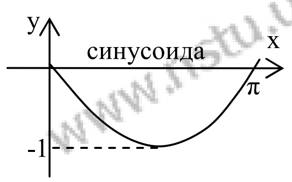
ВАРИАНТ 5
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\sin t\cdot\sin 5t$; **2)** $e^{-2t}\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} 2t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t^3e^{-2t}dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-5)\operatorname{ch}^2(t-5)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^3\cos 5(t-\tau)d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(\frac{t^2}{2}-4t+10)\eta(t-4)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\sin t\cdot\sin 5t.$ Используем тригонометрическую формулу. Имеем: $\sin t\cdot\sin 5t=\frac{1}{2}(\cos 4t-\cos 6t).$ По таблицам, $\cos 4t\fallingdotseq\frac{p}{p^2+16}$ и $\cos 6t\fallingdotseq\frac{p}{p^2+36}$. Далее, в силу свойства линейности, $\sin t\cdot\sin 5t\fallingdotseq\frac{1}{2}(\frac{p}{p^2+16}-\frac{p}{p^2+36})=\frac{10p}{(p^2+16)(p^2+36)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin t\cdot\sin 5t\fallingdotseq\frac{10p}{(p^2+16)(p^2+36)}$.

2) $f(t)=e^{-2t}\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} 2t.$ По таблице находим $\operatorname{ch}t\fallingdotseq\frac{p}{p^2-1}$ и $\operatorname{sh}2t\fallingdotseq\frac{2}{p^2-4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-2t}\operatorname{ch}t\fallingdotseq\frac{p+2}{(p+2)^2-1}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{-2t}\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}2t\fallingdotseq\frac{p+2}{(p+2)^2-1}-\frac{2}{p^2-4}=\frac{p^3+2p^2-4p-8-2p^2-8p-8+2}{[(p+2)^2-1](p^2-4)}=\frac{p^3-12p-14}{[(p+2)^2-1](p^2-4)}.$$

ОТВЕТ: $e^{-2t}\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}2t\fallingdotseq\frac{p^3-12p-14}{[(p+2)^2-1](p^2-4)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t^3e^{-2t}dt.$ По таблице находим $t^3\fallingdotseq\frac{3!}{p^4}$. Применяя теорему смещения, получим: $t^3e^{-2t}\fallingdotseq\frac{6}{(p+2)^4}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int\limits_0^t t^3e^{-2t}dt\fallingdotseq\frac{6}{p(p+2)^4}.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^3e^{-2t}dt\fallingdotseq\frac{6}{p(p+2)^4}$.

4) $f(t)=\eta(t-5)\operatorname{ch}^2(t-5).$ Воспользуемся формулой: $\operatorname{ch}^2t=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2t+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ch}2t$. По таблице находим $\operatorname{ch}2t\fallingdotseq\frac{p}{p^2-4}$ и $\frac{1}{2}\fallingdotseq\frac{1}{2p}$ Тогда по свойству линейности получаем:

$\eta(t)\mathrm{ch}^2 t \risingdotseq \dfrac{1}{2p} + \dfrac{p}{2(p^2-4)}$. Или $\eta(t)\mathrm{ch}^2 t \risingdotseq \dfrac{p^2-4+p^2}{2p(p^2-4)} = \dfrac{p^2-2}{p(p^2-4)}$. Согласно теореме запаздывания $\eta(t-5)\mathrm{ch}^2(t-5) \risingdotseq \dfrac{p^2-2}{p(p^2-4)} \cdot e^{-5p}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-5)\mathrm{ch}^2(t-5) \risingdotseq \dfrac{p^2-2}{p(p^2-4)} \cdot e^{-5p}$.

5) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 \cos 5(t-\tau)d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^3 и cos5t. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^3 \risingdotseq \dfrac{3!}{p^4}$ и $\cos 5t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+25}$. Следовательно, $\int\limits_0^t \tau^3 \cos 5(t-\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{6p}{p^4(p^2+25)} = \dfrac{6}{p^3(p^2+25)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t \tau^3 \cos 5(t-\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{6}{p^3(p^2+25)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -\sin t, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t) = -\sin t \cdot \eta(t) - \sin(t-\pi) \cdot \eta(t-\pi)$. Так как $\sin t = -\sin(t-\pi)$, то начиная с момента $t=\pi$ синусоиды уничтожаются. По таблице $\sin t \cdot \eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. Согласно теореме запаздывания $\sin(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi) \risingdotseq \dfrac{e^{-\pi p}}{p^2+1}$. По свойству линейности получим:

$f(t) \risingdotseq -\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{e^{-\pi p}}{p^2+1} = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq -\dfrac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$.

7) $f(t) = (\dfrac{t^2}{2} - 4t + 10)\eta(t-4)$. Разложим функцию $u(t) = (\dfrac{t^2}{2} - 4t + 10)$ по степеням (t-4), пользуясь формулой Тейлора (t_0=4): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\dfrac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t) = t-4$, $u''(t) = 1$, $u'(4) = 0$, u(4)=2. Тогда $u(t)=2+(t-4)^2/2$. Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-4)=[2+(t-4)^2/2]\cdot\eta(t-4)$. По таблице $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$ и $t^2\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-4) \risingdotseq \dfrac{e^{-4p}}{p}$ и $(t-4)^2\cdot\eta(t-4) \risingdotseq \dfrac{2e^{-4p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$f(t) \risingdotseq \dfrac{2e^{-4p}}{p} + \dfrac{2e^{-4p}}{2p^3} = (\dfrac{2}{p} + \dfrac{1}{p^3})\cdot e^{-4p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq (\frac{2}{p} + \frac{1}{p^3}) \cdot e^{-4p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p) = \frac{4e^{-p}}{(p-3)^4}.$$

РЕШЕНИЕ

По таблице $\frac{1}{p^4} \risingdotseq \frac{t^3}{6}$. Тогда на основании теоремы смещения $\frac{1}{(p-3)^4} \risingdotseq \frac{t^3}{6} e^{3t}$. Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим: $\frac{4e^{-p}}{(p-3)^4} \risingdotseq \frac{2(t-1)^3}{3} e^{3(t-1)} \eta(t-1)$.

ОТВЕТ: $\frac{4e^{-p}}{(p-3)^4} \risingdotseq \frac{2}{3}(t-1)^3 e^{3(t-1)} \eta(t-1)$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p) = \frac{1}{p^3 - 4p^2 + 5p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p) \cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2\text{-}4p+5)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=2\text{-}i$, $p_3=2+i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом $\Phi(p)$, то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0} \Phi(p) = \frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)= p(p^2\text{-}4p+5)$ и $\psi'(p) = 3p^2 - 8p + 5$. Следовательно,

$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p) \cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{1}{5}$, $\operatorname*{res}_{p=2-i}[F(p) \cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(2-i)}{\psi'(2-i)} = \frac{e^{(2-i)t}}{3(2-i)^2 - 8(2-i) + 5} = -\frac{e^{(2-i)t}}{2(1+2i)}$,

$\operatorname*{res}_{p=2+i}[F(p) \cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(2+i)}{\psi'(2+i)} = \frac{e^{(2+i)t}}{3(2+i)^2 - 8(2+i) + 5} = -\frac{e^{(2+i)t}}{2(1-2i)}$. Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p) \cdot e^{pt}] + \operatorname*{res}_{p=2-i}[F(p) \cdot e^{pt}] + \operatorname*{res}_{p=2+i}[F(p) \cdot e^{pt}] = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}(\frac{e^{-it}}{1+2i} + \frac{e^{it}}{1-2i})e^{2t} =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\frac{e^{-it}(1-2i) + e^{it}(1+2i)}{5} \cdot e^{2t} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(\mathrm{ch}(it) + 2i \cdot \mathrm{sh}(it)) \cdot e^{2t}] =$$

$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(\cos t - 2\sin t) \cdot e^{2t}$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=–i·sh(it).

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^3 - 4p^2 + 5p} \risingdotseq \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(\cos t - 2\sin t) \cdot e^{2t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{-4}{p^2(p^2-p-2)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p^2(p^2-p-2)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=2$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{-4}{p^2(p^2-p-2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-4}{p^2(p^2-p-2)}=\frac{Ap(p+1)(p-2)+B(p+1)(p-2)+Cp^2(p-2)+Dp^2(p+1)}{p^2(p+1)(p-2)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p+1)(p-2)+$ $+B(p+1)(p-2)+Cp^2(p-2)+Dp^2(p+1)=-4$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая p=0, получим B=2, при p=-1 получим C=4/3, при p=2 находим D=-1/3. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: A+C+D=0 или A=-(C+D)=-(4/3-1/3)=-1. Таким образом,

$$\frac{-4}{p^2(p^2-p-2)}=-\frac{1}{p}+2\frac{1}{p^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-2}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{-4}{p^2(p^2-p-2)}\fallingdotseq 2t-1+\frac{4}{3}\cdot e^{-t}-\frac{1}{3}\cdot e^{2t}.$$

ОТВЕТ: $\dfrac{-4}{p^2(p^2-p-2)}\fallingdotseq 2t-1+\dfrac{4}{3}\cdot e^{-t}-\dfrac{1}{3}\cdot e^{2t}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''+12x'+36x=e^{-3t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$**;** **12.** $x''+25x=5\cos 5t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-4$**.**

РЕШЕНИЯ.

11.. $x''+12x'+36x=e^{-3t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$**.** Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\fallingdotseq X(p)$, то $x'(t)\fallingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\fallingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1$. По таблице $e^{-3t}\fallingdotseq\dfrac{1}{p+3}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p)+12pX(p)+36X(p)+1=\dfrac{1}{p+3}$ или $X(p)[p^2+12p+36]=\dfrac{1}{p+3}-1$. Тогда

$X(p)=\dfrac{-p-2}{(p+3)[p^2+12p+36]}=\dfrac{-p-2}{(p+3)(p+6)^2}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\dfrac{-p-2}{(p+3)(p+6)^2}=\dfrac{A}{p+3}+\dfrac{B}{p+6}+\dfrac{C}{(p+6)^2}$. Отсюда $-p-2=A(p+6)^2+B(p+6)(p+3)+C(p+3)$. Если p=-3,

то $A=\dfrac{1}{9}$, при $p=-6$ получим $C=-\dfrac{4}{3}$.. Для определения B приравняем коэффициенты при

p^2: A+B=0. Отсюда $B=-A=-\dfrac{1}{9}$. Таким образом, $X(p)=\dfrac{1}{9(p+3)}-\dfrac{1}{9(p+6)}-\dfrac{4}{3(p+6)^2}$.

Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим:

$x(t)=\frac{1}{9}e^{-3t}-\frac{1}{9}e^{-6t}-\frac{4}{3}te^{-6t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{1}{9}e^{-3t}-\frac{1}{9}(1+12t)e^{-6t}$.

12. $x''+25x=5\cos 5t, \quad x(0)=0,\ x'(0)=-4$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+4$. По таблице $5\cos 5t \risingdotseq \frac{5p}{p^2+25}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+25X(p)+4=\frac{5p}{p^2+25}$ или $X(p)[p^2+25]=\frac{5p}{p^2+25}-4$. Тогда

$X(p)=\frac{5p}{(p^2+25)^2}-\frac{4}{p^2+25}$.

Или $X(p)=-\frac{4}{5}\frac{5}{p^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{5}{p^2+25}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t)=-\frac{4}{5}\sin 5t+\frac{1}{2}t\cdot\sin 5t=(\frac{1}{2}t-\frac{4}{5})\sin 5t$.

ОТВЕТ: $x(t)=(\frac{1}{2}t-\frac{4}{5})\sin 5t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x'+2x+2y=2e^t \\ y'+x+y=e^{2t} \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\risingdotseq pX(p)$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^t\risingdotseq\frac{1}{p-1}$, $e^{2t}\risingdotseq\frac{1}{p-2}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+2]+2Y(p)=\frac{2}{p-1} \\ X(p)+Y(p)[p+1]=\frac{1}{p-2} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p+1, а второе – на 2, и вычтем второе уравнение из первого. Получим:

$X(p)[p+1](p+2)-2X(p)=\frac{2(p+1)}{p-1}-\frac{2}{p-2}=\frac{2(p^2-p-2)-2p+2}{(p-2)(p-1)}$ или $p(p+3)X(p)=\frac{2(p^2-2p-1)}{(p-2)(p-1)}$. Тогда

$X(p)=\frac{2(p^2-2p-1)}{p(p-2)(p-1)(p+3)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{2(p^2-2p-1)}{p(p-2)(p-1)(p+3)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+3}=\frac{A(p-1)(p-2)(p+3)+Bp(p+3)(p-2)+Cp(p+3)(p-1)+Dp(p-2)(p-1)}{p(p-1)(p-2)(p+3)}.$$

Приравняем числители:

$A(p-1)(p-2)(p+3)+Bp(p+3)(p-2)+Cp(p+3)(p-1)+Dp(p-2)(p-1)=2(p^2-2p-1)$. Полагая p=0, находим A=-1/3, при p=1 получим B=1, при p=2 находим C=-1/5, при p=-3 находим D=-7/15. Таким образом, $X(p)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{p+3}$. Следовательно,

$x(t)=-\frac{1}{3}+e^t-\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{7}{15}e^{-3t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t)=e^t-\frac{1}{2}x'(t)-x(t)$,

т.е. $y(t)=e^t-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+e^t-\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{7}{15}e^{-3t}\right)'+\frac{1}{3}-e^t+\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{7}{15}e^{-3t}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^t+\frac{2}{5}e^{2t}-\frac{7}{30}e^{-3t}$.

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=-\frac{1}{3}+e^t-\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{7}{15}e^{-3t} \\ y(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^t+\frac{2}{5}e^{2t}-\frac{7}{30}e^{-3t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$L_1=L_2=2,\ R_1=0,\ R_2=1,\ M=\sqrt{3};\qquad u(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ e^{1-t}, & t\ge 1 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\frac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\frac{di_1}{dt}+\sqrt{3}\frac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\frac{di_2}{dt}+i_2+\sqrt{3}\frac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть $u(t)≓U(p)$, $i_1(t)≓I_1(p)$ и $i_2(t)≓I_2(p)$. Тогда $\frac{di_1}{dt}≓pI_1(p)$ и $\frac{di_2}{dt}≓pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений

$\begin{cases} 2pI_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+I_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой

$\eta(t)≓\frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+\sqrt{3}pX_2(p)=\frac{1}{p} \\ 2pX_2(p)+X_2(p)+\sqrt{3}pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p-\frac{3p^2}{2p+1}]=\frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{4p^2+2p-3p^2}{2p+1}=\frac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\frac{2p+1}{p^2(p+2)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\frac{2p+1}{p^2(p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+2}=\frac{Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2}{p^2(p+2)}$. Приравняем числители:

$Ap(p+2)+B(p+2)+Cp^2=2p+1$. Полагая p=0, находим B=1/2, при $p=-2$ получим $C=-\frac{3}{4}$.

Приравнивая коэффициенты при p^2, получим A+C=0, т.е. A=3/4. Таким образом,

$X_1(p)=\frac{3}{4}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}$. Следовательно, $x_1(t)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}e^{-2t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t) = \int\limits_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t) = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}e^{-2t}\right)' = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}$, то при $t<1$ $\quad i_1(t) = \int\limits_0^t \tau\cdot(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau =$

$= \left(\frac{\tau^2}{4}+\frac{3}{2}e^{-2t}(\frac{\tau}{2}-\frac{1}{4})e^{2\tau}\right)\Bigg|_0^t = \frac{3}{4}t+\frac{t^2}{4}-\frac{3}{8}(1-e^{-2t})$. При $t\geq 1$ получим:

$$i_1(t) = \int\limits_0^1 \tau\cdot(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau + \int\limits_1^t e^{1-\tau}\cdot(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)})d\tau = \left(\frac{\tau^2}{4}+\frac{3}{2}e^{-2t}(\frac{\tau}{2}-\frac{1}{4})e^{2\tau}\right)\Bigg|_0^1 +$$

$$+\left(\frac{1}{2}(-e^{1-\tau})+\frac{3}{2}e^{-2t+1}e^{\tau}\right)\Bigg|_1^t = \frac{1}{4}+\frac{3}{8}e^{-2t+2}+\frac{3}{8}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{1-t}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-t+1}-\frac{3}{2}e^{-2t+2} = \frac{3}{4}+e^{1-t}-\frac{3}{8}(3e^2-1)e^{-2t}.$$

Найдём $x_2(t)$:

$$X_2(p) = -\frac{\sqrt{3}pX_1(p)}{2p+1} = -\frac{\sqrt{3}p}{2p+1}\cdot\frac{2p+1}{p^2(p+2)} = -\frac{\sqrt{3}}{p(p+2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+2}),\ \text{т.е.}\ x_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2t}).$$

Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t) = \int\limits_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2t}\right)' = -\sqrt{3}e^{-2t}$, то при $t<1$

$$i_2(t) = -\int\limits_0^t \tau\cdot\sqrt{3}e^{-2(t-\tau)})d\tau = -\sqrt{3}e^{-2t}\int\limits_0^t \tau e^{2\tau}d\tau = -\sqrt{3}e^{-2t}(\frac{\tau}{2}-\frac{1}{4})e^{2\tau}\Bigg|_0^t = -\sqrt{3}e^{-2t}[(\frac{t}{2}-\frac{1}{4})e^{2t}+\frac{1}{4}] =$$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(1-e^{-2t})-\frac{\sqrt{3}}{2}t$. При $t\geq 1$ $\; i_2(t) = -\sqrt{3}e^{-2t}\int\limits_0^1 \tau\cdot e^{2\tau}d\tau - \sqrt{3}e^{-2t+1}\int\limits_0^1 e^{-\tau}\cdot e^{2\tau}d\tau = -\sqrt{3}e^{-2t}(\frac{\tau}{2}-\frac{1}{4})e^{2\tau}\Bigg|_0^1 -$

$$-\sqrt{3}e^{-2t+1}\cdot e^{\tau}\Big|_1^t = \frac{\sqrt{3}}{4}(3e^2-1)e^{-2t}-\sqrt{3}e^{1-t}$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t) = \frac{3}{4}t+\frac{t^2}{4}-\frac{3}{8}(1-e^{-2t}) \\ i_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-e^{-2t})-\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ при $t<1$ $\quad \begin{cases} i_1(t) = \frac{3}{4}+e^{1-t}-\frac{3}{8}(3e^2-1)e^{-2t} \\ i_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3e^2-1)e^{-2t}-\sqrt{3}e^{1-t} \end{cases}$ при $t\geq 1$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:

$2tx''+(3t+2)x'-2(t-2)x = 0,\ x(0)=1,\ x'(0)=-2.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0) = pX(p)-1,\quad x''(t) \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0) = p^2X(p)-p+2$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t) \risingdotseq -\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{pX-1\} = -(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx'' \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2X-p+2\} = -(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-1)$. Учитывая это, получаем операторное уравнение: $-2(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-1)+2pX-2-3(X+p\frac{dX}{dp})+2\frac{dX}{dp}+4X=0$. Или $(-2p^2-3p+2)\frac{dX}{dp}-(2p-1)X = -(p+2)(2p-1)\frac{dX}{dp}-(2p-1)X=0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$(p+2)\frac{dX}{dp}+X=0;\quad \frac{dX}{X}=-\frac{dp}{p+2};\quad \ln|X|=-\ln|p+2|+\ln C;\quad X(p)=\frac{C}{p+2}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t)=C\cdot e^{-2t}$. Так как x(0)=1, то C=1. Окончательно, $x(t)=e^{-2t}$

ОТВЕТ: $x(t)=e^{-2t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x>0,\ t>0) \quad u|_{t=0}=0, u|_{x=0}=a\sin\varpi t.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p)-u(x,0)=pU(x,p)$. Запишем операторное уравнение:

$k\frac{d^2U}{dx^2}=pU$ или $k\frac{d^2U}{dx^2}-pU=0$. Это линейное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $kr^2-p=0$ имеет корни $r_1=-\sqrt{\frac{p}{k}},\ r_1=\sqrt{\frac{p}{k}}$. Следовательно, решением уравнения будет $U(x,p)=C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}+C_2e^{\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p)\to 0$ при $p\to\infty$. Это возможно только тогда, когда C_2=0. Таким образом, $U(x,p)=C_1e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)|_{x=0}=\frac{a\omega}{p^2+\omega^2}$, найдём $C_1=\frac{ap}{p^2+\omega^2}$.

Следовательно, $U(x,p)=\frac{a\omega}{p^2+\omega^2}e^{-\sqrt{\frac{p}{k}}\cdot x}$. Для нахождения оригинала функции воспользуемся соотношением $e^{-b\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{b^2}{4t}}$. В данном случае $U(x,p)=\frac{ap}{p^2+\omega^2}\cdot e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{p}}$, где $\frac{ap}{p^2+\omega^2} \risingdotseq a\sin\omega t$ а $e^{-\frac{x}{\sqrt{k}}\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{x}{2\sqrt{k\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$. Следовательно, функция u(x,t) будет свёрткой этих двух функций $u(x,t)=\frac{ax}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\frac{1}{\sqrt{\tau^3}}e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}d\tau$.

ОТВЕТ: $u(x,t)=\frac{ax}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\frac{1}{\sqrt{\tau^3}}e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}d\tau$ (интеграл не берётся).