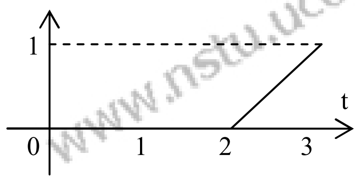
ВАРИАНТ 2
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\sin t\cdot\sin 2t$; **2)** $f(t)=e^{2t}\cdot\cos t+\sin t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t\,\mathrm{ch}^2 t\,dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-5)\,\mathrm{sh}\,3(t-5)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^3\,\mathrm{ch}5(t-\tau)\,d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(t^2-4t+5)\eta(t-2)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\sin t\cdot\sin 2t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем:

$\sin t\cdot\sin 2t=\dfrac{1}{2}(\cos t-\cos 3t)$. По таблицам, $\cos t\risingdotseq\dfrac{p}{p^2+1}$ и $\cos 3t\risingdotseq\dfrac{p}{p^2+9}$. Далее, в силу свойства линейности, $\sin t\cdot\sin 2t\risingdotseq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+1}-\dfrac{p}{p^2+9}\right)=\dfrac{4p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin t\cdot\sin 2t\risingdotseq\dfrac{4p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

2) $f(t)=e^{2t}\cdot\cos t+\sin t$. По таблице находим $\cos t\risingdotseq\dfrac{p}{p^2+1}$ и $\sin t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2+1}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{2t}\cos t\risingdotseq\dfrac{p-2}{(p-2)^2+1}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{2t}\cdot\cos t+\sin t\risingdotseq\frac{p-2}{(p-2)^2+1}+\frac{1}{p^2+1}=$$

$$=\frac{p^3-2p^2+p-2+p^2-4p+4+1}{[(p-2)^2+1](p^2+1)}=\frac{p^3-p^2-3p+3}{[(p-1)^2+1](p^2+1)}=\frac{(p^2-3)(p-1)}{[(p-1)^2+1](p^2+1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{2t}\cos t+\sin t\risingdotseq\dfrac{(p^2-3)(p-1)}{[(p-1)^2+1](p^2+1)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t\,\mathrm{ch}^2 t\,dt.$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$t\,\mathrm{ch}^2 t=\dfrac{t}{2}(\mathrm{ch}2t+1)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{ch}2t$. По таблице находим $\mathrm{ch}2t\risingdotseq\dfrac{p}{p^2-4}$. Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{p}{p^2-4}\right)\risingdotseq-t\cdot\mathrm{ch}2t$. Следовательно,

$t\cdot\mathrm{ch}2t\risingdotseq-\dfrac{p^2-4-2p^2}{(p^2-4)^2}=\dfrac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$. Так как $t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{ch}2t\risingdotseq\dfrac{1}{2p^2}+\dfrac{p^2+4}{2(p^2-4)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(p^2-4)^2+p^2(p^2+4)}{p^2(p^2-4)^2}=\dfrac{p^4-2p^2+8}{p^2(p^2-4)^2}=\dfrac{(p^2-1)^2+7}{p^2(p^2-4)^2}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на р. Таким образом,

$$\int_0^t t\,\mathrm{ch}^2 t\,dt \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{(p^2-1)^2+7}{p^2(p^2-4)^2}=\frac{(p^2-1)^2+7}{p^3(p^2-4)^2}.$$

ОТВЕТ: $\int_0^t t\,\mathrm{ch}^2 t\,dt \risingdotseq \dfrac{(p^2-1)^2+7}{p^3(p^2-4)^2}$.

4) $f(t)=\eta(t-5)\,\mathrm{sh}\,3(t-5)$. По таблице $\mathrm{sh}3t\cdot\eta(t)\risingdotseq \dfrac{3}{p^2-9}$. Согласно теореме запаздывания

$\mathrm{sh}3(t-5)\cdot\eta(t-5)\risingdotseq \dfrac{3e^{-5p}}{p^2-9}$.

ОТВЕТ: $\mathrm{sh}3(t-5)\cdot\eta(t-5)\risingdotseq \dfrac{3e^{-5p}}{p^2-9}$.

5) $f(t)=\int_0^t \tau^3\mathrm{ch}5(t-\tau)d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^3 ch3t. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^3\risingdotseq \dfrac{3!}{p^4}$ и $\mathrm{ch}5t\risingdotseq \dfrac{p}{p^2-25}$. Следовательно, $\int_0^t \tau^3\mathrm{ch}5(t-\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{6p}{p^4(p^2-9)}=\dfrac{6}{p^3(p^2-9)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t \tau^3\mathrm{ch}5(t-\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{6}{p^3(p^2-9)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<2,\\ t-2, & 2\le t<3,\\ 0, & t\ge 3.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=(t-2)\cdot\eta(t-2)-(t-3)\cdot\eta(t-3)-\eta(t-3)$. Так как $t-2=(t-3)+1$, то начиная с момента t=3 функция становится равной нулю. По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$.

Согласно теореме запаздывания $(t-2)\cdot\eta(t-2)\risingdotseq\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$, $(t-3)\cdot\eta(t-3)\risingdotseq\dfrac{e^{-3p}}{p^2}$ и

$\eta(t-3)\risingdotseq\dfrac{e^{-3p}}{p}$. По свойству линейности получим:

$$f(t)\risingdotseq\frac{e^{-2p}}{p^2}-\frac{e^{-3p}}{p^2}-\frac{e^{-3p}}{p}=\frac{1-(1+p)e^{-p}}{p^2}\cdot e^{-2p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq\dfrac{1-(1+p)e^{-p}}{p^2}\cdot e^{-2p}$.

7) $f(t)=(t^2-4p+5)\eta(t-2)$. Разложим функцию $u(t)=t^2-4t+5$ по степеням (t-2), пользуясь формулой Тейлора ($t_0=2$):

$u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=2t-4$, $u''(t)=2$, $u'(2)=0$, $u(2)=1$. Тогда $u(t)=1+(t-2)^2$. Окончательно получаем: $f(t)=u(t)\cdot\eta(t-2)=[1+(t-2)^2]\cdot\eta(t-2)$. Применим свойство линейности: $f(t)\risingdotseq\frac{e^{-2p}}{p}+\frac{2e^{-2p}}{p^3})=(\frac{1}{p}+\frac{2}{p^3})\cdot e^{-2p}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq(\frac{1}{p}+\frac{2}{p^3})\cdot e^{-2p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{2e^{-3(p-4)}}{(p-4)^2}.$$

РЕШЕНИЕ

Преобразуем функцию: $F(p)=\frac{2e^{-3(p-4)}}{(p-4)^2}=\frac{2e^{-3p}}{(p-4)^2}e^{12}$. По таблице $\frac{1}{p^2}\risingdotseq t$. Тогда на основании теоремы смещения $\frac{1}{(p-4)^2}\risingdotseq te^{4t}$. Применяя теорему запаздывания и свойство линейности, получим: $\frac{2e^{-3t}}{(p-4)^2}\risingdotseq 2(t-3)e^{4(t-3)}e^{12}\eta(t-1)=2(t-3)e^{4t}\eta(t-1)=..$

ОТВЕТ: $\frac{2e^{-3t}}{(p-4)^2}\risingdotseq 2(t-3)e^{4t}\eta(t-1)$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2+2p+2)}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-2p+2)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-1-i$, $p_3=-1+i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2+2p+2)=0$ и $\psi'(p)=3p^2+4p+2$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{2},\quad \operatorname*{res}_{p=-1-i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-1-i)}{\psi'(-1-i)}=\frac{e^{(-1-i)t}}{3(-1-i)^2+4(-1-i)+2}=\frac{e^{-(1+i)t}}{2(i+1)},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-1+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-1+i)}{\psi'(-1+i)}=\frac{e^{(-1+i)t}}{3(-1+i)^2+4(-1+i)+2}=\frac{e^{-(1-i)t}}{2(i-1)}.$$ Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=-1-i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=-1+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{2}[1+(\frac{e^{-it}}{i+1}+\frac{e^{it}}{i-1})e^{-t}]=$$

$$=\frac{1}{2}[1+\frac{e^{-it}(i-1)-e^{it}(i+1)}{2}\cdot e^{-t}]=\frac{1}{2}[1+(i\cdot sh(it)-ch(it))\cdot e^{-t}]=$$

$=\dfrac{1}{2}[1-(\sin t+\cos t)\cdot e^{-t}]$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p(p^2-2p+2)} \risingdotseq \dfrac{1}{2}[1-(\sin t+\cos t)\cdot e^{-t}]$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{5}{p^2(p^2-p-12)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p^2(p^2-p-12)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-3$, $p_3=4$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{5}{p^2(p^2-p-12)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+3}+\frac{D}{p-4}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{5}{p^2(p^2-p-12)}=\frac{Ap(p+3)(p-4)+B(p+3)(p-4)+Cp^2(p-4)+Dp^2(p+3)}{p^2(p+3)(p-4)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p+3)(p-4)+$ $+B(p+3)(p-4)+Cp^2(p-4)+Dp^2(p+3)=5$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая p=0, получим B=-5/12, при p=−3 получим C=−5/63, при p=4 находим D=5/112. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: A+C+D=0 или A=-(C+D)=-(-5/63+5/112)=5/144. Таким образом,

$$\frac{5}{p^2(p^2-p-12)}=\frac{5}{144}\cdot\frac{1}{p}-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{5}{63}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{5}{112}\cdot\frac{1}{p-4}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{5}{p^2(p^2-p-12)}\risingdotseq\frac{5(1-12t)}{144}-\frac{5}{63}\cdot e^{-3t}+\frac{5}{112}\cdot e^{4t}.$$

ОТВЕТ: $\dfrac{5}{p^2(p^2-p-12)}\risingdotseq\dfrac{5(1-12t)}{144}-\dfrac{5}{63}\cdot e^{-3t}+\dfrac{5}{112}\cdot e^{4t}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-2x'-8x=7\operatorname{sh}2t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=4$ **;** **12.** $x''+4x=2\cos 2t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-4$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x''-2x'-8x=7\operatorname{sh}2t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=4$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-4$. По таблице $7\operatorname{sh}2t\risingdotseq\dfrac{14}{p^2-4}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p)-2pX(p)-8X(p)-4=\dfrac{14}{p^2-4}$ или $X(p)[p^2-2p-8]=\dfrac{14}{p^2-4}+4$. Тогда

$X(p)=\dfrac{4p^2-2}{(p^2-4)[p^2-2p-8]}=\dfrac{4p^2-2}{(p-2)(p+2)^2(p-4)}$. Применим метод разложения на простые дроби: $\dfrac{4p^2-2}{(p-2)(p+2)^2(p-4)}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{p-4}+\dfrac{C}{p+2}+\dfrac{D}{(p+2)^2}$. Отсюда

$4p^2-2=A(p-4)(p+2)^2+B(p-2)(p+2)^2+C(p-2)(p-4)(p+2)+D(p-2)(p-4)$. Если p=2, то

$A=-\dfrac{7}{16}$, при $p=4$ получим $B=\dfrac{31}{36}$, при $p=-2$ получим $D=\dfrac{7}{12}$. Для определения C

приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=-\dfrac{61}{144}$. Таким образом,

$X(p)=-\dfrac{7}{16(p-2)}+\dfrac{31}{36(p-3)}-\dfrac{61}{144(p+3)}+\dfrac{7}{12(p+3)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \fallingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой

смещения $t^n e^{\lambda t} \fallingdotseq \dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t)=-\dfrac{7}{16}e^{2t}+\dfrac{31}{36}e^{4t}+\dfrac{1}{144}(84t-61)e^{-2t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=-\dfrac{7}{16}e^{2t}+\dfrac{31}{36}e^{4t}+\dfrac{1}{144}(84t-61)e^{-2t}$.

12. $x''+4x=2\cos 2t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-4$**.** Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\fallingdotseq X(p)$, то $x'(t)\fallingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\fallingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+4$. По таблице 2cos2t$\fallingdotseq\dfrac{2p}{p^2+4}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p)+4X(p)+4=\dfrac{2p}{p^2+4}$ или $X(p)[p^2+4]=\dfrac{2p}{p^2+4}-4=\dfrac{-4p^2+2p-16}{p^2+4}$. Тогда

$X(p)=\dfrac{-4p^2+2p-16}{(p^2+4)^2}$.

Или $X(p)=\dfrac{-4(p^2+4)}{(p^2+4)^2}+\dfrac{2p}{(p^2+4)^2}=-2\dfrac{2}{p^2+4}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{2}{p^2+4}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно,

$x(t)=-2\sin 2t+\dfrac{1}{2}t\cdot\sin 2t=(\dfrac{1}{2}t-2)\sin 2t$.

ОТВЕТ: $x(t)=(\dfrac{1}{2}t-2)\sin 2t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x'-x-y=-e^{2t} \\ y'+2x+2y=e^{t} \end{cases}\quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть x(t)$\fallingdotseq$X(p), y(t)$\fallingdotseq$Y(p). Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\fallingdotseq pX(p)$, $y'(t)\fallingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t}\fallingdotseq\dfrac{1}{p-2}$, $e^{t}\fallingdotseq\dfrac{1}{p-1}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p-1]-Y(p)=-\dfrac{1}{p-2} \\ 2X(p)+Y(p)[p+2]=\dfrac{1}{p-1} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p+2 и сложим с вторым уравнением. Получим:

$X(p)[p-1](p+2)+2X(p)=-\dfrac{p+2}{p-2}+\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{-p^2-p+2+p-2}{(p-2)(p-1)}$ или $p(p+1)X(p)=-\dfrac{p^2}{(p-2)(p-1)}$. Тогда

$X(p)=\dfrac{-p}{(p+1)(p-1)(p-2)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$\dfrac{-p}{(p+1)(p-1)(p-2)}=\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p-1}+\dfrac{C}{p-2}=\dfrac{A(p-1)(p-2)+B(p+1)(p-2)+C(p+1)(p-1)}{p(p-1)(p-2)}$. Приравняем числители: $A(p-1)(p-2)+B(p+1)(p-2)+C(p+1)(p-1)=-p$. Полагая p=-1, находим A=1/6, при p=1 получим B=1/2, при p=2 находим C=-2/3. Таким образом,

$X(p)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{p-3}$. Следовательно, $x(t)=\dfrac{1}{6}e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{t}-\dfrac{2}{3}e^{2t}$. Из первого уравнения системы следует, что $y(t)=x'(t)-x(t)+e^{2t}$, т.е.

$$y(t)=\left(\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{2}{3}e^{2t}\right)'-\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{2}{3}e^{2t}+e^{2t}=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases}x(t)=\dfrac{1}{6}e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{t}-\dfrac{2}{3}e^{2t}\\ y(t)=\dfrac{1}{3}e^{2t}-\dfrac{1}{3}e^{-t}\end{cases}$

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызванных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0.$

$L_1=L_2=2,\ R_1=0,\ R_2=1,\ M=\sqrt{3};\quad u(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{2}t, & 0\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases}L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t)\\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0\end{cases}$ В данном случае $\begin{cases}2\dfrac{di_1}{dt}+\sqrt{3}\dfrac{di_2}{dt}=u(t)\\ 2\dfrac{di_2}{dt}+i_2+\sqrt{3}\dfrac{di_1}{dt}=0\end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$, $i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases}2pI_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U\\ 2pI_2(p)+I_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0\end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией $\eta(t)$, для которой $\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases}2pX_1(p)+\sqrt{3}pX_2(p)=\dfrac{1}{p}\\ 2pX_2(p)+X_2(p)+\sqrt{3}pX_1(p)=0\end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\dfrac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p-\dfrac{3p^2}{2p+1}]=\dfrac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{4p^2+2p-3p^2}{2p+1}=\dfrac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\dfrac{2p+1}{p^2(p+2)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\dfrac{2p+1}{p^2(p+2)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p+2}=\dfrac{Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2}{p^2(p+2)}$. Приравняем числители:

$Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2=2p+1$. Полагая p=0, находим B=1/2, при $p=-2$ получим $C=-\dfrac{3}{4}$.

Приравнивая коэффициенты при p^2, получим A+C=0, т.е. A=3/4. Таким образом, $X_1(p)=\frac{3}{4}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}$. Следовательно, $x_1(t)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}e^{-2t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}e^{-2t}\right)'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}$, то при t<1

$$i_1(t)=\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau=-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\tau}{2}\Big|_0^t+\frac{3}{2}e^{-2t}\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi t}{2}\right)+$$

$$+\frac{3}{2\left(4+\frac{\pi^2}{4}\right)}e^{-2(t-\tau)}\left[2\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}\right]\Big|_0^t=\frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi t}{2}\right)+\frac{6}{16+\pi^2}\left[2\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}e^{-2t}\right].$$

При t≥1 получим:

$$i_1(t)=\int_0^1 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau+\int_1^t\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau=-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi\tau}{2}\Big|_0^1+\frac{3}{2\left(4+\frac{\pi^2}{4}\right)}e^{-2(t-\tau)}\left[2\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}\right]\Big|_0^1+$$

$$+\frac{\tau}{2}\Big|_1^t+\frac{3}{4}e^{-2(t-\tau)}\Big|_1^t=\frac{1}{\pi}+\frac{6}{16+\pi^2}\left[2e^{-2(t-1)}+\frac{\pi}{2}e^{-2t}\right]+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}e^{-2(t-1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}+\frac{t}{2}-\frac{e^{-2t}\pi}{4(16+\pi^2)}(\pi^2e^2-12).$$

Найдём $x_2(t)$:

$$X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1}=-\frac{\sqrt{3}p}{2p+1}\cdot\frac{2p+1}{p^2(p+2)}=-\frac{\sqrt{3}}{p(p+2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+2}\right),\text{ т.е. } x_2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2t}).$$

Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t)=\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t)=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2t}\right)'=-\sqrt{3}e^{-2t}$, то при t<1

$$i_2(t)=-\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)}d\tau=-\sqrt{3}e^{-2t}\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}e^{2\tau}d\tau=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{\left(4+\frac{\pi^2}{4}\right)}e^{-2(t-\tau)}\left[2\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}\right]\Big|_0^t=-\frac{4\sqrt{3}}{16+\pi^2}\left[2\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}e^{-2t}\right].$$ При t≥1

$$i_2(t)=-\int_0^1 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)}d\tau-\int_1^t\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)}d\tau=-\frac{\sqrt{3}}{\left(4+\frac{\pi^2}{4}\right)}e^{-2(t-\tau)}\left[2\sin\frac{\pi\tau}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}\right]\Big|_0^1-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2(t-\tau)}\Big|_1^t=$$

$$-\frac{4\sqrt{3}}{16+\pi^2}\left[2e^{-2(t-1)}+\frac{\pi}{2}e^{-2t}\right]-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2(t-1)}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2(16+\pi^2)}(\pi e^2-4)e^{-2t}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=\frac{1}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi t}{2}\right)+\frac{6}{16+\pi^2}\left[2\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}e^{-2t}\right] \\ i_2(t)=-\frac{4\sqrt{3}}{16+\pi^2}\left[2\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}e^{-2t}\right] \end{cases}$ при 0≤t<1 и

$$\begin{cases} i_1(t)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{t}{2}-\dfrac{e^{-2t}\pi}{4(16+\pi^2)}(\pi^2e^2-12) \\ i_2(t)=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2(16+\pi^2)}(\pi e^2-4)e^{-2t}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{при } t\geq 1.$$

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:
$tx''+(1-6t)x'+3(3t-1)x=0,\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=3.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p-3$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq-\dfrac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq-\dfrac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq-\dfrac{d}{dp}\{pX-1\}=-(X+p\dfrac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq-\dfrac{d}{dp}\{p^2X-p-2\}=-(2pX+p^2\dfrac{dX}{dp}-1)$. Учитывая это,

получаем операторное уравнение: $-(2pX+p^2\dfrac{dX}{dp}-1)+pX-1+6(X+p\dfrac{dX}{dp})-9\dfrac{dX}{dp}-3X=0$. Или

$(-p^2+6p-9)\dfrac{dX}{dp}-(p-3)X=-(p-3)^2\dfrac{dX}{dp}-(p-3)X=0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$(p-3)\dfrac{dX}{dp}+X=0;\quad \dfrac{dX}{X}=-\dfrac{dp}{p-3};\quad \ln|X|=-\ln|p-3|+\ln C;\quad X(p)=\dfrac{C}{p-3}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t)=C\cdot e^{3t}$. Так как x(0)=1, то C=1. Окончательно, $x(t)=e^{3t}$

ОТВЕТ: $x(t)=e^{3t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:
$\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad (x>0,\ \ t>0)\quad u|_{t=0}=u_1,\ u|_{x=0}=0.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,t)\risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\risingdotseq pU(x,p)-u(x,0)=pU(x,p)-u_1$. Запишем операторное уравнение:

$k\dfrac{d^2U}{dx^2}=pU-u_1$ или $k\dfrac{d^2U}{dx^2}-pU=-u_1$. Это линейное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $kr^2-p=0$ имеет корни $r_1=-\sqrt{\dfrac{p}{k}},\ r_1=\sqrt{\dfrac{p}{k}}$. Следовательно, решением однородного уравнения будет $U(x,p)=C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}+C_2e^{\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $U_1=A$. Подставляв уравнение, получим:

$-pA=-u_1$ или $A=\dfrac{u_1}{p}$. Общим решением уравнения будет $U(x,p)=C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}+C_2e^{\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}+\dfrac{u_1}{p}$ По свойству изображений Лапласа $U(x,p)\to 0$ при $p\to\infty$. Это возможно только тогда, когда C_2=0. Таким образом, $U(x,p)=C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}+\dfrac{u_1}{p}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)|_{x=0}=0$, найдём $C_1 = -\frac{u_1}{p}$. Следовательно, $U(x,p) = -\frac{u_1}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x} + \frac{u_1}{p}$. Для нахождения оригинала функции воспользуемся соотношением $\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} \risingdotseq \mathrm{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$,

где $\mathrm{Erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{\tau} e^{-z^2} dz$. В данном случае

$$u(x,t) = -u_1 \cdot \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + u_1 = -u_1 (1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{x/2\sqrt{kt}} e^{-z^2} dz) + u_1 = \frac{2u_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{x/2\sqrt{kt}} e^{-z^2} dz.$$

ОТВЕТ: $u(x,t) = \frac{2u_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{0}^{x/2\sqrt{kt}} e^{-z^2} dz)$