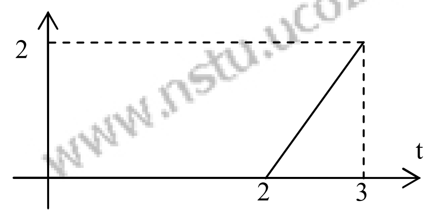
ВАРИАНТ 10
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\cos t\cdot\cos 5t$; **2)** $f(t)=e^{-t}\operatorname{sh}2t+2\operatorname{ch}t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t t\sin^2 4t dt$; **4)** $f(t)=\eta(t-3)\cdot\operatorname{ch}5(t-3)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t e^{9(t-\tau)}\tau^3 d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(t^2-5t+1)\eta(t-6)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\cos t\cdot\cos 5t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем:
$\cos t\cdot\cos 5t=\frac{1}{2}(\cos 4t+\cos 6t)$. По таблицам, $\cos 4t\fallingdotseq\frac{p}{p^2+16}$ и $\cos 6t\fallingdotseq\frac{p}{p^2+36}$. Далее, в силу свойства линейности, $\cos t\cdot\cos 5t\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+16}+\frac{p}{p^2+36}\right)=\frac{p(p^2+26)}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\cos t\cdot\cos 5t\fallingdotseq\frac{p(p^2+26)}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

2) $f(t)=e^{-t}\operatorname{sh}2t+2\operatorname{ch}t$. По таблице находим $\operatorname{ch}t\fallingdotseq\frac{p}{p^2-1}$ и $\operatorname{sh}2t\fallingdotseq\frac{2}{p^2-4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-t}\operatorname{sh}2t\fallingdotseq\frac{2}{(p+1)^2-4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{-t}\operatorname{sh}2t+2\operatorname{ch}t\fallingdotseq\frac{2}{(p+1)^2-4}+\frac{2p}{p^2-1}=\frac{2p^2-2+2p^3+4p^2+2p-8p}{[(p+1)^2-4](p^2-1)}=\frac{2p^3+6p^2-6p-2}{[(p+1)^2-4](p^2-1)}.$$

ОТВЕТ: $e^{-t}\operatorname{sh}2t+2\operatorname{ch}t\fallingdotseq\frac{2p^3+6p^2-6p-2}{[(p+1)^2-4](p^2-1)}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t t\sin^2 4t dt.$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$t\sin^2 4t=\frac{t}{2}(1-\cos 8t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}t\cos 8t$. По таблице находим $\cos 8t\fallingdotseq\frac{p}{p^2+64}$. Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+64}\right)\fallingdotseq-t\cdot\cos 8t$.

Следовательно, $t\cdot\cos 8t\fallingdotseq-\frac{p^2+64-2p^2}{(p^2+64)^2}=\frac{p^2-64}{(p^2+64)^2}$. Так как $t\fallingdotseq\frac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$$\frac{t}{2}-\frac{1}{2}t\cos 8t\fallingdotseq\frac{1}{2p^2}-\frac{p^2-64}{2(p^2+64)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p^2+64)^2-p^2(p^2-64)}{p^2(p^2+64)^2}=\frac{96p^2+64\cdot 32}{p^2(p^2+64)^2}=\frac{32(3p^2+64)}{p^2(p^2+64)^2}.$$

По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int_0^t t\sin^2 4t\,dt \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{32(3p^2+64)}{p^2(p^2+64)^2}=\frac{32(p^2+64)}{p^3(p^2+64)^2}.$$

ОТВЕТ: $\int_0^t t\sin^2 4t\,dt \risingdotseq \dfrac{32(p^2+64)}{p^3(p^2+64)^2}$.

4) $f(t)=\eta(t-3)\cdot \mathrm{ch}\,5(t-3).$ По таблице $\mathrm{ch}5t\cdot\eta(t)\risingdotseq \dfrac{p}{p^2-25}$. Согласно теореме запаздывания

$\eta(t-3)\cdot \mathrm{ch}\,5(t-3)\risingdotseq \dfrac{pe^{-3p}}{p^2-25}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-3)\cdot \mathrm{ch}\,5(t-3)\risingdotseq \dfrac{pe^{-3p}}{p^2-25}$.

5) $f(t)=\int_0^t e^{9(t-\tau)}\tau^3 d\tau.$ Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^3 и e^{9t}. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^3\risingdotseq \dfrac{3!}{p^4}$ и $e^{9t}\risingdotseq \dfrac{1}{p-9}$. Следовательно, $\int_0^t e^{9(t-\tau)}\tau^3 d\tau \risingdotseq \dfrac{6}{p^4(p-9)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t e^{9(t-\tau)}\tau^3 d\tau \risingdotseq \dfrac{6}{p^4(p-9)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<2,\\ 2(t-2), & 2\le t<3,\\ 0, & t\ge 3.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=2(t-2)\cdot\eta(t-2)-2(t-3)\cdot\eta(t-3)-2\eta(t-3)$. Так как $2(t-2)=2(t-3)+2$, то начиная с момента t=3 функция становится равной нулю. По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t)\risingdotseq \dfrac{1}{p}$. Согласно теореме запаздывания $(t-2)\cdot\eta(t-2)\risingdotseq \dfrac{e^{-2p}}{p^2}$, $(t-3)\cdot\eta(t-3)\risingdotseq \dfrac{e^{-3p}}{p^2}$ и $\eta(t-3)\risingdotseq \dfrac{e^{-3p}}{p}$. По свойству линейности получим:

$$f(t)\risingdotseq \frac{2e^{-2p}}{p^2}-\frac{2e^{-3p}}{p^2}-\frac{2e^{-3p}}{p}=2\frac{1-(1+p)e^{-p}}{p^2}\cdot e^{-2p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq 2\dfrac{1-(1+p)e^{-p}}{p^2}\cdot e^{-2p}$.

7) $f(t)=(t^2-5t+1)\eta(t-6).$ Разложим функцию $u(t)=t^2-5t+1$ по степеням (t-6), пользуясь формулой Тейлора (t_0=6): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\dfrac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=2t-5$, $u''(t)=2$, $u'(6)=7$, $u(6)=7$. Тогда $u(t)=7+7(t-6)+(t-6)^2$. Окончательно получаем:

f(t)=u(t)·η(t-6)=[7+7(t-6)+(t-6)^2]·η(t-6).). По таблице $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$ $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{2}{p^3}$.

Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-6) \risingdotseq \frac{e^{-6p}}{p}$, $(t-6)\cdot\eta(t-6) \risingdotseq \frac{e^{-6p}}{p^2}$ и

$(t-6)^2\cdot\eta(t-6) \risingdotseq \frac{2e^{-6p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$f(t) \risingdotseq \frac{7e^{-6p}}{p} + \frac{7e^{-6p}}{p^2} + \frac{2e^{-6p}}{p^3} = (\frac{7}{p} + \frac{7}{p^2} + \frac{2}{p^3})\cdot e^{-6p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq (\frac{7}{p} + \frac{7}{p^2} + \frac{2}{p^3})\cdot e^{-6p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p) = \frac{d}{dp}\left(\frac{5(p+3)}{(p+3)^2+1}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого (p+3)^2 в сумме (p+3)^2+1, стоящей в знаменателе, говорит о том, что косинус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\cos wt \risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+w^2}$.

Действительно, $\frac{5(p+3)}{(p+3)^2+1} = 5\frac{p+3}{(p+3)^2+1^2} \risingdotseq 5e^{-3t}\cos t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{5(p+3)}{(p+3)^2+1}\right) \risingdotseq -5te^{-3t}\cos t$.

ОТВЕТ: : $\frac{d}{dp}\left(\frac{5(p+3)}{(p+3)^2+1}\right) \risingdotseq -5te^{-3t}\cos t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+10p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции F(p)·e^{pt} во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения p(p^2+2p+10)=0 следует, что корнями являются p_1=0, p_2=-1-3i, p_3=-1+3i. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Φ(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p) = \frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае φ(p)=e^{pt}, ψ(p)= p^3+2p^2+10p и $\psi'(p) = 3p^2+4p+10$. Следовательно,

$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{1}{10}$, $\operatorname*{res}_{p=-1-3i}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(-1-3i)}{\psi'(-1-3i)} = \frac{e^{(-1-3i)t}}{3(-1-3i)^2+4(-1-3i)+10} = \frac{e^{(-1-3i)t}}{6(i-3)}$,

$\underset{p=-1+3i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}] = \dfrac{\varphi(-1+3i)}{\psi'(-1+3i)} = \dfrac{e^{(-1+3i)t}}{3(-1+3i)^2+4(-1+3i)+10} = -\dfrac{e^{(-1+3i)t}}{6(i+3)}$. Просуммируем все вычеты:

$$\underset{p=0}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}] + \underset{p=-1-3i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}] + \underset{p=-1+3i}{\mathrm{res}}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{1}{10}+\frac{1}{6}\left(\frac{e^{-3it}}{i-3}-\frac{e^{3it}}{i+3}\right)e^{-t} =$$

$$= \frac{1}{10}+\frac{e^{-3it}(i+3)-e^{3it}(i-3)}{6\cdot 10}\cdot e^{-t} = \frac{1}{10}-\frac{1}{30}(-i\cdot \mathrm{sh}3it+3\mathrm{ch}3it)\cdot e^{-t}] =$$

$= \dfrac{1}{10}-\dfrac{e^{-t}}{30}(3\cos 3t+\sin 3t)$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p^3+2p^2+10p} \risingdotseq \dfrac{1}{10}-\dfrac{e^{-t}}{30}(3\cos 3t+\sin 3t)$

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{4-3p-p^2}{(p-3)(p^2+1)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения (p-3)(p^2+1)=0 следует, что корнями являются p_1=3, p_2=-i, p_3=i. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{4-3p-p^2}{(p-3)(p^2+1)}=\frac{A}{p-3}+\frac{Bp+C}{p^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{4-3p-p^2}{(p-3)(p^2+1)}=\frac{A(p^2+1)+(Bp+C)(p-3)}{(p^2+1)(p-3)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители:
$A(p^2+1)+(Bp+C)(p-3)$ = 4-3p-p^2. Полагая p=3, получим A=-7/5. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=-1 или B=-1-A=-1+7/5=2/5. Приравнивая коэффициенты при p в левой и правой частях равенства, найдём C: -3B+C=-3 или C=-3+3B=-3+6/5=-9/5. Таким образом,

$$\frac{4-3p-p^2}{(p-3)(p^2+1)}=-\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{p-3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$\dfrac{4-3p-p^2}{(p-3)(p^2+1)} \risingdotseq -\dfrac{7}{5}\cdot e^{3t}+\dfrac{2}{5}\cdot\cos t-\dfrac{9}{5}\sin t$.

ОТВЕТ: $\dfrac{4-3p-p^2}{(p-3)(p^2+1)} \risingdotseq \dfrac{2}{5}\cdot\cos t-\dfrac{9}{5}\sin t-\dfrac{7}{5}\cdot e^{3t}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''+10x'+25x=e^{4t}, \quad x(0)=0, x'(0)=3$ **;** **12.** $x''+\dfrac{1}{16}x=6\cos\dfrac{t}{4}, \quad x(0)=0, \ x'(0)=-1$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11.. $x''+10x'+25x=e^{4t}, \quad x(0)=0, x'(0)=3$ **.** Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-3$. По таблице $e^{4t}\risingdotseq\dfrac{1}{p-4}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+10pX(p)+25X(p)-3=\frac{1}{p-4}$ или $X(p)[p^2+10p+25]=\frac{1}{p-4}-3$. Тогда

$X(p)=\frac{13-3p}{(p-4)[p^2+10p+25]}=\frac{13-3p}{(p-4)(p+5)^2}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{13-3p}{(p-4)(p+5)^2}=\frac{A}{p-4}+\frac{B}{p+5}+\frac{C}{(p+5)^2}$. Отсюда $13-3p=A(p+5)^2+B(p+5)(p-4)+C(p-4)$. Если p=4, то $A=\frac{1}{81}$, при $p=-5$ получим $C=\frac{2}{9}$.. Для определения B приравняем коэффициенты при p^2: A+B=0. Отсюда $B=-A=-\frac{1}{81}$. Таким образом, $X(p)=\frac{1}{81(p-4)}-\frac{1}{81(p+5)}+\frac{2}{9(p+5)^2}$.Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим:

$x(t)=\frac{1}{81}e^{4t}-\frac{1}{81}e^{-5t}+\frac{2}{9}te^{-5t}=\frac{1}{9}(28t-\frac{1}{9})e^{-5t}+\frac{1}{81}e^{4t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{1}{9}(28t-\frac{1}{9})e^{-5t}+\frac{1}{81}e^{4t}$.

12. $x''+\frac{1}{16}x=6\cos\frac{t}{4}$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1$. По таблице $6\cos\frac{t}{4}\risingdotseq\frac{6p}{p^2+4^{-2}}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+4^{-2}X(p)+1=\frac{6p}{p^2+4^{-2}}$ или $X(p)[p^2+4^{-2}]=\frac{6p}{p^2+4^{-2}}-1$. Тогда

$X(p)=\frac{6p}{(p^2+4^{-2})^2}-\frac{1}{p^2+4^{-2}}$.

Или $X(p)=-4\frac{2^{-2}}{p^2+4^{-2}}-\frac{6\cdot 4}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{2^{-2}}{p^2+4^{-2}}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t)=-4\sin\frac{t}{4}+12t\cdot\sin\frac{t}{4}=(12t-4)\sin\frac{t}{4}$.

ОТВЕТ: $x(t)=(12t-4)\sin\frac{t}{4}$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x'+x+y=2e^{-2t} \\ y'-3y-3x=e^{t} \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\risingdotseq pX(p)$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{-2t}\risingdotseq\frac{1}{p+2}$, $e^{t}\risingdotseq\frac{1}{p-1}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+1]+Y(p)=\dfrac{2}{p+2} \\ -3X(p)+Y(p)[p-3]=\dfrac{1}{p-1} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p-3 и вычтем из него второе.

Получим:

$X(p)[p+1](p-3)+3X(p)=\dfrac{2(p-3)}{p+2}-\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{2(p^2-4p+3)-p-2}{(p+2)(p-1)}$ или $p(p-2)X(p)=\dfrac{2p^2-9p+4}{(p+2)(p-1)}$. Тогда

$X(p)=\dfrac{2p^2-9p+4}{p(p-2)(p+2)(p-1)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{2p^2-9p+4}{p(p-2)(p+2)(p-1)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+2}=\frac{A(p-1)(p-2)(p+2)+Bp(p-2)(p+2)+Cp(p+2)(p-1)+Dp(p-2)(p-1)}{p(p-1)(p-2)(p+2)}.$$

Приравняем числители:

$A(p-1)(p-2)(p+2)+Bp(p-2)(p+2)+Cp(p+2)(p-1)+Dp(p-2)(p-1)=2p^2-9p+4$. Полагая p=0, находим A=1, при p=1 получим B=1, при p=2 находим C=-3/4, при p=-2 находим D=-5/4. Таким образом, $X(p)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{p+2}$. Следовательно,

$x(t)=1+e^t-\dfrac{3}{4}e^{2t}-\dfrac{5}{4}e^{-2t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t)=2e^{2t}-x'(t)-x(t)$,

т.е. $y(t)=2e^{-2t}-\left(1+e^t-\dfrac{3}{4}e^{2t}-\dfrac{5}{4}e^{-2t}\right)'-1-e^t+\dfrac{3}{4}e^{2t}+\dfrac{5}{4}e^{-2t}=-1-2e^t+\dfrac{9}{4}e^{2t}+\dfrac{3}{4}e^{-2t}$.

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=1+e^t-\dfrac{3}{4}e^{2t}-\dfrac{5}{4}e^{-2t} \\ y(t)=-1-2e^t+\dfrac{9}{4}e^{2t}+\dfrac{3}{4}e^{-2t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=0,\ M=\sqrt{3};\quad u(t)=\begin{cases} 5t, & 0\le t<2 \\ 10e^{-(t-2)}, & t\ge 2 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+10i_1+\sqrt{3}\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+\sqrt{3}\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$,

$i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных

уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+10I_1(p)+\sqrt{3}pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+\sqrt{3}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+10X_1(p)+\sqrt{3}pX_2(p)=\frac{1}{p} \\ 2pX_2(p)+\sqrt{3}pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p+10-\frac{3p}{2}]=\frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{p+20}{2}=\frac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\frac{2}{p(p+20)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби:

$\frac{2}{p(p+20)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+20}=\frac{A(p+20)+Bp}{p(p+20)}$. Приравняем числители: $A(p+20)+Bp=2$. Полагая p=0, находим $A=\frac{1}{10}$, при $p=-20$ получим $B=-\frac{1}{10}$. Таким образом, $X_1(p)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20}$.

Следовательно, $x_1(t)=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-20t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t)=\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-20t}\right)'=2e^{-20t}$, то при t<2 $i_1(t)=\int_0^t 5\tau\cdot 2e^{-20(t-\tau)})d\tau=10e^{-20t}\cdot(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^t=$

$=\frac{1}{2}e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_0^t=\frac{t}{2}-\frac{1}{40}+\frac{1}{40}e^{-20t}=\frac{t}{2}-\frac{1}{40}(1-e^{-20t})$.

. При t≥2 получим:

$i_1(t)=\int_0^2 5\tau\cdot 2e^{-20(t-\tau)}d\tau+\int_2^t 20e^{-(\tau-2)}\cdot e^{-20(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}e^{-20t}\cdot(\tau-\frac{1}{20})e^{20\tau}\Big|_0^2+\frac{20}{19}e^{-20t+2+19\tau}\Big|_2^t=$

$=\frac{39}{40}e^{-20t+40}+\frac{1}{40}e^{-20t}+\frac{20}{19}e^{-t+2}-\frac{20}{19}e^{-20t+40}=\frac{20}{19}e^{2-t}+\frac{1}{40}(1-\frac{59}{19})e^{-20t}$.

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p)=-\frac{\sqrt{3}X_1(p)}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p+20})$, т.е. $x_2(t)=-\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $i_2(0)=0$, получим: $i_2(t)=\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_2'(t)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{20}e^{-20t}\right)'=-\sqrt{3}e^{-20t}$, то при 0≤t<2

$i_2(t)=-\int_0^t 5\tau\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau=-5\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^t \tau e^{20\tau}d\tau=-5\sqrt{3}e^{-20t}(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^t=-\frac{\sqrt{3}}{4}e^{-20t}[(t-\frac{1}{20})e^{20t}+\frac{1}{20}]=$

$=-\frac{\sqrt{3}}{4}t-\frac{\sqrt{3}}{20}(1-e^{-20t})$. При t≥2

$i_2(t)=-\int_0^2 5\tau\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau-\int_2^t 10e^{-(\tau-2)}\cdot\sqrt{3}e^{-20(t-\tau)}d\tau=-5\sqrt{3}e^{-20t}\int_0^2 \tau e^{20\tau}d\tau-10\sqrt{3}e^{-20t+2}\int_2^t e^{19\tau}d\tau=$

$=-5\sqrt{3}e^{-20t}(\frac{\tau}{20}-\frac{1}{400})e^{20\tau}\Big|_0^2-\frac{10\sqrt{3}}{19}e^{-20t+2}e^{19\tau}\Big|_2^t=-\frac{39\sqrt{3}}{80}e^{-20t+40}-\frac{\sqrt{3}}{80}e^{-20t}-\frac{10\sqrt{3}}{19}e^{2-t}+\frac{10\sqrt{3}}{19}e^{-20t+40}=$

$$= -\frac{10\sqrt{3}}{19} e^{2-t} - \frac{\sqrt{3}}{40}(1 - \frac{59}{19} e^{40}) e^{-20t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t) = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{40}(1 - e^{-20t}) \\ i_2(t) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} t - \dfrac{\sqrt{3}}{20}(1 - e^{-20t}) \end{cases}$ при 0≤t<2 и $\begin{cases} i_1(t) = \dfrac{20}{19} e^{2-t} + \dfrac{1}{40}(1 - \dfrac{59}{19}) e^{-20t} \\ i_2(t) = -\dfrac{10\sqrt{3}}{19} e^{2-t} - \dfrac{\sqrt{3}}{40}(1 - \dfrac{59}{19} e^{40}) e^{-20t} \end{cases}$ при t≥2.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами:
$tx'' + (7t+1)x' + 3(4t+1)x = 0,\ \ x(0) = 1,\ \ x'(0) = -3.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$, $\ x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p + 3$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \risingdotseq -\dfrac{d}{dp} F(p)$. В данном случае $tx(t) \risingdotseq -\dfrac{dX}{dp}$,

$tx'(t) \risingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{pX - 1\} = -(X + p\dfrac{dX}{dp})$, $\ tx'' \risingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{p^2 X - p + 3\} = -(2pX + p^2 \dfrac{dX}{dp} - 1)$. Учитывая это, получаем операторное уравнение: $-(2pX + p^2 \dfrac{dX}{dp} - 1) + pX - 1 - 7(X + p\dfrac{dX}{dp}) - 12\dfrac{dX}{dp} + 3X = 0$. Или $(-p^2 - 7p - 12)\dfrac{dX}{dp} - (p+4)X = -(p+3)(p+4)\dfrac{dX}{dp} - (p+4)X = 0$. Таким образом, получилось дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:
$(p+3)\dfrac{dX}{dp} + X = 0;\quad \dfrac{dX}{X} = -\dfrac{dp}{p+3};\quad \ln|X| = -\ln|p+3| + \ln C;\quad X(p) = \dfrac{C}{p+3}$. Переходя к оригиналу, получим $x(t) = C \cdot e^{-3t}$. Так как x(0)=1, то C=1. Окончательно, $x(t) = e^{-3t}$

ОТВЕТ: $x(t) = e^{-3t}$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad (x > 0,\ t > 0)\quad u\big|_{y=0} = A,\ u\big|_{x=0} = B.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y) \risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \risingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p) - A$. Запишем операторное уравнение:

$\dfrac{d^2 U}{dx^2} - pU + A = 0$ или $\dfrac{d^2 U}{dx^2} - pU = -A$. Это линейное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $r^2 - p = 0$ имеет корни $r_1 = -\sqrt{p},\ r_1 = \sqrt{p}$. Следовательно, решением однородного уравнения будет $U(x,p) = C_1 e^{-\sqrt{p}\cdot x} + C_2 e^{\sqrt{p}\cdot x}$. Частное решение неоднородного уравнения очевидно: $U_1 = \dfrac{A}{p}$. Тогда общим решением неоднородного уравнения будет $U(x,p) = C_1 e^{-\sqrt{p}\cdot x} + C_2 e^{\sqrt{p}\cdot x} + \dfrac{A}{p}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p) \to 0$ при $p \to \infty$. Это возможно только тогда, когда C_2=0. Таким образом,

$U(x,p)=C_1 e^{-\sqrt{p}\cdot x}+\frac{A}{p}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{B}{p}$, найдём $C_1=\frac{B-A}{p}$.

Следовательно, $U(x,p)=\frac{A+B}{p}e^{-\sqrt{p}\cdot x}-\frac{A}{p}$. Для нахождения оригинала функции

воспользуемся соотношением $\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}\risingdotseq \mathrm{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, где $\mathrm{Erf}(\tau)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\tau}^{\infty}e^{-z^2}dz=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{\tau}e^{-z^2}dz$. В

данном случае $u(x,y)=(B-A)\cdot \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right)+A=A+(B-A)(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{x/2\sqrt{y}}e^{-z^2}dz)$.

ОТВЕТ: $u(x,t)=A+(B-A)(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{x/2\sqrt{y}}e^{-z^2}dz)$