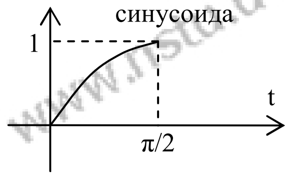
ВАРИАНТ 11
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\sin 2t\cdot\cos 3t$; **2)** $f(t)=t^2/2+e^{-2t}\mathrm{sh}4t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{ch}^2 3\tau d\tau$; **4)** $f(t)=\eta(t-7)\mathrm{ch}\,4(t-7)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t e^{2\tau}(t-\tau)^5 d\tau$;

6)



7) $f(t)=(\frac{t^2}{2}-4t+1)\eta(t-8)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\sin 2t\cdot\cos 3t.$ Используем тригонометрическую формулу. Имеем: $\sin 2t\cdot\cos 3t=\frac{1}{2}(\sin(-t)+\sin 5t)=\frac{1}{2}(-\sin t+\sin 5t).$ По таблицам, $\sin t\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}$ и $\sin 5t\risingdotseq\frac{5}{p^2+25}$. Далее, в силу свойства линейности,

$$\sin 2t\cdot\cos 3t\risingdotseq\frac{1}{2}(-\frac{1}{p^2+1}+\frac{5}{p^2+25})=\frac{2(p^2-5)}{(p^2+1)(p^2+25)}.$$

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin 2t\cdot\cos 3t\risingdotseq\frac{2(p^2-5)}{(p^2+1)(p^2+25)}$

2) $f(t)=t^2/2+e^{-2t}\mathrm{sh}4t.$ По таблице находим $t^2\risingdotseq\frac{2}{p^3}$ и $\mathrm{sh}4t\risingdotseq\frac{4}{p^2-16}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-2t}\mathrm{sh}4t\risingdotseq\frac{4}{(p+2)^2-16}$ и, по свойству линейности получаем:

$$t^2/2+e^{-2t}\mathrm{sh}4t\risingdotseq\frac{1}{p^3}+\frac{4}{(p+2)^2-16}=\frac{p^2+4p+4-16+4p^3}{[(p+2)^2-16]p^3}=\frac{4p^3+p^2+4p-12}{[(p+2)^2-16]p^3}.$$

ОТВЕТ: $t^2/2+e^{-2t}\mathrm{sh}4t.\risingdotseq\frac{4p^3+p^2+4p-12}{[(p+2)^2-16]p^3}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{ch}^2 3\tau d\tau.$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$t\,\mathrm{ch}^2 3t=\frac{t}{2}(\mathrm{ch}6t+1)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}t\,\mathrm{ch}6t$. По таблице находим $\mathrm{ch}6t\risingdotseq\frac{p}{p^2-36}$. Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2-36}\right)\risingdotseq-t\cdot\mathrm{ch}6t$. Следовательно,

$t\cdot\mathrm{ch}6t\risingdotseq-\frac{p^2-36-2p^2}{(p^2-36)^2}=\frac{p^2+36}{(p^2-36)^2}$. Так как $t\risingdotseq\frac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{2}t\,\mathrm{ch}6t\risingdotseq\frac{1}{2p^2}+\frac{p^2+36}{2(p^2-36)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p^2-36)^2+p^2(p^2+36)}{p^2(p^2-36)^2}=\frac{p^4-18p^2+648}{p^2(p^2-16)^2}=\frac{(p^2-9)^2+567}{p^2(p^2-16)^2}.$$

По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int_0^t \tau ch^2 3\tau d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{(p^2-9)^2+567}{p^2(p^2-36)^2} = \frac{(p^2-9)^2+567}{p^3(p^2-36)^2}.$$

ОТВЕТ: $\int_0^t \tau ch^2 3\tau d\tau \risingdotseq \frac{(p^2-9)^2+567}{p^3(p^2-36)^2}$.

4) $f(t)=\eta(t-7)\cdot ch4(t-7)$. По таблице $ch4t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{p}{p^2-16}$. Согласно теореме запаздывания

$\eta(t-7)\cdot ch4(t-7) \risingdotseq \frac{pe^{-7p}}{p^2-16}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-7)\cdot ch4(t-7) \risingdotseq \frac{pe^{-7p}}{p^2-16}$.

5) $f(t)=\int_0^t e^{2\tau}(t-\tau)^5 d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^5 и e^{2t}. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^5 \risingdotseq \frac{5!}{p^6}$ и $e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2}$. Следовательно, $\int_0^t e^{2\tau}(t-\tau)^5 d\tau \risingdotseq \frac{120}{p^6(p-2)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t e^{2\tau}(t-\tau)^5 d\tau \risingdotseq \frac{120}{p^6(p-2)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin t, & 0\le t<\pi/2,\\ 0, & t\ge\pi/2.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=\sin t\cdot\eta(t)-\cos(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)$. Так как $\sin t=\cos(t-\pi/2)$, то начиная с момента $t=\pi/2$ синусоиды уничтожаются. По таблице $\sin t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$.

Согласно теореме запаздывания $\cos(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \frac{pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$. По свойству линейности получим: $f(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}-\frac{pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}=\frac{1-pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq \frac{1-pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$.

7) $f(t)=(\frac{t^2}{2}-4t+1)\eta(t-8)$. Разложим функцию $u(t)=(\frac{t^2}{2}-4t+1)$ по степеням (t-8), пользуясь формулой Тейлора (t_0=8): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=t-4$, $u''(t)=1$, $u'(8)=4$, $u(8)=1$. Тогда $u(t)=1+4(t-8)+(t-8)^2/2$. Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-8)=[1+4(t-8)+(t-8)^2/2]\cdot\eta(t-8)$.). По таблице $1\cdot\eta(t)\fallingdotseq\frac{1}{p}$, $t\cdot\eta(t)\fallingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\fallingdotseq\frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-8)\fallingdotseq\frac{e^{-8p}}{p}$, $(t-8)\cdot\eta(t-8)\fallingdotseq\frac{e^{-8p}}{p^2}$ и $(t-8)^2\cdot\eta(t-8)\fallingdotseq\frac{2e^{-8p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$$f(t)\fallingdotseq\frac{e^{-8p}}{p}+\frac{4e^{-8p}}{p^2}+\frac{2e^{-8p}}{2p^3}=\left(\frac{1}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{1}{p^3}\right)\cdot e^{-8p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\fallingdotseq\left(\frac{1}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{1}{p^3}\right)\cdot e^{-8p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-1)^2+16}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p-1)^2$ в сумме $(p-1)^2+16$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что синус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\sin wt\fallingdotseq\frac{w}{(p-\lambda)^2+w^2}$.

Действительно, $\frac{8}{(p-1)^2+16}=2\frac{4}{(p-1)^2+4^2}\fallingdotseq 2e^t\sin 4t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-1)^2+16}\right)\fallingdotseq -2te^t\sin 4t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{8}{(p-1)^2+16}\right)\fallingdotseq -2te^t\sin 4t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3-6p^2+10p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-6p+10)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=3-i$, $p_3=3+i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом $\Phi(p)$, то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p^3-6p^2+10p$ и $\psi'(p)=3p^2-12p+10$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{10},\quad \operatorname*{res}_{p=3-i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(3-i)}{\psi'(3-i)}=\frac{e^{(3-i)t}}{3(3-i)^2-12(3-i)+10}=-\frac{e^{(3-i)t}}{2(3i+1)},$$

$\operatorname*{res}\limits_{p=3+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(3+i)}{\psi'(3+i)}=\frac{e^{(3+i)t}}{3(3+i)^2-12(3+i)+10}=\frac{e^{(3+i)t}}{2(3i-1)}$. Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}\limits_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}\limits_{p=3-i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}\limits_{p=3+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-it}}{3i+1}+\frac{e^{it}}{3i-1}\right)e^{3t}=$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{-e^{-it}(3i-1)+e^{it}(3i+1)}{2\cdot 10}\cdot e^{3t}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}(3i\cdot \operatorname{sh}3it+\operatorname{ch}3it)\cdot e^{3t}]=$$

$=\frac{1}{10}-\frac{e^{3t}}{30}(\cos 3t-3\sin 3t)$. Здесь учтено, что $\cos(t)=\operatorname{ch}(it)$, а $\sin(t)=-i\cdot\operatorname{sh}(it)$.

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^3-6p^2+10p}\risingdotseq=\frac{1}{10}-\frac{e^{3t}}{30}(\cos 3t-3\sin 3t)$

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{-8e^{-8p}}{(p-6)(p-10)^2}.$$

РЕШЕНИЕ

Разложим функцию $\Phi(p)=\frac{-8}{(p-6)(p-10)^2}$ на простые дроби. Корнями знаменателя являются $p_1=6$, $p_2=10$, причём корень $p_2=10$ имеет кратность 2.

Следовательно, разложение имеет вид: $\frac{-8e^{-8p}}{(p-6)(p-10)^2}=\frac{A}{p-6}+\frac{B}{p-10}+\frac{C}{(p-10)^2}$.

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-8}{(p-6)(p-10)^2}=\frac{A(p-10)^2+B(p-6)(p-10)+C(p-6)}{(p-6)(p-10)^2}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители:
$A(p-10)^2+B(p-6)(p-10)+C(p-6)=-8$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения A и C. Полагая p=6, получим A=-1/2, при p=10 получим C=-2. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=0 или B=-A=1/2. Таким образом,

$$\frac{-8}{(p-6)(p-10)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-10}-2\cdot\frac{1}{(p-10)^2}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:
$\frac{-8}{(p-6)(p-10)^2}\risingdotseq-\frac{1}{2}e^{6t}+\frac{1}{2}\cdot e^{10t}-2t\cdot e^{10t}$. Зная оригинал для $\Phi(p)$, можно найти оригинал для $\Phi(p)e^{-8p}$, опираясь на теорему запаздывания:

$\frac{-8e^{-8p}}{(p-6)(p-10)^2}\risingdotseq-\frac{1}{2}e^{6(t-8)}+\frac{1}{2}\cdot e^{10(t-8)}-2(t-8)\cdot e^{10(t-8)}$. Или

$\frac{-8e^{-8p}}{(p-6)(p-10)^2}\risingdotseq-\frac{1}{2}e^{6(t-8)}+(\frac{1}{2}-2t+16)\cdot e^{10(t-8)}=-\frac{1}{2}e^{6(t-8)}+\frac{33-4t}{2}\cdot e^{10(t-8)}$

ОТВЕТ: $\frac{-8e^{-8p}}{(p-6)(p-10)^2}\risingdotseq\frac{33-4t}{2}\cdot e^{10(t-8)}-\frac{1}{2}e^{6(t-8)}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''-2x'-3x=6\operatorname{sh}t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-4$ **;** **12.** $x''+\frac{1}{4}x=5\cos\frac{t}{2},\quad x(0)=0,\ x'(0)=3$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x'' - 2x' - 3x = 6\operatorname{sh}t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -4$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 4$. По таблице $6\operatorname{sh}t \risingdotseq \frac{6}{p^2-1}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p) - 2pX(p) - 3X(p) + 4 = \frac{6}{p^2-1}$ или $X(p)[p^2 - 2p - 3] = \frac{6}{p^2-1} - 4$. Тогда

$X(p) = \frac{10-4p^2}{(p^2-1)[p^2-2p-3]} = \frac{10-4p^2}{(p-3)(p+1)^2(p-1)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{10-4p^2}{(p-3)(p+1)^2(p-1)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{(p+1)^2}$. Отсюда

$10 - 4p^2 = A(p-1)(p+1)^2 + B(p-3)(p+1)^2 + C(p-1)(p-3)(p+1) + D(p-1)(p-3)$. Если p=3, то

$A = -\frac{13}{16}$, при $p = 1$ получим $B = -\frac{3}{4}$, при $p = -1$ получим $D = \frac{3}{4}$. Для определения C

приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C = \frac{25}{16}$. Таким образом,

$X(p) = -\frac{13}{16(p-3)} - \frac{3}{4(p-1)} + \frac{25}{16(p+1)} + \frac{3}{4(p+1)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой

смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t) = -\frac{13}{16}e^{3t} - \frac{3}{4}e^{t} + \frac{25}{16}e^{-t} + \frac{3}{4}te^{-t}$.

ОТВЕТ: $x(t) = -\frac{13}{16}e^{3t} - \frac{3}{4}e^{t} + \frac{12t+25}{16}e^{-t}$

12. $x'' + \frac{1}{4}x = 5\cos\frac{t}{2}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 3$**.** Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 3$. По таблице $5\cos\frac{t}{2} \risingdotseq \frac{5p}{p^2 + 2^{-2}}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p) + 2^{-2}X(p) - 3 = \frac{5p}{p^2+2^{-2}}$ или $X(p)[p^2 + 2^{-2}] = \frac{5p}{p^2+2^{-2}} + 3$. Тогда

$X(p) = \frac{5p}{(p^2+2^{-2})^2} + \frac{3}{p^2+2^{-2}}$.

Или $X(p) = 3\cdot 2\frac{2^{-1}}{p^2+2^{-2}} - \frac{5\cdot 2}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{2^{-1}}{p^2+2^{-2}}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t) = 6\sin\frac{t}{2} + 5t\cdot\sin\frac{t}{2} = (5t+6)\sin\frac{t}{2}$.

ОТВЕТ: $x(t) = (5t+6)\sin\frac{t}{2}$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x' - x - y = e^{2t} \\ y' + 3y + 3x = 2e^{-t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть x(t)$\risingdotseq$X(p), y(t)$\risingdotseq$Y(p). Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2}$, $e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p-1]-Y(p)=\dfrac{1}{p-2} \\ 3X(p)+Y(p)[p+3]=\dfrac{2}{p+1} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p+3 и сложим со вторым.

Получим: $X(p)[p-1](p+3)+3X(p)=\frac{p+3}{p-2}+\frac{2}{p+1}=\frac{p^2+4p+3+2p-4}{(p-2)(p+1)}$ или $p(p+2)X(p)=\frac{p^2+6p-1}{(p-2)(p+1)}$.

Тогда $X(p)=\frac{p^2+6p-1}{p(p+2)(p+1)(p-2)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{p^2+6p-1}{p(p-2)(p+2)(p+1)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+2}=\frac{A(p+1)(p-2)(p+2)+Bp(p-2)(p+2)+Cp(p+2)(p+1)+Dp(p-2)(p+1)}{p(p+1)(p-2)(p+2)}.$$

Приравняем числители:
$A(p+1)(p-2)(p+2)+Bp(p-2)(p+2)+Cp(p+2)(p+1)+Dp(p-2)(p+1)=p^2+6p-1$. Полагая p=0, находим A=1/4, при p=1 получим B=-2, при p=2 находим C=5/8, при p=-2 находим D=9/8. Таким образом, $X(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}-2\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{p+2}$. Следовательно,

$x(t)=\frac{1}{4}-2e^{t}+\frac{5}{8}e^{2t}+\frac{9}{8}e^{-2t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t)=x'(t)-x(t)-2e^{2t}$,

т.е. $y(t)=\left(\frac{1}{4}-2e^{-t}+\frac{5}{8}e^{2t}+\frac{9}{8}e^{-2t}\right)'-\frac{1}{4}+2e^{-t}-\frac{5}{8}e^{2t}-\frac{9}{8}e^{-2t}-e^{2t}=-\frac{1}{4}+4e^{-t}-\frac{3}{8}e^{2t}-\frac{27}{8}e^{-2t}$.

ОТВЕТ: $$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{4}-2e^{t}+\dfrac{5}{8}e^{2t}+\dfrac{9}{8}e^{-2t} \\ y(t)=-\dfrac{1}{4}+4e^{-t}-\dfrac{3}{8}e^{2t}-\dfrac{27}{8}e^{-2t} \end{cases}.$$

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=10,\ M=2;\qquad u(t)=\begin{cases} 20t, & 0\le t<2 \\ 40, & t\ge 2 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$$ В данном случае $$\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+10i_1+2\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+10i_2+2\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$$ Пусть u(t)$\risingdotseq$U(p),

$i_1(t) \risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t) \risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\frac{di_1}{dt} \risingdotseq pI_1(p)$ и $\frac{di_2}{dt} \risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases}2pI_1(p)+10I_1(p)+2pI_2(p)=U\\ 2pI_2(p)+10I_2(p)+2pI_1(p)=0\end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases}2pX_1(p)+10X_1(p)+2pX_2(p)=\dfrac{1}{p}\\ 2pX_2(p)+10X_2(p)+2pX_1(p)=0\end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\frac{pX_1(p)}{p+5}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p+10-\frac{2p^2}{p+5}]=\frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{10(2p+5)}{p+5}=\frac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\frac{p+5}{10p(2p+5)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби. Очевидно, что $\frac{p+5}{10p(2p+5)}=\frac{1}{10}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2p+5})$. Следовательно, $x_1(t)=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)$=1/20, получим: $i_1(t)=u(t)x_1(0)+\int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_1'(t)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)'=\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при t<2

$$i_1(t)=20t\cdot\frac{1}{20}+\int_0^t 20\tau\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=t+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^t=2t-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}t}=2t-\frac{2}{5}(1-e^{-\frac{5}{2}t}).$$

. При t≥2 получим:

$$i_1(t)=40\cdot\frac{1}{20}+\int_0^2 20\tau\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int_2^t 40\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=2+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^2+5\cdot\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Big|_2^t=$$

$$=2+\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}t+5}+\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}t}+2-2e^{-\frac{5}{2}t+5}=4-\frac{2}{5}(e^5-1)e^{-\frac{5}{2}t}.$$

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p)=-\frac{pX_1(p)}{p+5}=-\frac{p}{p+5}\cdot\frac{p+5}{10p(2p+5)}=-\frac{1}{10(2p+5)}$, т.е. $x_2(t)=-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)$=-1/20, получим: $i_2(t)=u(t)x_2(0)+\int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t)=\left(-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)'=\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при 0≤t<2

$$i_2(t)=-20t\cdot\frac{1}{20}+\int_0^t 20\tau\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=-t+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\int_0^t \tau e^{\frac{5}{2}\tau}d\tau=-t+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^t=-\frac{2}{5}(1-e^{-\frac{5}{2}t})$$

. При t≥2

$$i_2(t)=-40\cdot\frac{1}{20}+\int_0^2 20\tau\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int_2^t 40\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=-2+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^2+5\cdot\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Big|_2^t=$$

$$=-2+\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}t+5}+\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}t}+2-2\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}t+5}=-\frac{2}{5}(e^5-1)e^{-\frac{5}{2}t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t) = 2t - \dfrac{2}{5}(1 - e^{-\frac{5}{2}t}) \\ i_2(t) = -\dfrac{2}{5}(1 - e^{-\frac{5}{2}t}) \end{cases}$ при 0≤t<2 и $\begin{cases} i_1(t) = 4 - \dfrac{2}{5}(e^5 - 1)e^{-\frac{5}{2}t} \\ i_2(t) = -\dfrac{2}{5}(e^5 - 1)e^{-\frac{5}{2}t} \end{cases}$ при t≥2.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами: $tx'' - (4t+3)x' + 2(2t+3)x = 0.$

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \fallingdotseq X(p)$, то $x'(t) \fallingdotseq pX(p) - x(0)$, $x''(t) \fallingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \fallingdotseq -\dfrac{d}{dp}F(p)$. В данном случае tx(t)$\fallingdotseq -\dfrac{dX}{dp}$,

$tx'(t) \fallingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{pX - x(0)\} = -(X + p\dfrac{dX}{dp})$, $tx'' \fallingdotseq -\dfrac{d}{dp}\{p^2X - px(0) - x'(0)\} = -(2pX + p^2\dfrac{dX}{dp} - x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение:

$-(2pX + p^2\dfrac{dX}{dp} - x(0)) - 3(pX - x(0)) + 4(X + p\dfrac{dX}{dp}) - 4\dfrac{dX}{dp} + 6X = 0$. Или

$(-p^2 + 4p - 4)\dfrac{dX}{dp} - 5(p-2)X + 4x(0) = -(p-2)^2\dfrac{dX}{dp} - 5(p-2)X + 4x(0) = 0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\dfrac{dX}{dp} + \dfrac{5}{(p-2)}X = \dfrac{4x(0)}{(p-2)^2}$. Применим метод Бернулли. Если $X(p) = U \cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями:

$\dfrac{dU}{dp} + \dfrac{5}{(p-2)}U = 0;\quad UV' = \dfrac{4x(0)}{(p-2)^2}$. Таким образом, $\dfrac{dU}{U} = -\dfrac{5dp}{p-2};\quad \ln|U| = -5\ln|p-2|;\quad U(p) = \dfrac{1}{(p-2)^5}$.

Подставим это во второе уравнение:

$\dfrac{V'}{(p-2)^5} = \dfrac{4x(0)}{(p-2)^2}$ или $V' = 4x(0)(p-2)^3$. Тогда $V = x(0)(p-2)^4 + C$. Следовательно,

$X(p) = \dfrac{x(0)(p-2)^4 + C}{(p-2)^5} = \dfrac{x(0)}{p-2} + \dfrac{C}{4!}\cdot\dfrac{4!}{(p-2)^5}$ Переходя к оригиналу, получим $x(t) = e^{2t}(x(0) + Ct^4)$.

ОТВЕТ: $x(t) = e^{2t}(x(0) + Ct^4)$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (x > 0,\ t > 0)\quad u|_{t=0} = 5, u|_{x=0} = 8.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,t) \fallingdotseq U(x,p)$. Тогда $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \fallingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p) - 5$. Запишем операторное уравнение: $4\dfrac{d^2U}{dx^2} = pU - 5$ или $4\dfrac{d^2U}{dx^2} - pU = -5$. Это линейное уравнение второго порядка.

Его характеристическое уравнение $4r^2 - p = 0$ имеет корни $r_1 = -\dfrac{\sqrt{p}}{2}$, $r_1 = \dfrac{\sqrt{p}}{2}$.

Следовательно, решением однородного уравнения будет $U(x,p) = C_1e^{-\frac{\sqrt{p}}{2}\cdot x} + C_2e^{\frac{\sqrt{p}}{2}\cdot x}$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $U_1 = A$. Подставляя в уравнение, получим: $-pA=-5$ или $A=\frac{5}{p}$. Общим решением уравнения будет

$U(x,p)=C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{2}\cdot x}+C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{2}\cdot x}+\frac{5}{p}$. По свойству изображений Лапласа $U(x,p)\to 0$ при $p\to\infty$. Это возможно только тогда, когда $C_2=0$. Таким образом, $U(x,p)=C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{2}\cdot x}+\frac{5}{p}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{8}{p}$, найдём $C_1=\frac{3}{p}$. Следовательно, $U(x,p)=\frac{3}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{2}}\cdot x}+\frac{5}{p}$.

Для нахождения оригинала функции воспользуемся соотношением $\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}\risingdotseq \mathrm{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$,

где $\mathrm{Erf}(\tau)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{\tau}^{\infty}e^{-z^2}dz=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{\tau}e^{-z^2}dz$. В данном случае

$$u(x,t)=3\cdot \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right)+5=3(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{x/4\sqrt{t}}e^{-z^2}dz)+5.$$

ОТВЕТ: $u(x,t)=3(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{x/4\sqrt{t}}e^{-z^2}dz)+5$