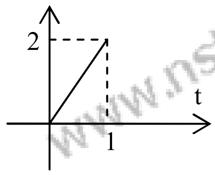
ВАРИАНТ 3
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\sin 3t\cdot\sin t$; **2)** $f(t)=e^{t}\cdot\cos 2t-2\sin 2t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t\,\mathrm{ch}^2 2t\,d\tau$; **4)** $f(t)=\eta(t-7)\,\mathrm{sh}\,4(t-7)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^4\,\mathrm{ch}\,7\tau\,d\tau$;   **6)**



7) $f(t)=(t^2-9)\eta(t-3)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\sin 3t\cdot\sin t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем: $\sin 3t\cdot\sin t=\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 4t)$. По таблицам, $\cos 2t\risingdotseq\frac{p}{p^2+4}$ и $\cos 4t\risingdotseq\frac{p}{p^2+16}$. Далее, в силу свойства линейности, $\sin 3t\cdot\sin t\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+4}-\frac{p}{p^2+16}\right)=\frac{6p}{(p^2+4)(p^2+16)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin 3t\cdot\sin t\risingdotseq\frac{6p}{(p^2+4)(p^2+16)}$.

2) $f(t)=e^{t}\cdot\cos 2t-2\sin 2t$. По таблице находим $\cos 2t\risingdotseq\frac{p}{p^2+4}$ и $\sin 2t\risingdotseq\frac{2}{p^2+4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{t}\cos 2t\risingdotseq\frac{p-1}{(p-1)^2+4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{t}\cdot\cos 2t-2\sin 2t\risingdotseq\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-\frac{4}{p^2+4}=$$

$$\frac{p^3-p^2+4p-4-4p^2+8p-4-16}{[(p-1)^2+4](p^2+4)}=\frac{p^3-5p^2+12p-24}{[(p-1)^2+1](p^2+1)}.$$ Или

$$e^{t}\cdot\cos 2t-2\sin 2t\risingdotseq\frac{(p^2-3)(p-1)}{[(p-1)^2+1](p^2+1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{t}\cdot\cos 2t-2\sin 2t.\risingdotseq\frac{(p^2-3)(p-1)}{[(p-1)^2+1](p^2+1)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t\,\mathrm{ch}^2 2t\,d\tau.$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$t\,\mathrm{ch}^2 2t=\frac{t}{2}(\mathrm{ch}4t+1)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}t\,\mathrm{ch}4t$. По таблице находим $\mathrm{ch}4t\risingdotseq\frac{p}{p^2-16}$. Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2-16}\right)\risingdotseq-t\cdot\mathrm{ch}4t$. Следовательно,

$t\cdot\mathrm{ch}4t\risingdotseq-\frac{p^2-16-2p^2}{(p^2-16)^2}=\frac{p^2+16}{(p^2-16)^2}$. Так как $t\risingdotseq\frac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{2}t\,ch4t \risingdotseq \frac{1}{2p^2}+\frac{p^2+16}{2(p^2-16)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p^2-16)^2+p^2(p^2+16)}{p^2(p^2-16)^2}=\frac{p^4-8p^2+128}{p^2(p^2-16)^2}=\frac{(p^2-4)^2+112}{p^2(p^2-16)^2}.$$

По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int_0^t \tau ch^2 2\tau d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{(p^2-4)^2+112}{p^2(p^2-16)^2}=\frac{(p^2-4)^2+112}{p^3(p^2-16)^2}.$$

ОТВЕТ: $\int_0^t \tau ch^2 2\tau d\tau \risingdotseq \frac{(p^2-4)^2+112}{p^3(p^2-16)^2}$.

4) $f(t)=\eta(t-7)sh\,4(t-7)$. По таблице $sh4t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{4}{p^2-16}$. Согласно теореме запаздывания

$$sh4(t-7)\cdot\eta(t-7) \risingdotseq \frac{4e^{-7p}}{p^2-16}.$$

ОТВЕТ: $sh4(t-7)\cdot\eta(t-7) \risingdotseq \frac{4e^{-7p}}{p^2-16}$.

5) $f(t)=\int_0^t (t-\tau)^4 ch7\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^4 и ch7t. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^4 \risingdotseq \frac{4!}{p^5}$ и $ch7t \risingdotseq \frac{p}{p^2-49}$. Следовательно, $\int_0^t (t-\tau)^4 ch7\tau d\tau \risingdotseq \frac{24p}{p^5(p^2-49)}=\frac{24}{p^4(p^2-49)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t (t-\tau)^4 ch7\tau d\tau \risingdotseq \frac{24}{p^4(p^2-49)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2t, & 0\le t<1,\\ 0, & t\ge 1.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=2t\cdot\eta(t)-2(t-1)\cdot\eta(t-1)-2\cdot\eta(t-1)$. Так как $2t=2(t-1)+2$, то начиная с момента t=1 функция становится равной нулю. По таблице $2t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{2}{p^2}$ и $2\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{2}{p}$.

Согласно теореме запаздывания $2(t-1)\cdot\eta(t-1) \risingdotseq \frac{2e^{-p}}{p^2}$ и $2\cdot\eta(t-1) \risingdotseq \frac{2e^{-p}}{p}$. По свойству линейности получим: $f(t) \risingdotseq \frac{2}{p^2}-\frac{2e^{-p}}{p^2}-\frac{2e^{-p}}{p}=2\frac{1-(1+p)e^{-p}}{p^2}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq 2\frac{1-(1+p)e^{-p}}{p^2}$.

7) $f(t)=(t^2-9)\eta(t-3)$. Разложим функцию u(t)=t^2-9 по степеням (t-3), пользуясь формулой Тейлора (t_0=3): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=2t$, $u''(t)=2$, $u'(3)=6$, u(3)=0. Тогда u(t)=6(t-3)+$(t-3)^2$. Окончательно получаем: f(t)=u(t)·η(t-3)=[6(t-3)+$(t-3)^2$]·η(t-3). По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания

$(t-3)\cdot\eta(t-3)\risingdotseq\frac{e^{-3p}}{p^2}$ и $(t-3)^2\cdot\eta(t-3)\risingdotseq\frac{2e^{-3p}}{p^3}$. Применим свойство линейности: f(t) $\risingdotseq\frac{6e^{-3p}}{p^2}+\frac{2e^{-3p}}{p^3})=\frac{2e^{-3p}(3p+1)}{p^3}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq\frac{2e^{-3p}(3p+1)}{p^3}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+16}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p-1)^2$ в сумме $(p-1)^2+16$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что косинус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\cos wt\risingdotseq\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+w^2}$.

Действительно, $\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+16}=2\frac{p-1}{(p-1)^2+4^2}\risingdotseq 2e^t\cos 4t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+16}\right)\risingdotseq -2te^t\cos 4t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+16}\right)\risingdotseq -2te^t\cos 4t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2-2p+5)}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-2p+5)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=1-2i$, $p_3=1+2i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2-2p+5)$ и $\psi'(p)=3p^2-4p+5$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{5}\ ,\quad \operatorname*{res}_{p=1-2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(1-2i)}{\psi'(1-2i)}=\frac{e^{(1-2i)t}}{3(1-2i)^2-4(1-2i)+5}=-\frac{e^{(1-2i)t}}{4(2+i)},$$

$$\operatorname*{res}_{p=1+2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(1+2i)}{\psi'(1+2i)}=\frac{e^{(1+2i)t}}{3(1+2i)^2-4(1+2i)+5}=-\frac{e^{(1+2i)t}}{4(2-i)}.$$ Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=1-2i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=1+2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-2it}}{2+i}+\frac{e^{2it}}{2-i}\right)e^{t}]=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{e^{-2it}(2-i)+e^{2it}(2+i)}{4\cdot 5}\cdot e^{t}]=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}(2\cdot \operatorname{ch}2it+i\cdot \operatorname{sh}(2it)\cdot e^{t}]=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{e^{t}}{10}(2\cos 2t-\sin 2t).$$ Здесь учтено, что $\cos(t)=\operatorname{ch}(it)$, а $\sin(t)=-i\cdot\operatorname{sh}(it)$.

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p(p^2-2p+5)} \risingdotseq \dfrac{1}{5}-\dfrac{e^{t}}{10}(2\cos 2t-\sin 2t)$

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{-5}{p^2(p^2-7p+12)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции $F(p)$. Из уравнения $p^2(p^2-7p+12)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=3$, $p_3=4$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{-5}{p^2(p^2-7p+12)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{p-4}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-5}{p^2(p^2-7p+12)}=\frac{Ap(p-3)(p-4)+B(p-3)(p-4)+Cp^2(p-4)+Dp^2(p-3)}{p^2(p-3)(p-4)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p-3)(p-4)+$ $+B(p-3)(p-4)+Cp^2(p-4)+Dp^2(p-3)=-5$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая $p=0$, получим $B=-5/12$, при $p=3$ получим $C=5/9$, при $p=4$ находим $D=-5/16$. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: $A+C+D=0$ или $A=-(C+D)=-(5/9-5/16)=-35/144$. Таким образом,

$$\frac{-5}{p^2(p^2-7p+12)}=-\frac{35}{144}\cdot\frac{1}{p}-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{p-4}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{-5}{p^2(p^2-7p+12)}\risingdotseq-\frac{5(7+12t)}{144}+\frac{5}{9}\cdot e^{3t}-\frac{5}{16}\cdot e^{4t}.$$

ОТВЕТ: $\dfrac{-5}{p^2(p^2-7p+12)}\risingdotseq-\dfrac{5(7+12t)}{144}+\dfrac{5}{9}\cdot e^{3t}-\dfrac{5}{16}\cdot e^{4t}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''+14x'+49x=3e^{3t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$**;** **12.** $x''+x=\cos t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-2$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x'' + 14x' + 49x = 3e^{3t}$, $x(0) = 0, x'(0) = -1$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \fallingdotseq X(p)$, то $x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x''(t) \fallingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1$. По таблице $3e^{3t} \fallingdotseq \dfrac{3}{p-3}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p) + 14pX(p) + 49X(p) + 1 = \dfrac{3}{p-3}$ или $X(p)[p^2 + 14p + 49] = \dfrac{3}{p-3} - 1 = \dfrac{6-p}{p-3}$. Тогда $X(p) = \dfrac{6-p}{(p-3)(p+7)^2}$. Применим метод разложения на простые дроби:
$\dfrac{6-p}{(p-3)(p+7)^2} = \dfrac{A}{p-3} + \dfrac{B}{p+7} + \dfrac{C}{(p+7)^2} = \dfrac{A(p+7)^2 + B(p+7)(p-3) + C(p-3)}{(p-3)(p+7)^2}$. Отсюда
$6 - p = A(p+7)^2 + B(p+7)(p-3) + C(p-3)$. Если p=3, то $A = \dfrac{3}{100}$, при $p = -7$ получим $C = -\dfrac{13}{10}$. Для определения B приравняем коэффициенты при p^2: A+B=0. Отсюда $B = -A = -\dfrac{3}{100}$. Таким образом, $X(p) = \dfrac{3}{100(p-3)} - \dfrac{3}{100(p+7)} - \dfrac{13}{10(p+7)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \fallingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \fallingdotseq \dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t) = \dfrac{3}{100}e^{3t} - \dfrac{3}{100}e^{-7t} - \dfrac{13}{10}te^{-7t}$.

ОТВЕТ: $x(t) = \dfrac{3}{100}[e^{3t} - e^{-7t} - 130te^{-7t}]$.

12. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \fallingdotseq X(p)$, то $x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x''(t) \fallingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 2$. По таблице $\cos t \fallingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p) + X(p) + 2 = \dfrac{p}{p^2+1}$ или $X(p)[p^2+1] = \dfrac{p}{p^2+1} - 2$. Тогда $X(p) = \dfrac{-2}{p^2+1} + \dfrac{p}{(p^2+4)^2}$.

Или $X(p) = -2\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t) = -2\sin t + \dfrac{1}{2}t\cdot\sin t = (\dfrac{1}{2}t - 2)\sin t$.

ОТВЕТ: $x(t) = (\dfrac{1}{2}t - 2)\sin t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x' + x + y = e^t \\ y' + 2x + 2y = e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t) \fallingdotseq X(p)$, $y(t) \fallingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \fallingdotseq pX(p)$, $y'(t) \fallingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^t \fallingdotseq \dfrac{1}{p-1}$, $e^{2t} \fallingdotseq \dfrac{1}{p-2}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+1]+Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ 2X(p)+Y(p)[p+2]=\dfrac{1}{p-2} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p+2 и вычтем второе уравнение.

Получим: $X(p)[p+1](p+2)-2X(p)=\dfrac{p+2}{p-1}-\dfrac{1}{p-2}=\dfrac{p^2-4-p+1}{(p-2)(p-1)}$ или $p(p+3)X(p)=\dfrac{p^2-p-3}{(p-2)(p-1)}$.

Тогда $X(p)=\dfrac{p^2-p-3}{p(p-1)(p-2)(p+3)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{p^2-p-3}{p(p-1)(p-2)(p+3)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+3}=\frac{A(p-1)(p-2)(p+3)+Bp(p+3)(p-2)+Cp(p+3)(p-1)+Cp(p-2)(p-1)}{p(p-1)(p-2)(p+3)}.$$

Приравняем числители:

$A(p-1)(p-2)(p+3)+Bp(p+3)(p-2)+Cp(p+3)(p-1)+Cp(p-2)(p-1)=p^2-p-3$. Полагая p=0, находим A=-1/2, при p=1 получим B=3/4, при p=2 находим C=-1/10, при p=-3 находим D=-3/20. Таким образом, $X(p)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{p+3}$. Следовательно,

$x(t)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^{t}-\frac{1}{10}e^{2t}-\frac{3}{20}e^{-3t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t)=e^{t}-x'(t)-x(t)$, т.е.

$$y(t)=e^{t}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^{t}-\frac{1}{10}e^{2t}-\frac{3}{20}e^{-3t}\right)'+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}e^{t}+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{3}{20}e^{-3t}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{3}{10}e^{-3t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^{t}-\frac{1}{10}e^{2t}-\frac{3}{20}e^{-3t} \\ y(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{3}{10}e^{-3t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ *и* $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$L_1=L_2=2,\ R_1=0,\ R_2=1,\ M=\sqrt{3};\quad u(t)=\begin{cases} e^{t}-1, & 0\le t<2 \\ e^{-t}+2\operatorname{sh}2-1, & t\ge 2 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+\sqrt{3}\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+i_2+\sqrt{3}\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$, $i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений

$\begin{cases} 2pI_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+I_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой

$\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p) + \sqrt{3}pX_2(p) = \frac{1}{p} \\ 2pX_2(p) + X_2(p) + \sqrt{3}pX_1(p) = 0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p) = -\frac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p - \frac{3p^2}{2p+1}] = \frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{4p^2 + 2p - 3p^2}{2p+1} = \frac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p) = \frac{2p+1}{p^2(p+2)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\frac{2p+1}{p^2(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+2} = \frac{Ap(p+2) + B(p+2) + Cp^2}{p^2(p+2)}$. Приравняем числители:

$Ap(p+2) + B(p+2) + Cp^2 = 2p+1$. Полагая p=0, находим B=1/2, при $p = -2$ получим $C = -\frac{3}{4}$. Приравнивая коэффициенты при p^2, получим A+C=0, т.е. A=3/4. Таким образом, $X_1(p) = \frac{3}{4}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}$. Следовательно, $x_1(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{-2t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t) = \int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{-2t}\right)' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}$, то при t<2 $i_1(t) = \int_0^t (e^\tau - 1)\cdot(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau =$

$$= \frac{1}{2}(e^\tau - \tau)\Big|_0^t + \frac{1}{2}e^{-2t+3\tau}\Big|_0^t - \frac{3}{4}e^{-2(t-\tau)}\Big|_0^t = \frac{1}{2}(e^t - t - 1) + \frac{1}{2}(e^t - e^{-2t}) - \frac{3}{4}(1 - e^{-2t}) = -\frac{5}{4} - \frac{t}{2} + e^t + \frac{1}{4}e^{-2t}$$

.

. При t≥2 получим: $i_1(t) = \int_0^2 (e^\tau - 1)\cdot(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau + \int_2^t (e^{-\tau} + 2\operatorname{sh}2 - 1)\cdot(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau =$

$$= \frac{1}{2}(e^\tau - \tau)\Big|_0^2 + \frac{1}{2}e^{-2t+3\tau}\Big|_0^2 - \frac{3}{4}e^{-2(t-\tau)}\Big|_0^2 + \left(-\frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{3}{2}e^{-2t+\tau}\right)\Big|_2^t + (2\operatorname{sh}2 - 1)(\frac{\tau}{2} + \frac{3}{4}e^{-2(t-\tau)})\Big|_2^t =$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t+6} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t+4} + \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{3}{2}e^{-2t+2} + (2\operatorname{sh}2 - 1)(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}) -$$

$$- (2\operatorname{sh}2 - 1)(1 + \frac{3}{4}e^{-2t+4}) = -\frac{5}{4} + \frac{2\operatorname{sh}2 - 1}{2}t + e^{-t} + \frac{1}{2}\operatorname{sh}2 + e^{-2} - \frac{e^6 - 1 + 3e^2}{4}e^{-2t}.$$

Найдём $x_2(t)$:

$X_2(p) = -\frac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1} = -\frac{\sqrt{3}p}{2p+1}\cdot\frac{2p+1}{p^2(p+2)} = -\frac{\sqrt{3}}{p(p+2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2})$, т.е. $x_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - e^{-2t})$.

Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t) = \int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2t}\right)' = -\sqrt{3}e^{-2t}$, то при t<2

$i_2(t) = -\int_0^t (e^\tau - 1)\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau = -\sqrt{3}e^{-2t}\int_0^t (e^{3\tau} - e^{2\tau})d\tau =$

$$=-\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{3}e^{3\tau}-\frac{1}{2}e^{2\tau}\right]_0^t=-\sqrt{3}e^{-2t}(\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{6})=-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-2t}$$. При $t\geq 2$

$$i_2(t)=-\int_0^2(e^{\tau}-1)\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau-\int_2^t(e^{-\tau}+2sh2-1)\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau=-\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{3}e^{3\tau}-\frac{1}{2}e^{2\tau}\right]_0^2-$$

$$-\sqrt{3}e^{-2t}[e^{\tau}+\frac{(2sh2-1)}{2}e^{2\tau}]\Big|_2^t=-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-2t+6}+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2t+4}+\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-2t}-\sqrt{3}e^{-t}-\frac{\sqrt{3}(2sh2-1)}{2}+\sqrt{3}e^{-2t+2}+$$

$$+\frac{\sqrt{3}(2sh2-1)}{2}e^{-2t+4}=-\sqrt{3}e^{-t}-\frac{\sqrt{3}(2sh2-1)}{2}+\frac{e^6-1+3e^2}{2\sqrt{3}}e^{-2t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=-\frac{5}{4}-\frac{t}{2}+e^{t}+\frac{1}{4}e^{-2t} \\ i_2(t)=-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{t}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-2t}\end{cases}$ при $0\leq t<2$ и

$\begin{cases} i_1(t)=-\frac{5}{4}+\frac{2sh2-1}{2}t+e^{-t}+\frac{1}{2}sh2+e^{-2}-\frac{e^6-1+3e^2}{4}e^{-2t} \\ i_2(t)=-\sqrt{3}e^{-t}-\frac{\sqrt{3}(2sh2-1)}{2}+\frac{e^6-1+3e^2}{2\sqrt{3}}e^{-2t}\end{cases}$ при $t\geq 2$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:

$2tx''+(5t+2)x'+(3t+2)x=0,\ x(0)=-1,\ x'(0)=1.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)+1$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+p-1$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq-\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{pX+1\}=-(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{p^2X+p-1\}=-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}+1)$. Учитывая это, получаем операторное уравнение: $-2(2pX+p^2\frac{dX}{dp}+1)+2pX+2-5(X+p\frac{dX}{dp})-3\frac{dX}{dp}+2X=0$. Или $(-2p^2-5p-3)\frac{dX}{dp}-(2p+3)X=-(p+1)(2p+3)\frac{dX}{dp}-(2p+3)X=0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$(p+1)\frac{dX}{dp}+X=0;\quad \frac{dX}{X}=-\frac{dp}{p+1};\quad \ln|X|=-\ln|p+1|+\ln C;\quad X(p)=\frac{C}{p+1}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t)=C\cdot e^{-t}$. Так как x(0)=-1, то C=-1. Окончательно, $x(t)=-e^{-t}$

ОТВЕТ: $x(t)=-e^{-t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad (a>0,\ x>0,\ t>0)\quad u|_{t=0}=0,\ u|_{x=0}=u_0.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p)$. Запишем операторное уравнение:

$a^2 \dfrac{d^2U}{dx^2} = pU$ или $a^2 \dfrac{d^2U}{dx^2} - pU = 0$. Это линейное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $kr^2 - p = 0$ имеет корни $r_1 = -\dfrac{\sqrt{p}}{a}$, $r_1 = \dfrac{\sqrt{p}}{a}$. Следовательно, решением уравнения будет $U(x,p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\cdot x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}\cdot x}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p) \to 0$ при $p \to \infty$. Это возможно только тогда, когда C_2=0. Таким образом, $U(x,p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\cdot x}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0} = \dfrac{u_0}{p}$, найдём $C_1 = \dfrac{u_0}{p}$.

Следовательно, $U(x,p) = \dfrac{u_0}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\cdot x}$. Для нахождения оригинала функции воспользуемся соотношением $\dfrac{1}{p} e^{-b\sqrt{p}} \risingdotseq \mathrm{Erf}\left(\dfrac{b}{2\sqrt{t}}\right)$, где $\mathrm{Erf}(\tau) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\tau}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^{\tau} e^{-z^2} dz$. В данном случае $u(x,t) = u_0 \cdot \mathrm{Erf}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = u_0 (1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^{x/2a\sqrt{kt}} e^{-z^2} dz)$.

ОТВЕТ: $u(x,t) = u_0 (1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^{x/2a\sqrt{kt}} e^{-z^2} dz)$