^{-2(t-\tau)}\Big|_3^t=\dfrac{45}{2}+\dfrac{45}{2}e^{-2t+6}-\dfrac{15}{4}e^{-2t+6}+\dfrac{15}{4}e^{-2t}+15t-45+\dfrac{45}{2}-\dfrac{45}{2}e^{-2t+6}=15t-\dfrac{15}{4}(e^6-1)e^{-2t}$.

Найдём $x_2(t)$:

$X_2(p)=-\dfrac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1}=-\dfrac{\sqrt{3}p}{2p+1}\cdot\dfrac{2p+1}{p^2(p+2)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{p(p+2)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+2})$, т.е. $x_2(t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2t})$.

Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t)=\int\limits_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2t}\right)' = -\sqrt{3}e^{-2t}$, то при t<3

$$i_2(t) = -\int_0^t 10\tau\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau = -10\sqrt{3}e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}d\tau =$$

$$= -10\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^t = -\frac{5\sqrt{3}}{2}(2t-1) - \frac{5\sqrt{3}}{2}e^{-2t} = -5\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2t})$$. При t≥3

$$i_2(t) = -\int_0^3 10\tau\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau - \int_3^t 30\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau = -10\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^3 - 15\sqrt{3}e^{-2t}e^{2\tau}\Big|_3^t =$$

$$= -15\sqrt{3}e^{-2t+6} + \frac{5\sqrt{3}}{2}e^{-2t+6} - \frac{5\sqrt{3}}{2}e^{-2t} - 15\sqrt{3} + 15\sqrt{3}e^{-2t+6} = -15\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2}(e^6-1)e^{-2t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t) = \frac{15}{2}t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{15}{4}(1-e^{-2t}) \\ i_2(t) = -5\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2t}) \end{cases}$ при 0≤t<3 и $\begin{cases} i_1(t) = 15t - \frac{15}{4}(e^6-1)e^{-2t} \\ i_2(t) = -15\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2}(e^6-1)e^{-2t} \end{cases}$ при t≥3.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:

$tx'' + (1-4t)x' + (4t-2)x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 2$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t) \risingdotseq -\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{pX-1\} = -(X + p\frac{dX}{dp})$, $tx'' \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2X - p - 2\} = -(2pX + p^2\frac{dX}{dp} - 1)$. Учитывая это,

получаем операторное уравнение: $-(2pX + p^2\frac{dX}{dp} - 1) + pX - 1 + 4(X + p\frac{dX}{dp}) - 4\frac{dX}{dp} - 2X = 0$. Или

$(-p^2 + 4p - 4)\frac{dX}{dp} - (p-2)X = -(p-2)^2\frac{dX}{dp} - (p-2)X = 0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$(p-2)\frac{dX}{dp} + X = 0;\quad \frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p-2};\quad \ln|X| = -\ln|p-2| + \ln C;\quad X(p) = \frac{C}{p-2}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t) = C\cdot e^{2t}$. Так как x(0)=1, то C=1. Окончательно, $x(t) = e^{2t}$

ОТВЕТ: $x(t) = e^{2t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (x>0,\ t>0)\quad u\big|_{t=0} = 0,\ u\big|_{x=0} = u_0.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p)$. Запишем операторное уравнение:

$k\dfrac{d^2U}{dx^2}=pU$ или $k\dfrac{d^2U}{dx^2}-pU=0$. Это линейное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $kr^2-p=0$ имеет корни $r_1=-\sqrt{\dfrac{p}{k}}$, $r_1=\sqrt{\dfrac{p}{k}}$. Следовательно, решением уравнения будет $U(x,p)=C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}+C_2e^{\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p)\to 0$ при $p\to\infty$. Это возможно только тогда, когда $C_2=0$. Таким образом, $U(x,p)=C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\dfrac{u_0}{p}$, найдём $C_1=\dfrac{u_0}{p}$.

Следовательно, $U(x,p)=\dfrac{u_0}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. Для нахождения оригинала функции воспользуемся соотношением $\dfrac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}\risingdotseq \mathrm{Erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, где $\mathrm{Erf}(\tau)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\tau}^{\infty}e^{-z^2}dz=1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{\tau}e^{-z^2}dz$. В данном случае $u(x,t)=u_0\cdot\mathrm{Erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{kt}}\right)=u_0(1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{x/2\sqrt{kt}}e^{-z^2}dz)$.

ОТВЕТ: $u(x,t)=u_0(1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{x/2\sqrt{kt}}e^{-z^2}dz)$