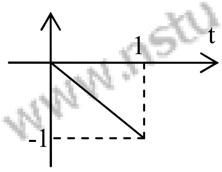
ВАРИАНТ 8
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\cos 3t\cdot\cos t$; **2)** $f(t)=e^{2t}\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t\sin^2 2t dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-5)\sin 3(t-5)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t e^{5\tau}(t-\tau)^3 d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(t^2+50)\eta(t-5)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\cos 3t\cdot\cos t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем: $\cos 3t\cdot\cos t=\frac{1}{2}(\cos 2t+\cos 4t)$. По таблицам, $\cos 2t\risingdotseq\frac{p}{p^2+4}$ и $\cos 4t\risingdotseq\frac{p}{p^2+16}$. Далее, в силу свойства линейности, $\cos 3t\cdot\cos t\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+4}+\frac{p}{p^2+16}\right)=\frac{p(p^2+10)}{(p^2+4)(p^2+16)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\cos 3t\cdot\cos t\risingdotseq\frac{p(p^2+10)}{(p^2+4)(p^2+16)}$.

2) $f(t)=e^{2t}\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t$. По таблице находим $\operatorname{ch}t\risingdotseq\frac{p}{p^2-1}$ и $\operatorname{sh}t\risingdotseq\frac{1}{p^2-1}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{2t}\operatorname{sh}t\risingdotseq\frac{1}{(p-2)^2-1}$ и, по свойству линейности получаем:

e^{2t}sht+cht

$$\risingdotseq\frac{1}{(p-2)^2-1}+\frac{p}{p^2-1}=\frac{p^2-1+p^3-4p^2+4p-p}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}=\frac{p^3-3p^2+3p-1}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}=\frac{(p-1)^3}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{2t}\text{sht+cht}\risingdotseq\frac{(p-1)^3}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t\sin^2 2tdt.$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$t\sin^2 2t=\frac{t}{2}(1-\cos 4t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}t\cos 4t$. По таблице находим $\cos 4t\risingdotseq\frac{p}{p^2+16}$.

Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+16}\right)\risingdotseq-t\cdot\cos 4t$.

Следовательно, $t\cdot\cos 4t\risingdotseq-\frac{p^2+16-2p^2}{(p^2+16)^2}=\frac{p^2-16}{(p^2+16)^2}$. Так как $t\risingdotseq\frac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$\frac{t}{2}-\frac{1}{2}t\cos 4t\risingdotseq\frac{1}{2p^2}-\frac{p^2-16}{2(p^2+16)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p^2+16)^2-p^2(p^2-16)}{p^2(p^2+16)^2}=\frac{24p^2+128}{p^2(p^2+16)^2}=\frac{8(3p^2+16)}{p^2(p^2+16)^2}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int_0^t t\sin^2 2td\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{8(3p^2+16)}{p^2(p^2+16)^2}=\frac{8(3p^2+16)}{p^3(p^2+16)^2}.$$

ОТВЕТ: $\int_0^t t\sin^2 2td\tau \risingdotseq \frac{8(3p^2+16)}{p^3(p^2+16)^2}$.

4) $f(t)=\eta(t-5)\sin 3(t-5)$. По таблице $\sin 3t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{3}{p^2+9}$. Согласно теореме запаздывания

$\eta(t-5)\cdot\sin 3(t-5) \risingdotseq \frac{3e^{-5p}}{p^2+9}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-5)\cdot\sin 3(t-5) \risingdotseq \frac{3e^{-5p}}{p^2+9}$.

5) $f(t)=\int_0^t e^{5\tau}(t-\tau)^3 d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^3 и e^{5t}. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^3 \risingdotseq \frac{3!}{p^4}$ и $e^{5t} \risingdotseq \frac{1}{p-5}$. Следовательно, $\int_0^t e^{5\tau}(t-\tau)^3 d\tau \risingdotseq \frac{6}{p^4(p-5)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t e^{5\tau}(t-\tau)^3 d\tau \risingdotseq \frac{6}{p^4(p-5)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ -t, & 0\le t<1,\\ 0, & t\ge 1.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=-t\cdot\eta(t)+(t-1)\cdot\eta(t-1)+\eta(t-1)$. Так как $-t=-(t-1)-1$, то начиная с момента t=1 функция становится равной нулю. По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$.

Согласно теореме запаздывания $(t-1)\cdot\eta(t-1)\risingdotseq\frac{e^{-p}}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t-1)\risingdotseq\frac{e^{-p}}{p}$. По свойству линейности получим: $f(t)\risingdotseq -\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p}=\frac{(1+p)e^{-p}-1}{p^2}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq \frac{(1+p)e^{-p}-1}{p^2}$.

7) $f(t)=(t^2+50)\eta(t-5)$. Разложим функцию $u(t)=t^2+50$ по степеням (t-5), пользуясь формулой Тейлора (t_0=5): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=2t$, $u''(t)=2$, $u'(3)=10$, u(5)=75. Тогда $u(t)=75+10(t-5)+(t-5)^2$. Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-5)=[75+10(t-5)+(t-5)^2]\cdot\eta(t-5)$. По таблице $1\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}$.

Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-5)\risingdotseq\frac{e^{-5p}}{p}$, $(t-5)\cdot\eta(t-5)\risingdotseq\frac{e^{-5p}}{p^2}$ и

$(t-5)^2\cdot\eta(t-5)\risingdotseq\frac{2e^{-5p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$$f(t)\risingdotseq\frac{75e^{-5p}}{p}+\frac{10e^{-5p}}{p^2}+\frac{2e^{-5p}}{p^3}=\left(\frac{75}{p}+\frac{10}{p^2}+\frac{2}{p^3}\right)\cdot e^{-5p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq\left(\frac{75}{p}+\frac{10}{p^2}+\frac{2}{p^3}\right)\cdot e^{-5p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{3(p+1)}{(p+1)^2+9}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p+1)^2$ в сумме $(p+1)^2+9$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что косинус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\cos wt\risingdotseq\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+w^2}$.

Действительно, $\frac{3(p+1)}{(p+1)^2+9}=3\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}\risingdotseq 3e^{-t}\cos 3t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{3(p+1)}{(p+1)^2+9}\right)\risingdotseq -3te^{-t}\cos 3t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{3(p+1)}{(p+1)^2+9}\right)\risingdotseq -3te^{-t}\cos 3t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+4p^2+8p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+4p+8)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-2-2i$, $p_3=-2+2i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом $\Phi(p)$, то вычет можно вычислить по формуле $\underset{p_0}{\operatorname{res}}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2+4p+8)$ и $\psi'(p)=3p^2+8p+8$. Следовательно,

$\underset{p=0}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{8}$, $\underset{p=-2-2i}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-2-2i)}{\psi'(-2-2i)}=\frac{e^{(-2-2i)t}}{3(-2-2i)^2+8(-2-2i)+8}=\frac{e^{(-2-2i)t}}{8(i-1)}$,

$\underset{p=-2+2i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\dfrac{\varphi(-2+2i)}{\psi'(-2+2i)}=\dfrac{e^{(-2+2i)t}}{3(-2+2i)^2+8(-2+2i)+8}=-\dfrac{e^{(-2+2i)t}}{8(i+1)}$. Просуммируем все вычеты:

$$\underset{p=0}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=-2-2i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=-2+2i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{e^{-2it}}{i-1}-\frac{e^{2it}}{i+1}\right)e^{-2t}=$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2it}(i+1)-e^{2it}(i-1)}{8}\cdot e^{-2t}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}(-i\cdot \mathrm{sh}(2it)+\mathrm{ch}(2it))\cdot e^{-2t}=$$

$=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}(\sin 2t+\cos 2t)\cdot e^{-2t}$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p^3+4p^2+8p}\risingdotseq\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}(\sin 2t+\cos 2t)\cdot e^{-2t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{3}{p^2(p^2+3p-4)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p^2(p^2+3p-4)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=-4$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{3}{p^2(p^2+3p-4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{p+4}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{3}{p^2(p^2+3p-4)}=\frac{Ap(p-1)(p+4)+B(p-1)(p+4)+Cp^2(p+4)+Dp^2(p-1)}{p^2(p-1)(p+4)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p-1)(p+4)+B(p-1)(p+4)+Cp^2(p+4)+Dp^2(p-1)=3$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая p=0, получим B=-3/4, при p=1 получим C=3/5, при p=-4 находим D=-3/80. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: A+C+D=0 или A=-(C+D)=-(3/5-3/80)=-9/16. Таким образом,

$$\frac{3}{p^2(p^2+3p-4)}=-\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{3}{80}\cdot\frac{1}{p+4}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{3}{p^2(p^2+3p-4)}\risingdotseq-\frac{3(3+4t)}{16}+\frac{3}{5}\cdot e^{t}-\frac{3}{80}\cdot e^{-4t}.$$

ОТВЕТ: $\dfrac{3}{p^2(p^2+3p-4)}\risingdotseq\dfrac{3}{5}\cdot e^{t}-\dfrac{3}{80}\cdot e^{-4t}-\dfrac{3(3+4t)}{16}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-4x'+4x=7e^{3t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=4$; **12.** $x''+\dfrac{1}{4}x=2\cos\dfrac{t}{2},\quad x(0)=0,\ x'(0)=5$.

РЕШЕНИЯ.

11. $x''-4x'+4x=7e^{3t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=4$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t) \fallingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 4$. По таблице $7e^{3t} \fallingdotseq \dfrac{7}{p-3}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p) - 4pX(p) + 4X(p) - 4 = \dfrac{7}{p-3}$ или $X(p)[p^2 - 4p + 4] = \dfrac{7}{p-3} + 4$. Тогда $X(p) = \dfrac{4p-5}{(p-3)[p^2-4p+4]} = \dfrac{4p-5}{(p-3)(p-2)^2}$. Применим метод разложения на простые дроби: $\dfrac{4p-5}{(p-3)(p-2)^2} = \dfrac{A}{p-3} + \dfrac{B}{p-2} + \dfrac{C}{(p-2)^2}$. Отсюда $4p - 5 = A(p-2)^2 + B(p-3)(p-2) + C(p-3)$. Если p=3, то $A = 7$, при $p = 2$ получим $C = -3$.. Для определения B приравняем коэффициенты при p^2: A+B=0. Отсюда $B = -A = -7$. Таким образом, $X(p) = -\dfrac{7}{p-3} - \dfrac{7}{p-2} - \dfrac{3}{(p-2)^2}$.Пользуясь формулой $t^n \fallingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \fallingdotseq \dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим:

$x(t) = 7e^{3t} - 7e^{2t} - 3te^{2t} = 7e^{3t} - (7+3t)e^{2t}$.

ОТВЕТ: $x(t) = 7e^{3t} - (7+3t)e^{2t}$.

12. $x'' + \dfrac{1}{4}x = 2\cos\dfrac{t}{2}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 5$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \fallingdotseq X(p)$, то $x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \fallingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 5$. По таблице $2\cos\dfrac{t}{2} \fallingdotseq \dfrac{2p}{p^2 + 2^{-2}}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p) + 2^{-2}X(p) - 5 = \dfrac{2p}{p^2+2^{-2}}$ или $X(p)[p^2 + 2^{-2}] = \dfrac{2p}{p^2+2^{-2}} + 5$. Тогда

$X(p) = \dfrac{2p}{(p^2+2^{-2})^2} + \dfrac{5}{p^2+2^{-2}}$.

Или $X(p) = 5 \cdot 2\dfrac{2^{-1}}{p^2+2^{-2}} - \dfrac{2 \cdot 2}{2} \cdot \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{2^{-1}}{p^2+4^{-2}}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t) = 10\sin\dfrac{t}{2} + 2t \cdot \sin\dfrac{t}{2} = 2(t+5)\sin\dfrac{t}{2}$.

ОТВЕТ: $x(t) = 2(t+5)\sin\dfrac{t}{2}$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x' - 2x - 2y = 2e^{2t} \\ y' - y - x = e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t) \fallingdotseq X(p)$, $y(t) \fallingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \fallingdotseq pX(p)$, $y'(t) \fallingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t} \fallingdotseq \dfrac{1}{p-2}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p-2]-2Y(p)=\dfrac{2}{p-2} \\ -X(p)+Y(p)[p-1]=\dfrac{1}{p-2} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p-1, а второе – на 2, и сложим их.

Получим: $X(p)[p-1](p-2)-2X(p)=\dfrac{2(p-1)}{p-2}+\dfrac{2}{p-2}=\dfrac{2p}{p-2}$ или $p(p-3)X(p)=\dfrac{2p}{p-2}$. Тогда

$X(p)=\dfrac{2}{(p-2)(p-3)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$\dfrac{2}{(p-2)(p-3)}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{p-3}=\dfrac{A(p-3)+B(p-2)}{(p-2)(p-3)}$. Приравняем числители: $A(p-3)+B(p-2)=2$.

Полагая p=2, находим A=-2, при p=3 получим B=2. Таким образом, $X(p)=2\cdot\dfrac{1}{p-2}+2\cdot\dfrac{1}{p-3}$.

Следовательно, $x(t)=2e^{3t}-2e^{2t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что

$y(t)=\dfrac{1}{2}x'(t)-x(t)-e^{2t}$, т.е. $y(t)=\dfrac{1}{2}\left(2e^{3t}-2e^{2t}\right)'-2e^{3t}+2e^{2t}-e^{2t}=e^{3t}-e^{2t}$.

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=2e^{3t}-2e^{2t} \\ y(t)=e^{3t}-e^{2t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ *и* $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0.$

$$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=0,\ M=\sqrt{3};\qquad u(t)=\begin{cases} e^t-1, & 0\le t<2 \\ e^{-t}+2\operatorname{sh}2-1, & t\ge 2 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+10i_1+\sqrt{3}\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+\sqrt{3}\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$,

$i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+10I_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t),

для которой $\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+10X_1(p)+\sqrt{3}pX_2(p)=\dfrac{1}{p} \\ 2pX_2(p)+\sqrt{3}pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\dfrac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p+10-\dfrac{3p}{2}]=\dfrac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{p+20}{2}=\dfrac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\dfrac{2}{p(p+20)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\dfrac{2}{p(p+20)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+20}=\dfrac{A(p+20)+Bp}{p(p+20)}$. Приравняем числители: $A(p+20)+Bp=2$. Полагая p=0, находим $A=\frac{1}{10}$, при $p=-20$ получим $B=-\frac{1}{10}$. Таким образом, $X_1(p)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20}$.

Следовательно, $x_1(t)=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-20t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-20t}\right)'=2e^{-20t}$, то при $t<2$

$$i_1(t)=\int_0^t(e^{\tau}-1)\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau=[\frac{2}{21}e^{-20t+21\tau}-\frac{1}{10}\cdot e^{-20(t-\tau)}]\Big|_0^t=\frac{2}{21}e^t-\frac{1}{10}+\frac{1}{210}e^{-20t}.$$

. При $t\geq 2$ получим:

$$i_1(t)=\int_0^2(e^{\tau}-1)\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau+\int_2^t(e^{-\tau}+2sh2-1)\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau=[\frac{2}{21}e^{-20t+21\tau}-\frac{1}{10}\cdot e^{-20(t-\tau)}]\Big|_0^2+$$

$$+[\frac{2}{19}e^{-20t+19\tau}+\frac{(2sh2-1)}{10}e^{-20(t-\tau)}]\Big|_2^t=\frac{2}{21}e^{-20t+42}-\frac{1}{10}e^{-20t+40}+\frac{1}{210}e^{-20t}+\frac{2}{19}e^{-t}-\frac{2}{19}e^{-20t+38}+$$

$$+\frac{2sh2-1}{10}(1-e^{-20t+40})=\frac{2sh2-1}{10}+\frac{2}{19}e^{-t}-\frac{1}{10}(\frac{e^{42}-1}{21}+\frac{e^{38}}{19})e^{-20t}.$$

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20})$, т.е. $x_2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t)=\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_2'(t)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}\right)'=-\sqrt{3}e^{-20t}$, то при $t<2$

$$i_2(t)=-\int_0^t(e^{\tau}-1)\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau=-\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^t(e^{\tau}-1)e^{20\tau}d\tau=-\sqrt{3}[\frac{1}{21}e^{-20t+21\tau}-\frac{1}{20}\cdot e^{-20(t-\tau)}]\Big|_0^t=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{21}e^t+\frac{\sqrt{3}}{20}-\frac{\sqrt{3}}{420}e^{-20t}=\frac{\sqrt{3}}{20}-\frac{\sqrt{3}}{21}e^t-\frac{\sqrt{3}}{420}e^{-20t}.$$ При $t\geq 2$

$$i_2(t)=-\sqrt{3}\int_0^2(e^{\tau}-1)\cdot e^{-20(t-\tau)}d\tau-\sqrt{3}\int_2^t(e^{-\tau}+2sh2-1)\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau=-\sqrt{3}[\frac{1}{21}e^{-20t+21\tau}-\frac{1}{20}\cdot e^{-20(t-\tau)}]\Big|_0^2-$$

$$-\sqrt{3}[\frac{1}{19}e^{-20t+19\tau}+\frac{(2sh2-1)}{20}e^{-20(t-\tau)}]\Big|_2^t=-\frac{\sqrt{3}}{21}e^{-20t+42}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t+40}-\frac{\sqrt{3}}{420}e^{-20t}-\frac{\sqrt{3}}{19}e^{-t}+\frac{\sqrt{3}}{19}e^{-20t+38}-$$

$$-\sqrt{3}\frac{2sh2-1}{20}(1-e^{-20t+40})=\frac{\sqrt{3}(1-2sh2)}{20}-\frac{\sqrt{3}}{19}e^{-t}+\frac{\sqrt{3}}{20}(\frac{e^{42}-1}{21}+\frac{e^{38}}{19})e^{-20t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=\frac{2}{21}e^t-\frac{1}{10}+\frac{1}{210}e^{-20t} \\ i_2(t)=\frac{\sqrt{3}}{20}-\frac{\sqrt{3}}{21}e^t-\frac{\sqrt{3}}{420}e^{-20t} \end{cases}$ при $0\leq t<2$ и

$\begin{cases} i_1(t)=\frac{2sh2-1}{10}+\frac{2}{19}e^{-t}-\frac{1}{10}(\frac{e^{42}-1}{21}+\frac{e^{38}}{19})e^{-20t} \\ i_2(t)=\frac{\sqrt{3}(1-2sh2)}{20}-\frac{\sqrt{3}}{19}e^{-t}+\frac{\sqrt{3}}{20}(\frac{e^{42}-1}{21}+\frac{e^{38}}{19})e^{-20t} \end{cases}$ при $t\geq 2$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:

$tx'' + (1-6t)x' - 7(t+1)x = 0,\ \ x(0) = 1,\ \ x'(0) = 7.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \fallingdotseq X(p)$, то $x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$, $x''(t) \fallingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 7$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \fallingdotseq -\dfrac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t) \fallingdotseq -\dfrac{dX}{dp}$,

$tx'(t) \fallingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{pX - 1\} = -(X + p\dfrac{dX}{dp})$, $tx'' \fallingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{p^2X - p - 7\} = -(2pX + p^2\dfrac{dX}{dp} - 1)$. Учитывая это, получаем операторное уравнение: $-(2pX + p^2\dfrac{dX}{dp} - 1) + pX - 1 + 6(X + p\dfrac{dX}{dp}) + 7\dfrac{dX}{dp} - 7X = 0$. Или

$(-p^2 + 6p + 7)\dfrac{dX}{dp} - (p+1)X = -(p-7)(p+1)\dfrac{dX}{dp} - (p+1)X = 0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$(p-7)\dfrac{dX}{dp} + X = 0;\quad \dfrac{dX}{X} = -\dfrac{dp}{p-7};\quad \ln|X| = -\ln|p-7| + \ln C;\quad X(p) = \dfrac{C}{p-7}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t) = C \cdot e^{7t}$. Так как x(0)=1, то C=1. Окончательно, $x(t) = e^{7t}$

ОТВЕТ: $x(t) = e^{7t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$\dfrac{\partial u}{\partial x} - \cos x \dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cos y,\quad x > 0,\ \ y > 0,\quad u\big|_{y=0} = \sin x.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y) \fallingdotseq U(x,p)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \fallingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p) - \sin x$. Запишем операторное уравнение:

$\dfrac{dU}{dx} - \cos x(pU - \sin x) = \dfrac{p\cos x}{p^2+1}$ или $\dfrac{dU}{dx} - p\cos x \cdot U = \dfrac{p\cos x}{p^2+1} - \sin x \cdot \cos x$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(x,p) = C(x,p)e^{p\sin x}$, где C(x,p) – функция, определяемая из уравнения $C'(x,p)e^{p\sin x} = \dfrac{p\cos x}{p^2+1} - \sin x \cdot \cos x$, т.е.

$$C(x,p) = \int(\frac{p\cos x}{p^2+1} - \sin x \cdot \cos x)e^{-p\sin x}dx = \int(\frac{p}{p^2+1} - \sin x)e^{-p\sin x}d\sin x = -[\frac{1}{p^2+1} - \frac{p\sin x + 1}{p^2}]e^{-p\sin x} + C_1.$$

Следовательно, решением уравнения будет

$U(x,p) = C(x,p)e^{p\sin x} = [-(\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{p\sin x+1}{p^2})e^{-p\sin x} + C_1]e^{p\sin x} = -(\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{p\sin x+1}{p^2}) + C_1e^{p\sin x}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p) \to 0$ при $p \to \infty$. Это возможно только тогда, когда C_1=0. Таким образом, $U(x,p) = -(\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{p\sin x+1}{p^2})$. Пользуясь таблицами, находим

$u(x,y) = -\sin y + \sin x + y$.

ОТВЕТ: $u(x,y) = y + \sin x - \sin y$.