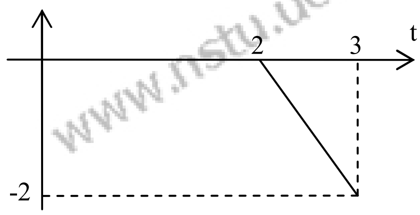
ВАРИАНТ 9
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\cos 4t\cdot\cos 2t$; **2)** $f(t)=e^{t}\operatorname{sh}2t-2\operatorname{ch}2t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t\sin^2 3t dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-3)\cdot(t-3)^2$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t e^{7(t-\tau)}\tau^4 d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(t^2-7t)\eta(t-7)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\cos 4t\cdot\cos 2t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем: $\cos 4t\cdot\cos 2t=\frac{1}{2}(\cos 2t+\cos 6t)$. По таблицам, $\cos 2t \fallingdotseq \frac{p}{p^2+4}$ и $\cos 6t \fallingdotseq \frac{p}{p^2+36}$. Далее, в силу свойства линейности, $\cos 4t\cdot\cos 2t \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+4}+\frac{p}{p^2+36}\right)=\frac{p(p^2+20)}{(p^2+4)(p^2+36)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\cos 4t\cdot\cos 2t \fallingdotseq \frac{p(p^2+20)}{(p^2+4)(p^2+36)}$.

2) $f(t)=e^{t}\operatorname{sh}2t-2\operatorname{ch}2t$. По таблице находим $\operatorname{ch}2t \fallingdotseq \frac{p}{p^2-4}$ и $\operatorname{sh}2t \fallingdotseq \frac{2}{p^2-4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{t}\operatorname{sh}2t \fallingdotseq \frac{2}{(p-1)^2-4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{t}\text{sh2t-2ch2t} \fallingdotseq \frac{2}{(p-1)^2-4}-\frac{2p}{p^2-4}=\frac{2p^2-8-2p^3+4p^2-2p+8p}{[(p-1)^2-4](p^2-4)}=\frac{-2p^3+6p^2+6p-8}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{t}\text{sh2t-2ch2t} \fallingdotseq \frac{-2p^3+6p^2+6p-8}{[(p-2)^2-1](p^2-1)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t\sin^2 3t dt$.. Преобразуем подынтегральную функцию: $t\sin^2 3t=\frac{t}{2}(1-\cos 6t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}t\cos 6t$. По таблице находим $\cos 6t \fallingdotseq \frac{p}{p^2+36}$. Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+36}\right) \fallingdotseq -t\cdot\cos 6t$. Следовательно,

$t\cdot\cos 6t \fallingdotseq -\frac{p^2+36-2p^2}{(p^2+36)^2}=\frac{p^2-36}{(p^2+36)^2}$. Так как $t \fallingdotseq \frac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$$\frac{t}{2}-\frac{1}{2}t\cos 6t \fallingdotseq \frac{1}{2p^2}-\frac{p^2-36}{2(p^2+36)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p^2+36)^2-p^2(p^2-36)}{p^2(p^2+36)^2}=\frac{54p^2+36\cdot 18}{p^2(p^2+36)^2}=\frac{54(p^2+12)}{p^2(p^2+36)^2}.$$ По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$\int\limits_0^t t\sin^2 3t dt \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{54(p^2+12)}{p^2(p^2+36)^2} = \frac{54(p^2+12)}{p^3(p^2+36)^2}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t\sin^2 3t dt \risingdotseq \frac{54(p^2+12)}{p^3(p^2+36)^2}$.

4) $f(t) = \eta(t-3)\cdot(t-3)^2$. По таблице $t^2\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{2!}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания

$\eta(t-3)\cdot(t-3)^2 \risingdotseq \frac{2e^{-3p}}{p^2}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-3)\cdot(t-3)^2 \risingdotseq \frac{2e^{-3p}}{p^2}$.

5) $f(t) = \int\limits_0^t e^{7(t-\tau)}\tau^4 d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^4 и e^{7t}. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^4 \risingdotseq \frac{4!}{p^5}$ и $e^{7t} \risingdotseq \frac{1}{p-7}$.

Следовательно, $\int\limits_0^t e^{7(t-\tau)}\tau^4 d\tau \risingdotseq \frac{24}{p^5(p-7)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t e^{7(t-\tau)}\tau^4 d\tau \risingdotseq \frac{24}{p^5(p-7)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ -2(t-2), & 2 \le t < 3, \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t) = -2(t-2)\cdot\eta(t-2) + 2(t-3)\cdot\eta(t-3) + 2\eta(t-3)$. Так как $-2(t-2) = -2(t-3)-2$, то начиная с момента t=3 функция становится равной нулю. По таблице $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$.

Согласно теореме запаздывания $(t-2)\cdot\eta(t-2) \risingdotseq \frac{e^{-2p}}{p^2}$, $(t-3)\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p^2}$ и $\eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p}$.

По свойству линейности получим: $f(t) \risingdotseq -\frac{2e^{-2p}}{p^2} + \frac{2e^{-3p}}{p^2} + \frac{2e^{-3p}}{p} = 2\frac{(1+p)e^{-p}-1}{p^2}\cdot e^{-2p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq 2\frac{(1+p)e^{-p}-1}{p^2}\cdot e^{-2p}$.

7) $f(t) = (t^2-7t)\eta(t-7)$. Разложим функцию $u(t) = t^2-7t$ по степеням (t-7), пользуясь формулой Тейлора (t_0=7): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t) = 2t-7$, $u''(t) = 2$, $u'(7) = 7$, u(7)=0. Тогда $u(t)=7(t-7)+(t-7)^2$. Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-7)=[7(t-7)+(t-7)^2]\cdot\eta(t-7)$. По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $(t-7)\cdot\eta(t-7)\risingdotseq\frac{e^{-7p}}{p^2}$ и $(t-7)^2\cdot\eta(t-7)\risingdotseq\frac{2e^{-7p}}{p^3}$. Применим свойство линейности: $f(t)\risingdotseq\frac{7e^{-7p}}{p^2}+\frac{2e^{-7p}}{p^3}=(\frac{2}{p^3}+\frac{7}{p^2})\cdot e^{-7p}$.

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq(\frac{2}{p^3}+\frac{7}{p^2})\cdot e^{-7p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{4(p-3)}{(p-3)^2+4}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p-3)^2$ в сумме $(p-3)^2+4$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что косинус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\cos wt\risingdotseq\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+w^2}$.

Действительно, $\frac{4(p-3)}{(p-3)^2+4}=4\frac{p-3}{(p-3)^2+2^2}\risingdotseq 4e^{3t}\cos 2t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{4(p-3)}{(p-3)^2+4}\right)\risingdotseq -4te^{3t}\cos 2t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{4(p-3)}{(p-3)^2+4}\right)\risingdotseq -4te^{3t}\cos 2t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3-2p^2+10p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-2p+10)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=1-3i$, $p_3=1+3i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$. В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p^3-2p^2+10p$ и $\psi'(p)=3p^2-4p+10$. Следовательно, $\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{10}$,

$$\operatorname*{res}_{p=1-3i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(1-3i)}{\psi'(1-3i)}=\frac{e^{(1-3i)t}}{3(1-3i)^2-4(1-3i)+10}=-\frac{e^{(1-3i)t}}{6(i+3)},$$

$$\operatorname*{res}_{p=1+3i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(1+3i)}{\psi'(1+3i)}=\frac{e^{(1+3i)t}}{3(1+3i)^2-4(1+3i)+10}=\frac{e^{(1+3i)t}}{6(i-3)}.$$

Просуммируем все вычеты:

$$\underset{p=0}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=1-3i}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]+\underset{p=1+3i}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{10}+\frac{1}{6}\left(-\frac{e^{-3it}}{i+3}+\frac{e^{3it}}{i-3}\right)e^{t}=$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{-e^{-3it}(i-3)+e^{3it}(i+3)}{6\cdot 10}\cdot e^{t}=\frac{1}{10}-\frac{1}{30}(i\cdot \mathrm{sh}3it+3\mathrm{ch}3it)\cdot e^{t}]=$$

$=\frac{1}{10}-\frac{e^{t}}{30}(3\cos 3t-\sin 3t)$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^3-2p^2+10p}\risingdotseq\frac{1}{10}-\frac{e^{t}}{30}(3\cos 3t-\sin 3t)$

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{-3}{p^2(p^2-6p+8)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p^2(p^2-6p+8)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=2$, $p_3=4$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2.
Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{-3}{p^2(p^2-6p+8)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p-4}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-3}{p^2(p^2-6p+8)}=\frac{Ap(p-2)(p-4)+B(p-2)(p-4)+Cp^2(p-4)+Dp^2(p-2)}{p^2(p-2)(p-4)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p-2)(p-4)+$ $+B(p-2)(p-4)+Cp^2(p-4)+Dp^2(p-2)=-3$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая p=0, получим B=-3/8, при p=2 получим C=3/8, при p=4 находим D=-3/32. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: A+C+D=0 или A=-(C+D)=-(3/8-3/32)=9/32. Таким образом,

$$\frac{-3}{p^2(p^2-6p+8)}=-\frac{9}{32}\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{3}{32}\cdot\frac{1}{p-4}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{-3}{p^2(p^2-6p+8)}\risingdotseq-\frac{3(4t+3)}{32}+\frac{3}{8}\cdot e^{2t}-\frac{3}{32}\cdot e^{4t}.$$

ОТВЕТ: $\frac{-3}{p^2(p^2-6p+8)}\risingdotseq\frac{3}{8}\cdot e^{2t}-\frac{3}{32}\cdot e^{4t}-\frac{3(4t+3)}{32}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-6x'+9x=6e^{t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=-4$ **;** **12.** $x''+49x=7\cos 7t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=2$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11.. $x''-6x'+9x=6e^{t},\quad x(0)=0,\ x'(0)=-4$ **.** Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+4$. По таблице $6e^{t}\risingdotseq\frac{6}{p-1}$. Получаем операторное уравнение

$p^2X(p)-6pX(p)+9X(p)+4=\frac{6}{p-1}$ или $X(p)[p^2-6p+9]=\frac{6}{p-1}-4$. Тогда

$X(p)=\frac{10-4p}{(p-1)[p^2-6p+9]}=\frac{10-4p}{(p-1)(p-3)^2}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{10-4p}{(p-1)(p-3)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{(p-3)^2}$. Отсюда $10-4p=A(p-3)^2+B(p-3)(p-1)+C(p-1)$. Если p=1, то $A=\frac{3}{2}$, при $p=3$ получим $C=-2$.. Для определения B приравняем коэффициенты при p^2: A+B=0. Отсюда $B=-A=-\frac{3}{2}$. Таким образом, $X(p)=\frac{3}{2}\frac{1}{p-1}-\frac{3}{2}\frac{1}{p-3}-\frac{2}{(p-3)^2}$.Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим:

$x(t)=\frac{3}{2}e^t-\frac{3}{2}e^{3t}-te^{3t}=\frac{3}{2}e^t-(t+\frac{3}{2})e^{3t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{3}{2}e^t-(t+\frac{3}{2})e^{3t}$.

12. $x''+49x=7\cos 7t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=2$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2$. По таблице $7\cos 7t\risingdotseq\frac{7p}{p^2+49}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+49X(p)-2=\frac{7p}{p^2+49}$ или $X(p)[p^2+49]=\frac{7p}{p^2+49}+2$. Тогда

$X(p)=\frac{7p}{(p^2+49)^2}+\frac{2}{p^2+49}$.

Или $X(p)=\frac{2}{7}\frac{7}{p^2+49}-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{7}{p^2+49}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t)=\frac{2}{7}\sin 7t+\frac{1}{2}t\cdot\sin 7t=(\frac{t}{2}+\frac{2}{7})\sin 7t$.

ОТВЕТ: $x(t)=(\frac{t}{2}+\frac{2}{7})\sin 7t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases}x'-2x-2y=2e^{2t}\\ y'+y+x=e^{3t}\end{cases}\qquad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\risingdotseq pX(p)$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t}\risingdotseq\frac{1}{p-2}$, $e^{3t}\risingdotseq\frac{1}{p-3}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases}X(p)[p-2]-2Y(p)=\frac{2}{p-2}\\ X(p)+Y(p)[p+1]=\frac{1}{p-3}\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p+1, а второе – на 2, и сложим их.

Получим: $X(p)[p+1](p-2)+2X(p)=\frac{2(p+1)}{p-2}+\frac{2}{p-3}=\frac{2(p^2-2p-3+p-2)}{(p-2)(p-3)}$ или $p(p-1)X(p)=\frac{2(p^2-p-5)}{(p-2)(p-3)}$.

Тогда $X(p)=\frac{2(p^2-p-5)}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{2(p^2-p-5)}{p(p-1)(p-2)(p-3)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p-3}=\frac{A(p-1)(p-2)(p-3)+Bp(p-3)(p-2)+Cp(p-3)(p-1)+Dp(p-2)(p-1)}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Приравняем числители:

$A(p-1)(p-2)(p-3)+Bp(p-3)(p-2)+Cp(p-3)(p-1)+Dp(p-2)(p-1)=2(p^2-p-5)$. Полагая p=0, находим A=5/3, при p=1 получим B=-5, при p=2 находим C=3, при p=3 находим D=1/3. Таким образом, $X(p)=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{p}-5\cdot\frac{1}{p-1}+3\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-3}$. Следовательно, $x(t)=\frac{5}{3}-5e^t+3e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t)=\frac{1}{2}x'(t)-x(t)-e^{2t}$, т.е.

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-5e^t+3e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}\right)'-\frac{5}{3}+5e^t-3e^{2t}-\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}=-\frac{5}{3}+\frac{5}{2}e^t-e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=\frac{5}{3}-5e^t+3e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t} \\ y(t)=-\frac{5}{3}+\frac{5}{2}e^t-e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=0,\ M=\sqrt{3};\qquad u(t)=\begin{cases}10t, & 0\le t<2\\ 10(4-t), & 2\le t<4\\ 0, & t\ge 4\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}=u(t)\\ L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\frac{di_1}{dt}=0\end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\frac{di_1}{dt}+10i_1+\sqrt{3}\frac{di_2}{dt}=u(t)\\ 2\frac{di_2}{dt}+\sqrt{3}\frac{di_1}{dt}=0\end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$, $i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\frac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\frac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений

$\begin{cases}2pI_1(p)+10I_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U\\ 2pI_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0\end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой

$\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases}2pX_1(p)+10X_1(p)+\sqrt{3}pX_2(p)=\frac{1}{p}\\ 2pX_2(p)+\sqrt{3}pX_1(p)=0\end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}$ и подставим в первое. Получим: $X_1(p)[2p+10-\frac{3p}{2}]=\frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{p+20}{2}=\frac{1}{p}$.

Отсюда $X_1(p)=\frac{2}{p(p+20)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби: $\frac{2}{p(p+20)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+20}=\frac{A(p+20)+Bp}{p(p+20)}$. Приравняем числители:

$A(p+20)+Bp=2$. Полагая p=0, находим $A=\frac{1}{10}$, при $p=-20$ получим $B=-\frac{1}{10}$. Таким образом,

$X_1(p)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20}$. Следовательно, $x_1(t)=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-20t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-20t}\right)'=2e^{-20t}$, то при t<2 $i_1(t)=\int_0^t 10\tau\cdot 2e^{-20(t-\tau)})d\tau=20e^{-20t}\cdot(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^t=$

$=e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_0^t=t-\frac{1}{20}+\frac{1}{20}e^{-20t}=t-\frac{1}{20}(1-e^{-20t})$.

. При 2≤t<4 получим:

$i_1(t)=\int_0^2 10\tau\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau+\int_2^t 20(4-\tau)\cdot e^{-20(t-\tau)}d\tau=e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_0^2+4e^{-20(t-\tau)}\Big|_2^t-e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_2^t=$

$=\frac{39}{20}e^{-20t+40}+\frac{1}{20}e^{-20t}+4-4e^{-20t+40}-(t-\frac{1}{20})+\frac{39}{20}e^{-20t+40}=\frac{81}{20}-t-\frac{1}{10}(e^{40}-\frac{1}{2})e^{-20t}$. При t≥4 получим:

$i_1(t)=\int_0^2 10\tau\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau+\int_2^4 20(4-\tau)\cdot e^{-20(t-\tau)}d\tau=e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_0^2+4e^{-20(t-\tau)}\Big|_2^4-e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_2^4=$

$=\frac{39}{20}e^{-20t+40}+\frac{1}{20}e^{-20t}+4e^{-20t+80}-4e^{-20t+40}-\frac{79}{20}e^{-20t+80}+\frac{39}{20}e^{-20t+40}=(\frac{1}{20}-\frac{1}{10}e^{40}+\frac{1}{20}e^{80})e^{-20t}$

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20})$, т.е. $x_2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}$. Применяя

формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t)=\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_2'(t)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}\right)'=-\sqrt{3}e^{-20t}$, то при 0≤t<2

$i_2(t)=-\int_0^t 10\tau\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau=-10\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^t \tau e^{20\tau}d\tau=-10\sqrt{3}e^{-20t}(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^t=-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-20t}[(t-\frac{1}{20})e^{20t}+\frac{1}{20}]=$

$=-\frac{\sqrt{3}}{40}(1-e^{-20t})-\frac{\sqrt{3}}{2}t$. При 2≤t<4

$i_2(t)=-\int_0^2 10\tau\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau-\int_2^t 10(4-\tau)\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau=-10\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^2 \tau e^{20\tau}d\tau-40\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^t e^{20\tau}d\tau+$

$+10\sqrt{3}e^{-20t}\int_2^t \tau e^{20\tau}d\tau=-10\sqrt{3}e^{-20t}(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^2-2\sqrt{3}e^{-20t}e^{20\tau}\Big|_2^t+10\sqrt{3}e^{-20t}(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_2^t=$

$=-\frac{39\sqrt{3}}{40}e^{-20t+40}-\frac{\sqrt{3}}{40}e^{-20t}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}e^{-20t+40}+\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{40}-\frac{39\sqrt{3}}{40}e^{-20t+40}=-\frac{81\sqrt{3}}{40}+\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{20}(e^{40}-\frac{1}{2})e^{-20t}$.

При t≥4 $i_2(t)=-\int_0^2 10\tau\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau-\int_2^4 10(4-\tau)\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau=-10\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^2 \tau e^{20\tau}d\tau-40\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^4 e^{20\tau}d\tau+$

$$+10\sqrt{3}e^{-20t}\int_2^4 \tau e^{20\tau}d\tau = -10\sqrt{3}e^{-20t}\left(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400}\right)e^{20\tau}\Big|_0^2 - 2\sqrt{3}e^{-20t}e^{20\tau}\Big|_2^4 + 10\sqrt{3}e^{-20t}\left(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400}\right)e^{20\tau}\Big|_2^4 =$$

$$= -\frac{39\sqrt{3}}{40}e^{-20t+40} - \frac{\sqrt{3}}{40}e^{-20t} - 2\sqrt{3}\,e^{-20t+80} + 2\sqrt{3}\,e^{-20t+40} + \frac{79\sqrt{3}}{40}e^{-20t+80} - \frac{39\sqrt{3}}{40}e^{-20t+40} =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{40} + \frac{\sqrt{3}}{20}e^{40} - \frac{\sqrt{3}}{40}e^{80}\right)e^{-20t}$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t) = t - \frac{1}{20}(1-e^{-20t}) \\ i_2(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{40}(1-e^{-20t}) \end{cases}$ при $0 \le t < 2$ и $\begin{cases} i_1(t) = \frac{81}{20} - t - \frac{1}{10}\left(e^{40} - \frac{1}{2}\right)e^{-20t} \\ i_2(t) = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{40}(1-e^{40})e^{-20t} \end{cases}$ при $2 \le t < 4$.

$\begin{cases} i_1(t) = \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{10}e^{40} + \frac{1}{20}e^{80}\right)e^{-20t} \\ i_2(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{40} + \frac{\sqrt{3}}{20}e^{40} - \frac{\sqrt{3}}{40}e^{80}\right)e^{-20t} \end{cases}$ $t \ge 4$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:
$2tx'' + (2-9t)x' - 5(t+2)x = 0,\ \ x(0) = 1,\ \ x'(0) = 5.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 5$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t) \risingdotseq -\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{pX - 1\} = -(X + p\frac{dX}{dp})$, $tx'' \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2X - p - 5\} = -(2pX + p^2\frac{dX}{dp} - 1)$. Учитывая это, получаем операторное уравнение: $-2(2pX + p^2\frac{dX}{dp} - 1) + 2pX - 2 + 9(X + p\frac{dX}{dp}) + 5\frac{dX}{dp} - 10X = 0$. Или $(-2p^2 + 9p + 5)\frac{dX}{dp} - (2p+1)X = -(p-5)(2p+1)\frac{dX}{dp} - (2p+1)X = 0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:
$(p-5)\frac{dX}{dp} + X = 0;\quad \frac{dX}{X} = -\frac{dp}{p-5};\quad \ln|X| = -\ln|p-5| + \ln C;\quad X(p) = \frac{C}{p-5}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t) = C \cdot e^{5t}$. Так как x(0)=1, то C=1. Окончательно, $x(t) = e^{5t}$

ОТВЕТ: $x(t) = e^{5t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} + u = x,\quad (x > 0,\ \ y > 0)\quad u\big|_{x=0} = y,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y) \risingdotseq U(p,y)$. Тогда $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \risingdotseq p^2U(p,y) - pu(0,y) - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = p^2U(p,y) - py$. Запишем операторное уравнение:

$p^2U - py - \frac{dU}{dy} + U = \frac{1}{p^2}$ или $\frac{dU}{dy} - (p^2+1)U = -py - \frac{1}{p^2}$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(p,y) = C(p,y)e^{(p^2+1)y}$, где C(p,y) – функция, определяемая из уравнения $C'(p,y)e^{(p^2+1)y} = -py - \frac{1}{p^2}$, т.е.

$C(p,y) = -\int (py + \frac{1}{p^2})e^{-(p^2+1)y}dx = \left[\frac{yp}{p^2+1} + \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{1}{p^2(p^2+1)}\right]e^{-(p^2+1)y} + C_1$. Следовательно, решением уравнения будет $U(p,y) = C(p,y)e^{(p^2+1)y} = \frac{yp}{p^2+1} + \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{1}{p^2(p^2+1)} + C_1e^{(p^2+1)y}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p) \to 0$ при $p \to \infty$. Это возможно только тогда, когда C_1=0. Таким образом, $U(p,y) = \frac{yp}{p^2+1} + \frac{p}{(p^2+1)^2} + \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{yp}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}$. Пользуясь таблицами, находим $u(x,y) = y\cos x + \frac{1}{2}x\sin x + x - \sin x$.

ОТВЕТ: $u(x,y) = y\cos x + \frac{1}{2}x\sin x + x - \sin x$.