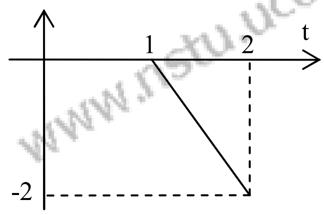
ВАРИАНТ 7
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\cos t\cdot\cos 2t$; **2)** $f(t)=e^{-2t}\operatorname{sh}2t-\operatorname{ch}2t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t\sin^2 t\,dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-7)\sin 4(t-7)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t e^{3(t-\tau)}\tau^2\,d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(t^2+16)\eta(t-4)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\cos t\cdot\cos 2t.$ Используем тригонометрическую формулу. Имеем:
$\cos t\cdot\cos 2t=\frac{1}{2}(\cos t+\cos 3t).$ По таблицам, $\cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}$ и $\cos 3t\risingdotseq\frac{p}{p^2+9}$. Далее, в силу свойства линейности, $\cos t\cdot\cos 2t\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}+\frac{p}{p^2+9}\right)=\frac{p(p^2+5)}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\cos t\cdot\cos 2t\risingdotseq\frac{p(p^2+5)}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

2) $f(t)=e^{-2t}\operatorname{sh}2t-\operatorname{ch}2t.$ По таблице находим $\operatorname{ch}2t\risingdotseq\frac{p}{p^2-4}$ и $\operatorname{sh}2t\risingdotseq\frac{2}{p^2-4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-2t}\operatorname{sh}2t\risingdotseq\frac{2}{(p+2)^2-4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{-2t}\text{sh}2t\text{-ch}2t\risingdotseq\frac{2}{(p+2)^2-4}-\frac{p}{p^2-4}=\frac{2p^2-8-p^3-4p^2-4p+4p}{[(p+2)^2-4](p^2-4)}=\frac{-p^3-2p^2-8}{[(p+2)^2-4](p^2-4)}.$$

ОТВЕТ: $e^{-2t}\text{sh}2t\text{-ch}2t\risingdotseq\frac{-p^3-2p^2-8}{[(p+2)^2-4](p^2-4)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t\sin^2 t\,dt.$. Преобразуем подынтегральную функцию:
$t\sin^2 t=\frac{t}{2}(1-\cos 2t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}t\cos 2t$. По таблице находим $\cos 2t\risingdotseq\frac{p}{p^2+4}$. Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+4}\right)\risingdotseq-t\cdot\cos 2t$. Следовательно,
$t\cdot\cos 2t\risingdotseq-\frac{p^2+4-2p^2}{(p^2+4)^2}=\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$. Так как $t\risingdotseq\frac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$$\frac{t}{2}-\frac{1}{2}t\cos 2t\risingdotseq\frac{1}{2p^2}-\frac{p^2-4}{2(p^2+4)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p^2+4)^2-p^2(p^2-4)}{p^2(p^2+4)^2}=\frac{6p^2+8}{p^2(p^2+4)^2}=\frac{2(3p^2+4)}{p^2(p^2+4)^2}.$$

По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int_0^t t\sin^2 t d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{2(3p^2+4)}{p^2(p^2+4)^2}=\frac{2(3p^2+4)}{p^3(p^2+4)^2}.$$

ОТВЕТ: $\int_0^t t\sin^2 t d\tau \risingdotseq \frac{2(3p^2+4)}{p^3(p^2+4)^2}$.

4) $f(t)=\eta(t-7)\sin 4(t-7)$. По таблице $\sin 4t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{4}{p^2+16}$. Согласно теореме запаздывания

$\eta(t-7)\cdot\sin 4(t-7) \risingdotseq \frac{4e^{-7p}}{p^2+16}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-7)\cdot\sin 4(t-7) \risingdotseq \frac{4e^{-7p}}{p^2+16}$.

5) $f(t)=\int_0^t e^{3(t-\tau)}\tau^2 d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^2 и e^{3t}. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$ и $e^{3t} \risingdotseq \frac{1}{p-3}$. Следовательно, $\int_0^t e^{3(t-\tau)}\tau^2 d\tau \risingdotseq \frac{2}{p^3(p-3)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t e^{3(t-\tau)}\tau^2 d\tau \risingdotseq \frac{2}{p^3(p-3)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ -2(t-1), & 1\le t<2,\\ 0, & t\ge 2.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=-2(t-1)\cdot\eta(t-1)+2(t-2)\cdot\eta(t-2)+2\eta(t-2)$. Так как $-2(t-1)=-2(t-2)-2$, то начиная с момента t=2 функция становится равной нулю. По таблице $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$. Согласно теореме запаздывания $(t-1)\cdot\eta(t-1) \risingdotseq \frac{e^{-p}}{p^2}$, $(t-2)\cdot\eta(t-2) \risingdotseq \frac{e^{-2p}}{p^2}$ и $\eta(t-2) \risingdotseq \frac{e^{-2p}}{p}$. По свойству линейности получим:

$$f(t) \risingdotseq -\frac{2e^{-p}}{p^2}+\frac{2e^{-2p}}{p^2}+\frac{2e^{-2p}}{p}=2\frac{(1+p)e^{-p}-1}{p^2}\cdot e^{-p}.$$

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq 2\frac{(1+p)e^{-p}-1}{p^2}\cdot e^{-p}$.

7) $f(t)=(t^2+16)\eta(t-4)$. Разложим функцию $u(t)=t^2+16$ по степеням (t-4), пользуясь формулой Тейлора ($t_0=4$): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=2t$, $u''(t)=2$, $u'(3)=8$, $u(4)=32$. Тогда $u(t)=32+8(t-4)+(t-4)^2$. Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-4)=[32+8(t-4)+(t-4)^2]\cdot\eta(t-4)$. По таблице $1\cdot\eta(t)\fallingdotseq\dfrac{1}{p}$ $t\cdot\eta(t)\fallingdotseq\dfrac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\fallingdotseq\dfrac{2}{p^3}$.

Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-4)\fallingdotseq\dfrac{e^{-4p}}{p}$, $(t-4)\cdot\eta(t-4)\fallingdotseq\dfrac{e^{-4p}}{p^2}$ и

$(t-4)^2\cdot\eta(t-4)\fallingdotseq\dfrac{2e^{-4p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$$f(t)\fallingdotseq\frac{32e^{-4p}}{p}+\frac{8e^{-4p}}{p^2}+\frac{2e^{-4p}}{p^3}=\left(\frac{32}{p}+\frac{8}{p^2}+\frac{2}{p^3}\right)\cdot e^{-4p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\fallingdotseq\left(\dfrac{32}{p}+\dfrac{8}{p^2}+\dfrac{2}{p^3}\right)\cdot e^{-4p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{4e^{-(p-3)}}{(p-3)^4}.$$

РЕШЕНИЕ

Преобразуем функцию: $F(p)=\dfrac{4e^{-(p-3)}}{(p-3)^4}=\dfrac{4e^{-p}}{(p-3)^4}e^3$. По таблице $\dfrac{1}{p^4}\fallingdotseq\dfrac{t^3}{6}$. Тогда на основании теоремы смещения $\dfrac{1}{(p-3)^4}\fallingdotseq\dfrac{t^3}{6}e^{3t}$. Применяя теорему запаздывания и свойство линейности, получим: $\dfrac{4e^{-(p-3)}}{(p-3)^4}\fallingdotseq\dfrac{2(t-1)^3}{3}e^{3(t-1)}\cdot e^3\eta(t-1)=\dfrac{2(t-1)^3}{3}e^{3t}\eta(t-1)$.

ОТВЕТ: $\dfrac{4e^{-(p-3)}}{(p-3)^4}\fallingdotseq\dfrac{2}{3}(t-1)^3e^{3t}\eta(t-1)$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3-4p^2+8p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-4p+8)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=2-2i$, $p_3=2+2i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\dfrac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом $\Phi(p)$, то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\dfrac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2-4p+8)$ и $\psi'(p)=3p^2-8p+8$. Следовательно,

$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\dfrac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\dfrac{1}{8}$, $\operatorname*{res}_{p=2-2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\dfrac{\varphi(2-2i)}{\psi'(2-2i)}=\dfrac{e^{(2-2i)t}}{3(2-2i)^2-8(2-2i)+8}=-\dfrac{e^{(2-2i)t}}{8(i+1)}$,

$\operatorname*{res}_{p=2+2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\dfrac{\varphi(2+2i)}{\psi'(2+2i)}=\dfrac{e^{(2+2i)t}}{3(2+2i)^2-8(2+2i)+8}=\dfrac{e^{(2+2i)t}}{8(i-1)}$. Просуммируем все вычеты:

$$\underset{p=0}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=2-2i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=2+2i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(-\frac{e^{-2it}}{i+1}+\frac{e^{2it}}{i-1}\right)e^{2t}=$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-e^{-2it}(i-1)+e^{2it}(i+1)}{8}\cdot e^{2t}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}(i\cdot sh(2it)+ch(2it))\cdot e^{2t}=$$

$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}(\cos 2t-\sin 2t)\cdot e^{2t}$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^3-4p^2+8p}\risingdotseq\frac{1}{8}-\frac{1}{8}(\cos 2t-\sin 2t)\cdot e^{2t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{-2}{p^2(p^2+8p+15)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p^2(p^2+8p+15)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-3$, $p_3=-5$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2.
Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{-2}{p^2(p^2+8p+15)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+3}+\frac{D}{p+5}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-2}{p^2(p^2+8p+15)}=\frac{Ap(p+3)(p+5)+B(p+3)(p+5)+Cp^2(p+5)+Dp^2(p+3)}{p^2(p+3)(p+5)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p+3)(p+5)+B(p+3)(p+5)+Cp^2(p+5)+Dp^2(p+3)=-2$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая p=0, получим B=-2/15, при p=-3 получим C=-1/9, при p=-5 находим D=1/25. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: A+C+D=0 или A=-(C+D)=-(-1/9+1/25)=16/225. Таким образом,

$$\frac{-2}{p^2(p^2+8p+15)}=\frac{16}{225}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{p+5}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{-2}{p^2(p^2+8p+15)}\risingdotseq\frac{2(8-15t)}{225}-\frac{1}{9}\cdot e^{-3t}+\frac{1}{25}\cdot e^{-5t}.$$

ОТВЕТ: $\frac{-2}{p^2(p^2+8p+15)}\risingdotseq\frac{2(8-15t)}{225}-\frac{1}{9}\cdot e^{-3t}+\frac{1}{25}\cdot e^{-5t}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-8x'+16x=-3e^{-2t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$; **12.** $x''+\frac{1}{16}x=3\cos\frac{t}{4},\quad x(0)=0,\ x'(0)=-5$.

РЕШЕНИЯ.

11.. $x''-8x'+16x=-3e^{-2t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-1$. По таблице $-3e^{-2t}\risingdotseq\frac{-3}{p+2}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)-8pX(p)+16X(p)-1=\frac{-3}{p+2}$ или $X(p)[p^2-8p+16]=\frac{-3}{p+2}+1$. Тогда

$X(p)=\frac{p-1}{(p+2)[p^2-8p+16]}=\frac{p-1}{(p+2)(p-4)^2}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{p-1}{(p+2)(p-4)^2}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p-4}+\frac{C}{(p-4)^2}$. Отсюда $p-1=A(p-4)^2+B(p+2)(p-4)+C(p+2)$. Если p=-2, то $A=-\frac{1}{12}$, при $p=4$ получим $C=\frac{1}{2}$.. Для определения B приравняем коэффициенты при p^2: A+B=0. Отсюда $B=-A=\frac{1}{12}$. Таким образом,

$X(p)=-\frac{1}{12(p+2)}+\frac{1}{12(p-4)}+\frac{1}{2(p-4)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t)=-\frac{1}{12}e^{-2t}+\frac{1}{12}e^{4t}+\frac{1}{2}te^{4t}=\frac{1}{12}[(6t+1)e^{4t}-e^{-2t}]$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{1}{12}[(6t+1)e^{4t}-e^{-2t}]$.

12. $x''+\frac{1}{16}x=3\cos\frac{t}{4}$, $x(0)=0$, $x'(0)=-5$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+5$. По таблице $3\cos\frac{t}{4}\risingdotseq\frac{3p}{p^2+4^{-2}}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+4^{-2}X(p)+5=\frac{3p}{p^2+4^{-2}}$ или $X(p)[p^2+4^{-2}]=\frac{3p}{p^2+4^{-2}}-5$. Тогда

$X(p)=\frac{3p}{(p^2+4^{-2})^2}-\frac{5}{p^2+4^{-2}}$.

Или $X(p)=-5\cdot 4\frac{2^{-2}}{p^2+4^{-2}}-\frac{3\cdot 4}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{2^{-2}}{p^2+4^{-2}}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t)=-20\sin\frac{t}{4}+6t\cdot\sin\frac{t}{4}=(6t-20)\sin\frac{t}{4}$.

ОТВЕТ: $x(t)=(6t-20)\sin\frac{t}{4}$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x'+x+y=2e^{2t} \\ y'+2x+2y=2e^{3t} \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\risingdotseq pX(p)$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t}\risingdotseq\frac{1}{p-2}$, $e^{3t}\risingdotseq\frac{1}{p-3}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+1]+Y(p)=\dfrac{2}{p-2} \\ 2X(p)+Y(p)[p+2]=\dfrac{2}{p-3} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p+2 и вычтем второе уравнение.

Получим:

$X(p)[p+1](p+2)-2X(p)=\dfrac{2(p+2)}{p-2}-\dfrac{2}{p-3}=\dfrac{2(p^2-p-6-p+2)}{(p-2)(p-3)}$ или $p(p+3)X(p)=\dfrac{2(p^2-2p-4)}{(p-2)(p-3)}$. Тогда

$X(p)=\dfrac{2(p^2-2p-4)}{p(p-2)(p-3)(p+3)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{2(p^2-2p-4)}{p(p-2)(p-3)(p+3)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{p+3}=\frac{A(p-2)(p-3)(p+3)+Bp(p-3)(p+3)+Cp(p-2)(p+3)+Dp(p-2)(p-3)}{p(p-2)(p-3)(p+3)}.$$

Приравняем числители:

$A(p-2)(p-3)(p+3)+Bp(p-3)(p+3)+Cp(p-2)(p+3)+Dp(p-2)(p-3)=2(p^2-2p-4)$. Полагая p=0, находим A=-4/9, при p=2 получим B=4/5, при p=3 находим C=-1/9, при p=-3 находим D=-11/45. Таким образом, $X(p)=-\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{p-3}-\dfrac{11}{45}\cdot\dfrac{1}{p+3}$. Следовательно,

$x(t)=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{5}e^{2t}-\dfrac{1}{9}e^{3t}-\dfrac{11}{45}e^{-3t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что

$y(t)=2e^{2t}-x'(t)-x(t)$, т.е.

$$y(t)=2e^{2t}-\left(-\frac{4}{9}+\frac{4}{5}e^{2t}-\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{11}{45}e^{-3t}\right)'+\frac{4}{9}-\frac{4}{5}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{11}{45}e^{-3t}=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}e^{3t}-\frac{2}{5}e^{2t}-\frac{22}{45}e^{-3t}.$$

ОТВЕТ: $$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{5}e^{2t}-\dfrac{1}{9}e^{3t}-\dfrac{11}{45}e^{-3t} \\ y(t)=\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}e^{3t}-\dfrac{2}{5}e^{2t}-\dfrac{22}{45}e^{-3t} \end{cases}.$$

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ *и* $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=0,\ M=\sqrt{3};\qquad u(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi t}{2}, & 0\le t<1 \\ 1, & t\ge 1\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1 i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2 i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$$ В данном случае $$\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+10i_1+\sqrt{3}\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+\sqrt{3}\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$,

$i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных

уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+10I_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p) + 10X_1(p) + \sqrt{3}pX_2(p) = \frac{1}{p} \\ 2pX_2(p) + \sqrt{3}pX_1(p) = 0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p) = -\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p + 10 - \frac{3p}{2}] = \frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{p+20}{2} = \frac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p) = \frac{2}{p(p+20)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\frac{2}{p(p+20)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+20} = \frac{A(p+20)+Bp}{p(p+20)}$. Приравняем числители: $A(p+20) + Bp = 2$. Полагая p=0, находим $A = \frac{1}{10}$, при $p = -20$ получим $B = -\frac{1}{10}$. Таким образом, $X_1(p) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20}$.

Следовательно, $x_1(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-20t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t) = \int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t) = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-20t}\right)' = 2e^{-20t}$, то при t<1

$$i_1(t) = \int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau = 2e^{-20t}\cdot\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot e^{20\tau}d\tau = 2e^{-20t}\left(\frac{e^{20\tau}}{400+\frac{\pi^2}{4}}[20\sin\frac{\pi\tau}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}]\right)\Bigg|_0^t =$$

$= \frac{2}{400+\pi^2/4}[20\sin\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot e^{-20t}]$.. При t≥1 получим:

$$i_1(t) = \int_0^1 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau + \int_1^t 2e^{-20(t-\tau)}d\tau = 2e^{-20t}\left(\frac{e^{20\tau}}{400+\frac{\pi^2}{4}}[20\sin\frac{\pi\tau}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}]\right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{10}e^{-20(t-\tau)}\Bigg|_1^t =$$

$$= \frac{2}{400+\pi^2/4}[20e^{-20t+20} + \frac{\pi}{2}e^{-20t}] + \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-20t+20} = \frac{1}{10}(1 - e^{-20(t-1)} + \frac{2}{400+\pi^2/4}[20e^{20} + \frac{\pi}{2}]e^{-20t}.$$

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p) = -\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20})$, т.е. $x_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{20} + \frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t) = \int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_2'(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{20} + \frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}\right)' = -\sqrt{3}e^{-20t}$, то при t<1

$$i_2(t) = -\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau = -\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^t \sin\frac{\pi\tau}{2}e^{20\tau}d\tau = -\sqrt{3}e^{-20t}\left(\frac{e^{20\tau}}{400+\frac{\pi^2}{4}}[20\sin\frac{\pi\tau}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}]\right)\Bigg|_0^t =$$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2(400+\pi^2/4)}[20\sin\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot e^{-20t}]$. При t≥2

$$i_2(t) = -\int_0^1 \sin\frac{\pi\tau}{2}\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau - \int_1^t \sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau = -\sqrt{3}e^{-20t}\left(\frac{e^{20\tau}}{400+\frac{\pi^2}{4}}[20\sin\frac{\pi\tau}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}]\right)\Bigg|_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20(t-\tau)}\Bigg|_1^t =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{400+\pi^2/4}[20e^{-20t+20} + \frac{\pi}{2}e^{-20t}] - \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{\sqrt{3}}{10}e^{-20t+20} = -\frac{\sqrt{3}}{20}(1-e^{-20(t-1)}) - \frac{\sqrt{3}}{400+\pi^2/4}[20e^{20} + \frac{\pi}{2}]e^{-20t}$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t) = \frac{2}{400+\pi^2/4}[20\sin\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot e^{-20t}] \\ i_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2(400+\pi^2/4)}[20\sin\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot e^{-20t}] \end{cases}$ при 0≤t<1 и

$\begin{cases} i_1(t) = \frac{1}{10}(1-e^{-20(t-1)}) + \frac{2}{400+\pi^2/4}[20e^{20} + \frac{\pi}{2}]e^{-20t} \\ i_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{20}(1-e^{-20(t-1)}) - \frac{\sqrt{3}}{400+\pi^2/4}[20e^{20} + \frac{\pi}{2}]e^{-20t} \end{cases}$ при t≥1.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:

$tx'' + (4t+1)x' - 6(2t-1)x = 0,\ \ x(0) = 1,\ \ x'(0) = -6.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p + 6$. Воспользуемся свойством

дифференцирования изображения: $tf(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t) \risingdotseq -\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{pX-1\} = -(X + p\frac{dX}{dp})$, $tx'' \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2X - p + 6\} = -(2pX + p^2\frac{dX}{dp} - 1)$. Учитывая это,

получаем операторное уравнение: $-(2pX + p^2\frac{dX}{dp} - 1) + pX - 1 - 4(X + p\frac{dX}{dp}) + 12\frac{dX}{dp} + 6X = 0$. Или

$(-p^2 - 4p + 12)\frac{dX}{dp} - (p-2)X = -(p-2)(p+6)\frac{dX}{dp} - (p-2)X = 0$. Таким образом, получилось

дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$(p+6)\frac{dX}{dp} + X = 0;\quad \frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p+6};\quad \ln|X| = -\ln|p+6| + \ln C;\quad X(p) = \frac{C}{p+6}$. Переходя к оригиналу,

получим $x(t) = C\cdot e^{-6t}$. Так как x(0)=1, то C=1. Окончательно, $x(t) = e^{-6t}$

ОТВЕТ: $x(t) = e^{-6t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$(x+y)\frac{\partial u}{\partial x} = u + y,\quad x > 0,\ \ y > 0,\quad u|_{x=0} = y^3 - y.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y) \risingdotseq U(p,y)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} \risingdotseq pU(p,y) - u(0,y) = pU(p,y) - y^3 + y$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \risingdotseq -\dfrac{d}{dp}F(p)$. В данном случае

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} \risingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{pU - y^3 + y\} = -(U + p\dfrac{dU}{dp})$, Запишем операторное уравнение:

$-U - p\dfrac{dU}{dp} + y(pU - y^3 + y) = U + \dfrac{y}{p}$ или $\dfrac{dU}{dp} - \dfrac{(yp-2)}{p}U = \dfrac{y^2(1-y^2)}{p} - \dfrac{y}{p^2}$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(p,y) = \dfrac{C(p,y)}{p^2}e^{yp}$, где C(p,y) – функция, определяемая из уравнения $C'(p,y)\dfrac{e^{yp}}{p^2} = \dfrac{y^2(1-y^2)}{p} - \dfrac{y}{p^2}$, т.е.

$$C(p,y) = \int [y^2(1-y^2)p - y]e^{-yp}dp = -y^2(1-y^2)\cdot\frac{1}{y^2}(py+1)e^{-yp} + e^{-yp} + C_1 = -(1-y^2)(py+1)e^{-yp} + e^{-yp} + C_1.$$

Следовательно, решением уравнения будет

$U(p,y) = \dfrac{C(p,y)}{p^2}e^{yp} = \dfrac{1}{p^2}[-(1-y^2)(py+1)e^{-yp} + e^{-yp} + C_1]e^{yp} = -\dfrac{1}{p^2}(1-y^2)(py+1) + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{C_1}{p^2}e^{yp}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p) \to 0$ при $p \to \infty$. Это возможно только тогда, когда C_1=0. Таким образом, $U(p,y) = -\dfrac{1}{p^2}(1-y^2)(py+1) + \dfrac{1}{p^2} = -\dfrac{1-y^2}{p^2} - \dfrac{y(1-y^2)}{p} + \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{y^2}{p^2} - \dfrac{y}{p} + \dfrac{y^3}{p}$.

Пользуясь таблицами, находим $u(x,y) = y^2x - y(1-y^2)$.

ОТВЕТ: $u(x,y) = y^3 - y + xy^2$