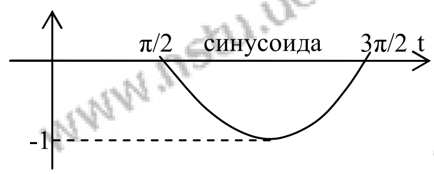
ВАРИАНТ 6
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\cos 2t\cdot\cos 3t$; **2)** $f(t)=e^{2t}\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t^3e^{-3t}dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-7)\cos 4(t-7)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^3\operatorname{ch}9\tau d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(t^2-6t)\eta(t-3)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\cos 2t\cdot\cos 3t.$ Используем тригонометрическую формулу. Имеем:
$\cos 2t\cdot\cos 3t=\frac{1}{2}(\cos t+\cos 5t).$ По таблицам, $\cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}$ и $\cos 5t\risingdotseq\frac{p}{p^2+25}$. Далее, в силу свойства линейности, $\cos 2t\cdot\cos 3t\risingdotseq\frac{1}{2}(\frac{p}{p^2+1}+\frac{p}{p^2+25})=\frac{p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\cos 2t\cdot\cos 3t\risingdotseq\frac{p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

2) $f(t)=e^{2t}\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t.$ По таблице находим $\operatorname{ch}t\risingdotseq\frac{p}{p^2-1}$ и $\operatorname{sh}t\risingdotseq\frac{1}{p^2-1}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{2t}\operatorname{ch}t\risingdotseq\frac{p-2}{(p-2)^2-1}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{2t}\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t\risingdotseq\frac{p-2}{(p-2)^2-1}+\frac{1}{p^2-1}=\frac{p^3-2p^2-p+2+p^2-4p+4-1}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}=\frac{p^3-p^2-5p+5}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{2t}\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t\risingdotseq\frac{p^3-p^2-5p+5}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t^3e^{-3t}dt.$ По таблице находим $t^3\risingdotseq\frac{3!}{p^4}$. Применяя теорему смещения, получим:

$t^3e^{-3t}\risingdotseq\frac{6}{(p+3)^4}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int\limits_0^t t^3e^{-3t}dt\risingdotseq\frac{6}{p(p+3)^4}.$$

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^3e^{-3t}dt\risingdotseq\frac{6}{p(p+3)^4}$.

4) $f(t)=\eta(t-7)\cos 4(t-7).$ По таблице $\cos 4t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{p}{p^2+16}$. Согласно теореме запаздывания

$$\eta(t-7)\cdot\cos 4(t-7)\risingdotseq\frac{pe^{-7p}}{p^2+16}.$$

ОТВЕТ: $\eta(t-7)\cdot\cos 4(t-7) \risingdotseq \frac{pe^{-7p}}{p^2+16}$.

5) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{ch}9\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^3 и ch9t. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^3 \risingdotseq \frac{3!}{p^4}$ и $\operatorname{ch}9t \risingdotseq \frac{p}{p^2-81}$. Следовательно, $\int\limits_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{ch}9\tau d\tau \risingdotseq \frac{6}{p^3(p^2-81)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{ch}9\tau d\tau \risingdotseq \frac{6}{p^3(p^2-81)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<\pi/2, \\ -\sin(t-\pi/2), & \pi/2 \le t < 3\pi/2, \\ 0, & t \ge 3\pi/2. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=-\sin(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)-\sin(t-3\pi/2)\cdot\eta(t-3\pi/2)$. Так как $\sin(t-3\pi/2)=\sin(t-\pi/2-\pi)=-\sin(t-\pi/2)$, то начиная с момента $t=3\pi/2$ синусоиды уничтожаются. По таблице $\sin t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$. Согласно теореме запаздывания

$\sin(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$ и $\sin(t-3\pi/2)\cdot\eta(t-3\pi/2) \risingdotseq \frac{e^{-\frac{3\pi}{2}p}}{p^2+1}$. По свойству линейности

получим: $f(t) \risingdotseq -\frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}-\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}p}}{p^2+1}=-\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq -\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}$.

7) $f(t)=(t^2-6t)\eta(t-3)$. Разложим функцию $u(t)=t^2-6t$ по степеням (t-3), пользуясь формулой Тейлора (t_0=3): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=2t-6$, $u''(t)=2$, $u'(3)=0$, u(3)=-9. Тогда $u(t)=-9+(t-3)^2$. Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-3)=[-9+(t-3)^2]\cdot\eta(t-3)$. По таблице $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$ и $t^2\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p}$ и $(t-3)^2\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{2e^{-3p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$f(t) \risingdotseq \frac{-9e^{-3p}}{p}+\frac{2e^{-3p}}{p^3}=(\frac{2}{p^3}-\frac{9}{p})\cdot e^{-3p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq (\frac{2}{p^3}-\frac{9}{p})\cdot e^{-3p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{3e^{-2(p-1)}}{(p-1)^3}.$$

РЕШЕНИЕ

Преобразуем функцию $F(p)=\frac{3e^{-2(p-1)}}{(p-1)^3}=\frac{3e^{-2p}}{(p-1)^3}e^2$. По таблице $\frac{1}{p^3}\risingdotseq\frac{t^2}{2}$. Тогда на основании теоремы смещения $\frac{1}{(p-1)^3}\risingdotseq\frac{t^2}{2}e^t$. Применяя теорему запаздывания и свойство линейности, получим: $\frac{3e^{-2(p-1)}}{(p-1)^3}\risingdotseq\frac{3(t-2)^2}{2}e^{t-2}\cdot e^2\eta(t-2)=\frac{3(t-2)^2}{2}e^t\eta(t-2)$.

ОТВЕТ: $\frac{3e^{-2(p-1)}}{(p-1)^3}\risingdotseq\frac{3}{2}(t-2)^2e^t\eta(t-2)$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+4p^2+5p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+4p+5)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-2-i$, $p_3=-2+i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2+4p+5)$ и $\psi'(p)=3p^2+8p+5$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{5},\quad \operatorname*{res}_{p=-2-i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-2-i)}{\psi'(-2-i)}=\frac{e^{(-2-i)t}}{3(-2-i)^2+8(-2-i)+5}=-\frac{e^{(-2-i)t}}{2(1-2i)},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-2+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-2+i)}{\psi'(-2+i)}=\frac{e^{(-2+i)t}}{3(-2+i)^2+8(-2+i)+5}=-\frac{e^{(-2+i)t}}{2(1+2i)}.$$ Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=-2-i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=-2+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-it}}{1-2i}+\frac{e^{it}}{1+2i}\right)e^{-2t}=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\frac{e^{-it}(1+2i)+e^{it}(1-2i)}{5}\cdot e^{-2t}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}(\mathrm{ch}(it)-2i\cdot\mathrm{sh}(it))\cdot e^{-2t}]=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}(\cos t+2\sin t)\cdot e^{-2t}.$$ Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^3+4p^2+5p}\risingdotseq\frac{1}{5}-\frac{1}{5}(\cos t+2\sin t)\cdot e^{-2t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+2p-15)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p^2(p^2+2p-15)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=3$, $p_3=-5$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{1}{p^2(p^2+2p-15)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{p+5}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{1}{p^2(p^2+2p-15)}=\frac{Ap(p-3)(p+5)+B(p-3)(p+5)+Cp^2(p+5)+Dp^2(p-3)}{p^2(p-3)(p+5)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p-3)(p+5)+$ $+B(p-3)(p+5)+Cp^2(p+5)+Dp^2(p-3)=1$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая p=0, получим B=-1/15, при p=3 получим C=1/72, при p=-5 находим D=-1/200. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: A+C+D=0 или A=-(C+D)=-(1/72-1/200)=-2/225. Таким образом,

$$\frac{1}{p^2(p^2+2p-15)}=-\frac{2}{225}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{1}{200}\cdot\frac{1}{p+5}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{1}{p^2(p^2+2p-15)}\fallingdotseq\frac{-2-15t}{225}+\frac{1}{72}\cdot e^{3t}-\frac{1}{200}\cdot e^{-5t}.$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^2(p^2+2p-15)}\fallingdotseq\frac{-2-15t}{225}+\frac{1}{72}\cdot e^{3t}-\frac{1}{200}\cdot e^{-5t}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-10x'+25x=-2e^{-5t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$; **12.** $x''+16x=4\cos 4t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$.

РЕШЕНИЯ.

11.. $x''-10x'+25x=-2e^{-5t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\fallingdotseq X(p)$, то $x'(t)\fallingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\fallingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-1$. По таблице $-2e^{-5t}\fallingdotseq\frac{-2}{p+5}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)-10pX(p)+25X(p)-1=\frac{-2}{p+5}$ или $X(p)[p^2+10p+25]=\frac{-2}{p+5}+1$. Тогда

$X(p)=\frac{p+3}{(p+5)[p^2-10p+25]}=\frac{p+3}{(p+5)(p-5)^2}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{p+3}{(p+5)(p-5)^2}=\frac{A}{p+5}+\frac{B}{p-5}+\frac{C}{(p-5)^2}$. Отсюда $p+3=A(p-5)^2+B(p+5)(p-5)+C(p+5)$. Если p=-5, то $A=-\frac{}{50}$, при $p=5$ получим $C=\frac{4}{5}$. . Для определения B приравняем коэффициенты при p^2: A+B=0. Отсюда $B=-A=\frac{1}{50}$. Таким образом,

$X(p) = -\frac{1}{50(p+5)} - \frac{1}{50(p-5)} + \frac{4}{5(p-5)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t) = -\frac{1}{50}e^{-5t} + \frac{1}{50}e^{5t} + \frac{4}{5}te^{5t} = \frac{1}{50}(40t+1)e^{5t} - \frac{1}{50}e^{-5t}$.

ОТВЕТ: $x(t) = \frac{1}{50}(40t+1)e^{5t} - \frac{1}{50}e^{-5t}$.

12. $x'' + 16x = 4\cos 4t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 1$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1$. По таблице $4\cos 4t \risingdotseq \frac{4p}{p^2+16}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p) + 16X(p) - 1 = \frac{4p}{p^2+16}$ или $X(p)[p^2+16] = \frac{4p}{p^2+16} + 1$. Тогда

$X(p) = \frac{4p}{(p^2+16)^2} + \frac{1}{p^2+16}$.

Или $X(p) = \frac{1}{4}\frac{4}{p^2+16} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{4}{p^2+16}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t) = \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{2}t\cdot\sin 4t = \frac{1}{4}(2t+1)\sin 4t$.

ОТВЕТ: $x(t) = \frac{1}{4}(2t+1)\sin 4t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x' - x - y = -e^t \\ y' - 2x - 2y = e^{4t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$, $e^{4t} \risingdotseq \frac{1}{p-4}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p-1] - Y(p) = -\frac{1}{p-1} \\ -2X(p) + Y(p)[p-2] = \frac{1}{p-4} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p-2 и прибавим второе уравнение. Получим:

$X(p)[p-1](p-2) - 2X(p) = -\frac{p-2}{p-1} + \frac{1}{p-4} = \frac{-p^2+6p-8+p-1}{(p-4)(p-1)}$ или $p(p-3)X(p) = \frac{-(p^2-7p+9)}{(p-4)(p-1)}$. Тогда

$X(p) = \frac{-(p^2-7p+9)}{p(p-4)(p-1)(p-3)}$. Разложим правую часть на простые множители: $\frac{-(p^2-7p+9)}{p(p-4)(p-1)(p-3)} =$

$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-4} + \frac{D}{p-3} = \frac{A(p-1)(p-4)(p-3) + Bp(p-3)(p-4) + Cp(p-3)(p-1) + Dp(p-4)(p-1)}{p(p-1)(p-4)(p-3)}$.

Приравняем числители:

$A(p-1)(p-4)(p-3) + Bp(p-3)(p-4) + Cp(p-3)(p-1) + Dp(p-4)(p-1) = -(p^2-7p+9)$. Полагая p=0, находим A=3/4, при p=1 получим B=-1/2, при p=4 находим C=1/4, при p=3 находим D=-

1/2. Таким образом, $X(p)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3}$. Следовательно,

$x(t)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{4}e^{4t}-\frac{1}{2}e^{3t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t)=e^{t}+x'(t)-x(t)$, т.е.

$$y(t)=e^{t}+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{4}e^{4t}-\frac{1}{2}e^{3t}\right)'-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{4}e^{4t}+\frac{1}{2}e^{3t}=-\frac{3}{4}+e^{t}+\frac{3}{4}e^{4t}-e^{-3t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{4}e^{4t}-\frac{1}{2}e^{3t} \\ y(t)=-\frac{3}{4}+e^{t}+\frac{3}{4}e^{4t}-e^{-3t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ *и* $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=0,\ M=\sqrt{3};\qquad u(t)=\begin{cases}10t, & 0\le t<2\\ 20, & t\ge 2\end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\frac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\frac{di_1}{dt}+10i_1+\sqrt{3}\frac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\frac{di_2}{dt}+\sqrt{3}\frac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть u(t)≕U(p),

$i_1(t)$≕$I_1(p)$ и $i_2(t)$≕$I_2(p)$. Тогда $\frac{di_1}{dt}$≕$pI_1(p)$ и $\frac{di_2}{dt}$≕$pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+10I_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой η(t)≕$\frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+10X_1(p)+\sqrt{3}pX_2(p)=\frac{1}{p} \\ 2pX_2(p)+\sqrt{3}pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p+10-\frac{3p}{2}]=\frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{p+20}{2}=\frac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\frac{2}{p(p+20)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\frac{2}{p(p+20)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+20}=\frac{A(p+20)+Bp}{p(p+20)}$. Приравняем числители: $A(p+20)+Bp=2$. Полагая p=0, находим $A=\frac{1}{10}$, при $p=-20$ получим $B=-\frac{1}{10}$. Таким образом, $X_1(p)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20}$.

Следовательно, $x_1(t)=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-20t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-20t}\right)'=2e^{-20t}$, то при $t<2$ $\quad i_1(t)=\int_0^t 10\tau\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau = 20e^{-20t}\cdot(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^t =$

$= e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_0^t = t-\frac{1}{20}+\frac{1}{20}e^{-20t} = t-\frac{1}{20}(1-e^{-20t})$.

. При $t\geq 2$ получим: $i_1(t)=\int_0^2 10\tau\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau+\int_2^t 20\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau = e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_0^2 + 2e^{-20(t-\tau)}\Big|_2^t =$

$= 2e^{-20t+40}-\frac{1}{20}e^{-20t+40}+\frac{1}{20}e^{-20t}+2-2e^{-20t+40} = 2+\frac{1}{20}(1-e^{40})e^{-20t}$.

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20})$, т.е. $x_2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t)=\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_2'(t)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}\right)'=-\sqrt{3}e^{-20t}$, то при $t<2$

$i_2(t)=-\int_0^t 10\tau\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau = -10\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^t \tau e^{20\tau}d\tau = -10\sqrt{3}e^{-20t}(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^t = -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-20t}[(t-\frac{1}{20})e^{20t}+\frac{1}{20}] =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{40}(1-e^{-20t})-\frac{\sqrt{3}}{2}t$. При $t\geq 2$

$i_2(t)=-\int_0^2 10\tau\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau-\int_2^t 20\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau = -10\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^t \tau e^{20\tau}d\tau-20\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^t e^{20\tau}d\tau =$

$= -10\sqrt{3}e^{-20t}(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^2-\sqrt{3}e^{-20t}e^{20\tau}\Big|_2^t = -\sqrt{3}e^{-20t+40}+\frac{\sqrt{3}}{40}e^{-20t+40}-\frac{\sqrt{3}}{40}e^{-20t}-\sqrt{3}+\sqrt{3}e^{-20t+40} =$

$= -\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{40}(1-e^{40})e^{-20t}$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=t-\frac{1}{20}(1-e^{-20t}) \\ i_2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{40}(1-e^{-20t}) \end{cases}$ при $0\leq t<2$ и $\begin{cases} i_1(t)=2+\frac{1}{20}(1-e^{40})e^{-20t} \\ i_2(t)=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{40}(1-e^{40})e^{-20t} \end{cases}$ при $t\geq 2$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:

$3tx''+(10t+3)x'-4(2t-3)x=0,\ x(0)=\frac{1}{2},\ x'(0)=-2.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\fallingdotseq X(p)$, то $x'(t)\fallingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-\frac{1}{2}$, $x''(t)\fallingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-\frac{1}{2}p+2$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\fallingdotseq-\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\fallingdotseq-\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\fallingdotseq-\frac{d}{dp}\{pX-\frac{1}{2}\}=-(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\fallingdotseq-\frac{d}{dp}\{p^2X-\frac{1}{2}p+2\}=-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-\frac{1}{2})$. Учитывая это, получаем операторное уравнение: $-3(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-\frac{1}{2})+3pX-\frac{3}{2}-10(X+p\frac{dX}{dp})+8\frac{dX}{dp}+12X=0$. Или $(-3p^2-10p+8)\frac{dX}{dp}-(3p-2)X=-(p+4)(3p-2)\frac{dX}{dp}-(3p-2)X=0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$(p+4)\frac{dX}{dp}+X=0;\quad \frac{dX}{X}=-\frac{dp}{p+4};\quad \ln|X|=-\ln|p+4|+\ln C;\quad X(p)=\frac{C}{p+4}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t)=C\cdot e^{-4t}$. Так как x(0)=1/2, то C=1/2. Окончательно, $x(t)=\frac{1}{2}e^{-4t}$

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{1}{2}e^{-4t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=x+y,\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=1.$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y)\fallingdotseq U(x,p)$. Тогда $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\fallingdotseq pU(x,p)-u(x,0)=pU(x,p)-1$. Запишем операторное уравнение:

$\frac{dU}{dx}+pU-1=\frac{x}{p}+\frac{1}{p^2}$ или $\frac{dU}{dx}+pU=\frac{x}{p}+\frac{1}{p^2}+1$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(x,p)=C(x,p)e^{-px}$, где C(x,p) – функция, определяемая из уравнения $C'(x,p)e^{-px}=\frac{x}{p}+\frac{1}{p^2}+1$, т.е. $C(x,p)=\int(\frac{x}{p}+\frac{1}{p^2}+1)e^{px}dx=(\frac{x}{p^2}+\frac{1}{p})e^{px}+C_1$. Следовательно, решением уравнения будет $U(x,p)=C(x,p)e^{-px}=[(\frac{x}{p^2}+\frac{1}{p})e^{px}+C_1]e^{-px}=\frac{x}{p^2}+\frac{1}{p}+C_1e^{-px}$.

Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{1}{p}$, найдём $C_1=0$. Следовательно,

$U(x,p)=\frac{x}{p^2}+\frac{1}{p}$. Оригинал функции находим по таблицам: $u(x,y)=xy+1$.

ОТВЕТ: $u(x,t)=xy+1$