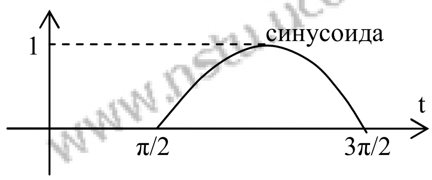
ВАРИАНТ 4
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\sin 4t\cdot\sin 2t$; **2)** $f(t)=e^{-t}\cdot \mathrm{ch}2t+2\mathrm{sh}t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t^2e^{3t}dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-4)\mathrm{ch}^2(t-4)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^2\cos 3\tau d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(\frac{t^2}{4}+t-24)\eta(t-8)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\sin 4t\cdot\sin 2t.$ Используем тригонометрическую формулу. Имеем: $\sin 4t\cdot\sin 2t=\frac{1}{2}(\cos 2t-\cos 6t)$. По таблицам, $\cos 2t\risingdotseq\frac{p}{p^2+4}$ и $\cos 6t\risingdotseq\frac{p}{p^2+36}$. Далее, в силу свойства линейности, $\sin 4t\cdot\sin 2t\risingdotseq\frac{1}{2}(\frac{p}{p^2+4}-\frac{p}{p^2+36})=\frac{16p}{(p^2+4)(p^2+36)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin 4t\cdot\sin 2t\risingdotseq\frac{16p}{(p^2+4)(p^2+16)}$.

2) $f(t)=e^{-t}\cdot\mathrm{ch}2t+2\mathrm{sh}t.$ По таблице находим $\mathrm{ch}2t\risingdotseq\frac{p}{p^2-4}$ и $\mathrm{sh}t\risingdotseq\frac{1}{p^2-1}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-t}\mathrm{ch}2t\risingdotseq\frac{p+1}{(p+1)^2-4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{-t}\mathrm{ch}t+2\mathrm{sh}t\risingdotseq\frac{p+1}{(p+1)^2-4}+2\frac{1}{p^2-1}=\frac{p^3+p^2-p-1+2p^2+4p+2-8}{[(p+1)^2-4](p^2-1)}=\frac{p^3+3p^2+3p-7}{[(p+1)^2-4](p^2-1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{-t}\mathrm{ch}2t+2\mathrm{sh}t\risingdotseq\frac{p^3+3p^2+3p-7}{[(p+1)^2-4](p^2-1)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t^2e^{3t}dt.$ По таблице находим $t^2\risingdotseq\frac{2}{p^3}$. Применяя теорему смещения, получим: $t^2e^{3t}\risingdotseq\frac{2}{(p-3)^3}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом, $\int\limits_0^t t^2e^{3t}dt\risingdotseq\frac{2}{p(p-3)^3}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^2e^{3t}dt\risingdotseq\frac{2}{p(p-3)^3}$.

4) $f(t)=\eta(t-4)\mathrm{ch}^2(t-4).$ Воспользуемся формулой: $\mathrm{ch}^2t=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2t+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{ch}2t$. По таблице находим $\mathrm{ch}2t\risingdotseq\frac{p}{p^2-4}$ и $\frac{1}{2}\risingdotseq\frac{1}{2p}$ Тогда по свойству линейности получаем:

$\eta(t)\mathrm{ch}^2 t \risingdotseq \dfrac{1}{2p} + \dfrac{p}{2(p^2-4)}$. Или $\eta(t)\mathrm{ch}^2 t \risingdotseq \dfrac{p^2-4+p^2}{2p(p^2-4)} = \dfrac{p^2-2}{p(p^2-4)}$. Согласно теореме запаздывания $\eta(t-4)\mathrm{ch}^2(t-4) \risingdotseq \dfrac{p^2-2}{p(p^2-4)} \cdot e^{-4p}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-4)\mathrm{ch}^2(t-4) \risingdotseq \dfrac{p^2-2}{p(p^2-4)} \cdot e^{-4p}$.

5) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^2 \cos 3\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^2 и $\cos 3t$. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}$ и $\cos 3t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+9}$. Следовательно, $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \cos 3\tau d\tau \risingdotseq \dfrac{2}{p^2(p^2+9)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \cos 3\tau d\tau \risingdotseq \dfrac{2}{p^2(p^2+9)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/2, \\ \sin(t-\pi/2), & \pi/2 \le t < 3\pi/2, \\ 0, & t \ge 3\pi/2. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t) = \sin(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) + \sin(t-3\pi/2)\cdot\eta(t-3\pi/2)$. Так как $\sin(t-3\pi/2) = \sin(t-\pi/2-\pi) = -\sin(t-\pi/2)$, то начиная с момента $t=3\pi/2$ синусоиды уничтожаются. По таблице $\sin t \cdot \eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. Согласно теореме запаздывания

$\sin(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$ и $\sin(t-3\pi/2)\cdot\eta(t-3\pi/2) \risingdotseq \dfrac{e^{-\frac{3\pi}{2}p}}{p^2+1}$. По свойству линейности получим: $f(t) \risingdotseq \dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1} + \dfrac{e^{-\frac{3\pi}{2}p}}{p^2+1} = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq \dfrac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}$.

7) $f(t) = (\dfrac{t^2}{4} + t - 24)\eta(t-8)$. Разложим функцию $u(t)=t^2/4+t-24$ по степеням $(t-8)$, пользуясь формулой Тейлора ($t_0=8$): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\dfrac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=t/2+1$, $u''(t)=1/2$, $u'(8)=5$, $u(8)=0$. Тогда $u(t)=5(t-8)+(t-8)^2/4$. Окончательно получаем:

f(t)=u(t)·η(t-8)=[5(t-8)+(t-8)^2/4]·η(t-8).). По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $(t-8)\cdot\eta(t-8)\risingdotseq\frac{e^{-8p}}{p^2}$ и $(t-8)^2\cdot\eta(t-8)\risingdotseq\frac{2e^{-8p}}{p^3}$. Применим свойство линейности: $f(t)\risingdotseq\frac{5e^{-8p}}{p^2}+\frac{2e^{-8p}}{4p^3}=(\frac{5}{p^2}+\frac{1}{2p^3})\cdot e^{-8p}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq(\frac{5}{p^2}+\frac{1}{2p^3})\cdot e^{-8p}$..

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{3e^{-2p}}{(p-1)^3}.$$

РЕШЕНИЕ

По таблице $\frac{1}{p^3}\risingdotseq\frac{t^2}{2}$. Тогда на основании теоремы смещения $\frac{1}{(p-1)^3}\risingdotseq\frac{t^2}{2}e^t$. Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим: $\frac{3e^{-2p}}{(p-1)^3}\risingdotseq\frac{3(t-2)^2}{2}e^{t-2}\eta(t-2)$.

ОТВЕТ: $\frac{3e^{-2p}}{(p-1)^3}\risingdotseq\frac{3}{2}(t-2)^2e^{t-2}\eta(t-2)$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+5p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+2p+5)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-1-2i$, $p_3=-1+2i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2+2p+5)=0$ и $\psi'(p)=3p^2+4p+5$. Следовательно,

$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{5}$, $\operatorname*{res}_{p=-1-2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-1-2i)}{\psi'(-1-2i)}=\frac{e^{(-1-2i)t}}{3(-1-2i)^2+4(-1-2i)+5}=\frac{e^{-(1+2i)t}}{4(2-i)}$,

$\operatorname*{res}_{p=-1+2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-1+2i)}{\psi'(-1+2i)}=\frac{e^{(-1+2i)t}}{3(-1+2i)^2+4(-1+2i)+5}=-\frac{e^{-(1-i)t}}{4(2+i)}$. Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=-1-2i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=-1+2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}(\frac{e^{-2it}}{2-i}+\frac{e^{2it}}{2+i})e^{-t}=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\frac{e^{-2it}(2+i)+e^{2it}(2-i)}{5}\cdot e^{-t}=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}(2ch(2it)-i\cdot sh(2it))\cdot e^{-t}]=$$

$=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}(2\cos 2t+\sin 2t)\cdot e^{-t}$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^3+2p^2+5p} \risingdotseq \frac{1}{5}-\frac{1}{10}(2\cos 2t+\sin 2t)\cdot e^{-t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{4}{p^2(p^2-9p+18)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p^2(p^2-9p+18)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=3$, $p_3=6$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{4}{p^2(p^2-9p+18)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{p-6}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{4}{p^2(p^2-9p+18)}=\frac{Ap(p-3)(p-6)+B(p-3)(p-6)+Cp^2(p-6)+Dp^2(p-3)}{p^2(p-3)(p-6)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p-3)(p-6)+B(p-3)(p-6)+Cp^2(p-6)+Dp^2(p-3)=4$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая p=0, получим B=2/9, при p=3 получим C=-4/27, при p=6 находим D=1/27. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: A+C+D=0 или A=-(C+D)=-(-4/27+1/27)=1/9. Таким образом,

$$\frac{4}{p^2(p^2-9p+18)}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{p-3}+\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{p-6}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{4}{p^2(p^2-9p+18)} \risingdotseq \frac{1+2t}{9}-\frac{4}{27}\cdot e^{3t}+\frac{1}{27}\cdot e^{6t}.$$

ОТВЕТ: $\frac{4}{p^2(p^2-9p+18)} \risingdotseq \frac{1+2t}{9}-\frac{4}{27}\cdot e^{3t}+\frac{1}{27}\cdot e^{6t}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-12x'+36x=-2e^{-t}, \quad x(0)=0, x'(0)=2$ **;** **12.** $x''+36x=6\cos 6t, \quad x(0)=0, \ x'(0)=-3$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x''-12x'+36x=-2e^{-t}, \quad x(0)=0, x'(0)=2$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2$. По таблице $-2e^{-t}\risingdotseq\frac{-2}{p+1}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p)-12pX(p)+36X(p)-2=\frac{-2}{p+1}$ или $X(p)[p^2-12p+36]=\frac{-2}{p+1}+2$. Тогда

$X(p)=\frac{2p}{(p+1)[p^2-12p+36]}=\frac{2p}{(p+1)(p-6)^2}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{2p}{(p+1)(p-6)^2}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-6}+\frac{C}{(p-6)^2}$. Отсюда $2p=A(p-6)^2+B(p-6)(p+1)+C(p+1)$. Если p=-1, то $A=-\frac{2}{49}$, при $p=6$ получим $C=\frac{12}{7}$.. Для определения C приравняем коэффициенты при p^2: A+B=0. Отсюда $B=-A=\frac{2}{49}$. Таким образом, $X(p)=-\frac{2}{49(p+1)}+\frac{2}{49(p-6)}+\frac{12}{7(p-6)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим:

$x(t)=-\frac{2}{49}e^{-t}+\frac{2}{49}e^{6t}+\frac{12}{7}te^{6t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=-\frac{2}{49}e^{-t}+\frac{2}{49}e^{6t}+\frac{12}{7}te^{6t}$.

12. $x''+36x=6\cos 6t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-3$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+3$. По таблице 6cos6t$\risingdotseq\frac{6p}{p^2+36}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+36X(p)+3=\frac{6p}{p^2+36}$ или $X(p)[p^2+3]=\frac{6p}{p^2+36}-3$. Тогда

$X(p)=\frac{6p}{(p^2+36)^2}-\frac{3}{p^2+36}$.

Или $X(p)=-\frac{1}{2}\frac{6}{p^2+36}-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{6}{p^2+36}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t)=-\frac{1}{2}\sin 6t+\frac{1}{2}t\cdot\sin 6t=\frac{1}{2}(t-1)\sin 6t$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{1}{2}(t-1)\sin 6t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x'+2x+2y=2e^t \\ y'-x-y=e^{2t} \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть x(t)$\risingdotseq$X(p), y(t)$\risingdotseq$Y(p). Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\risingdotseq pX(p)$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^t\risingdotseq\frac{1}{p-1}$, $e^{2t}\risingdotseq\frac{1}{p-2}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+2]+2Y(p)=\frac{2}{p-1} \\ -X(p)+Y(p)[p-1]=\frac{1}{p-2} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p-1, а второе – на 2, и вычтем второе уравнение из первого. Получим:

$X(p)[p-1](p+2)+2X(p)=2-\frac{2}{p-2}=\frac{2p-4-2}{p-2}$ или $p(p+1)X(p)=\frac{2p-6}{p-2}$. Тогда $X(p)=\frac{2p-6}{p(p+1)(p-2)}$.

Разложим правую часть на простые множители:

$\dfrac{2p-6}{p(p+1)(p-2)} = \dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{p-2} = \dfrac{A(p+1)(p-2)+Bp(p-2)+Cp(p+1)}{p(p+1)(p-2)}$. Приравняем числители: $A(p+1)(p-2)+Bp(p-2)+Cp(p+1)$ =2p-6. Полагая p=0, находим A=3, при p=-1 получим B=-8/3, при p=2 находим C=-1/3. Таким образом, $X(p) = 3\cdot\dfrac{1}{p}-\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{p-2}$. Следовательно,

$x(t) = 3-\dfrac{8}{3}e^{-t}-\dfrac{1}{3}e^{2t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t) = e^{t}-\dfrac{1}{2}x'(t)-x(t)$, т.е.

$$y(t) = e^{t}-\frac{1}{2}\left(3-\frac{8}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t}\right)'-3+\frac{8}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t} = e^{t}-3+\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t) = 3-\dfrac{8}{3}e^{-t}-\dfrac{1}{3}e^{2t} \\ y(t) = e^{t}-3+\dfrac{4}{3}e^{-t}+\dfrac{2}{3}e^{2t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0.$

$L_1 = L_2 = 2,\ R_1 = R_2 = 1,\ M = \sqrt{3};\qquad u(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t \le 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1 i_1+M\dfrac{di_2}{dt} = u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2 i_2+M\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+\sqrt{3}\dfrac{di_2}{dt} = u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+i_2+\sqrt{3}\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$, $i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p) = U \\ 2pI_2(p)+I_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p) = 0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией $\eta(t)$, для которой $\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+\sqrt{3}pX_2(p) = \dfrac{1}{p} \\ 2pX_2(p)+X_2(p)+\sqrt{3}pX_1(p) = 0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p) = -\dfrac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p-\dfrac{3p^2}{2p+1}] = \dfrac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{4p^2+2p-3p^2}{2p+1} = \dfrac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p) = \dfrac{2p+1}{p^2(p+2)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\dfrac{2p+1}{p^2(p+2)} = \dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p+2} = \dfrac{Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2}{p^2(p+2)}$. Приравняем числители:

$Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2 = 2p+1$. Полагая p=0, находим B=1/2, при $p=-2$ получим $C = -\dfrac{3}{4}$.

Приравнивая коэффициенты при p^2, получим A+C=0, т.е. A=3/4. Таким образом, $X_1(p)=\frac{3}{4}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}$. Следовательно, $x_1(t)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}e^{-2t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}e^{-2t}\right)'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}$, то при t<1 $i_1(t)=\int_0^t \tau(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t \tau(1+3e^{-2(t-\tau)})d\tau=$

$=\frac{1}{4}\tau^2\Big|_0^t+\frac{3}{2}e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^t=\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{8}(1-e^{-2t})$. При $1\le t\le 2$ получим:

$$i_1(t)=\int_0^1 \tau(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau+\int_1^t (2-\tau)(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau=\frac{1}{4}\tau^2\Big|_0^1+\frac{3}{2}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^1+(\tau-\frac{\tau^2}{4})\Big|_1^t+$$

$$+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)}\Big|_1^t-\frac{3}{2}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_1^t=\frac{11}{8}+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}-\frac{3}{8}(2e^2-1)e^{-2t}$$. При t>2

$$i_1(t)=\int_0^1 \tau(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau+\int_1^2 (2-\tau)(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau=\frac{1}{4}\tau^2\Big|_0^1+\frac{3}{2}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^1+(\tau-\frac{\tau^2}{4})\Big|_1^2+$$

$$+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)}\Big|_1^2-\frac{3}{2}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}(1-2e^2+e^4)e^{-2t}.$$ Найдём $x_2(t)$:

$X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1}=-\frac{\sqrt{3}p}{2p+1}\cdot\frac{2p+1}{p^2(p+2)}=-\frac{\sqrt{3}}{p(p+2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+2})$, т.е. $x_2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2t})$.

Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t)=\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t)=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2t}\right)'=-\sqrt{3}e^{-2t}$, то при t<1

$$i_2(t)=-\int_0^t \tau\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau=-\sqrt{3}e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}d\tau=$$

$=-\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^t=-\frac{\sqrt{3}}{4}(2t-1)-\frac{\sqrt{3}}{4}e^{-2t}=-\frac{\sqrt{3}}{4}t+\frac{\sqrt{3}}{4}(1-e^{-2t})$. При $1\le t\le 2$

$$i_2(t)=-\int_0^1 \tau\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau-\int_1^t (2-\tau)\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau=-\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^1-\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)}\Big|_1^t-$$

$$+\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_1^t=\frac{\sqrt{3}}{2}[-\frac{5}{2}+t+\frac{1}{2}(2e^2-1)e^{-2t}]$$ При $t\ge 2$

$$i_2(t)=-\int_0^1 \tau\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau-\int_1^2 (2-\tau)\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau=-\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_0^1-\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)}\Big|_1^2+$$

$$+\sqrt{3}e^{-2t}\left[\frac{1}{4}(2\tau-1)e^{2\tau}\right]_1^2=-\frac{\sqrt{3}}{4}(1-e^2)^2e^{-2t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{8}(1-e^{-2t}) \\ i_2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{4}t+\frac{\sqrt{3}}{4}(1-e^{-2t}) \end{cases}$ при $0\le t<1$ и $\begin{cases} i_1(t)=\frac{11}{8}+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{4}-\frac{3}{8}(2e^2-1)e^{-2t} \\ i_2(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}[-\frac{5}{2}+t+\frac{1}{2}(2e^2-1)e^{-2t}] \end{cases}$ при $1\le t\le 2$,

$$\begin{cases} i_1(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}(1-2e^2+e^4)e^{-2t} \\ i_2(t) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-e^2)^2 e^{-2t} \end{cases} \quad \text{при } t>2.$$

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:

$3tx'' + (14t+3)x' - 5(t-3)x = 0,\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=-5.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p + 5$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \risingdotseq -\dfrac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t) \risingdotseq -\dfrac{dX}{dp}$, $tx'(t) \risingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{pX-1\} = -(X + p\dfrac{dX}{dp})$, $tx'' \risingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{p^2X - p + 5\} = -(2pX + p^2\dfrac{dX}{dp} - 1)$. Учитывая это, получаем операторное уравнение: $-3(2pX + p^2\dfrac{dX}{dp} - 1) + 3pX - 3 - 14(X + p\dfrac{dX}{dp}) + 5\dfrac{dX}{dp} + 15X = 0$. Или $(-3p^2 - 14p + 5)\dfrac{dX}{dp} - (3p-1)X = -(p+5)(3p-1)\dfrac{dX}{dp} - (3p-1)X = 0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$(p+5)\dfrac{dX}{dp} + X = 0;\quad \dfrac{dX}{X} = -\dfrac{dp}{p+5};\quad \ln|X| = -\ln|p+5| + \ln C;\quad X(p) = \dfrac{C}{p+5}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t) = C\cdot e^{-5t}$. Так как x(0)=1, то C=1. Окончательно, $x(t) = e^{-5t}$

ОТВЕТ: $x(t) = e^{-5t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (x>0,\ t>0)\quad u\big|_{t=0} = 0,\ u\big|_{x=0} = a\cos\varpi t.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p)$. Запишем операторное уравнение:

$k\dfrac{d^2U}{dx^2} = pU$ или $k\dfrac{d^2U}{dx^2} - pU = 0$. Это линейное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $kr^2 - p = 0$ имеет корни $r_1 = -\sqrt{\dfrac{p}{k}}$, $r_1 = \sqrt{\dfrac{p}{k}}$. Следовательно, решением уравнения будет $U(x,p) = C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x} + C_2e^{\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p) \to 0$ при $p \to \infty$. Это возможно только тогда, когда C_2=0. Таким образом, $U(x,p) = C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0} = \dfrac{ap}{p^2+\omega^2}$, найдём $C_1 = \dfrac{ap}{p^2+\omega^2}$.

Следовательно, $U(x,p) = \dfrac{ap}{p^2+\omega^2}e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. Для нахождения оригинала функции воспользуемся соотношением $e^{-b\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{4t}}$. В данном случае $U(x,p) = \frac{ap}{p^2+\omega^2} \cdot e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{p}}$, где $\frac{ap}{p^2+\omega^2} \risingdotseq a\cos\omega t$ а $e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{x}{2\sqrt{k\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$. Следовательно, функция u(x,t) будет свёрткой этих двух функций $u(x,t) = \frac{ax}{2\sqrt{k\pi}} \int_0^t \cos\omega(t-\tau) \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4k\tau}} d\tau$.

ОТВЕТ: $u(x,t) = \frac{ax}{2\sqrt{k\pi}} \int_0^t \cos\omega(t-\tau) \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4k\tau}} d\tau$ (интеграл не берётся).