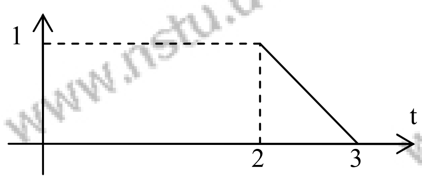
ВАРИАНТ 12
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\sin t\cdot\cos 2t$; **2)** $f(t)=e^{5t}\mathrm{sh}3t+3t$; **3)** $f(t)=\int\limits_0^t \tau\mathrm{ch}^2 4\tau d\tau$; **4)** $f(t)=\eta(t-5)\cdot\mathrm{ch}\,3(t-5)$;

5) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^2\sin 3\tau d\tau$; **6)**



7) $f(t)=(\frac{t^2}{3}-3t-2)\eta(t-9)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\sin t\cdot\cos 2t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем:

$\sin t\cdot\cos 2t=\frac{1}{2}(\sin(-t)+\sin 3t)=\frac{1}{2}(-\sin t+\sin 3t)$. По таблицам, $\sin t\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}$ и $\sin 3t\risingdotseq\frac{3}{p^2+9}$.

Далее, в силу свойства линейности, $\sin t\cdot\cos 2t\risingdotseq\frac{1}{2}(-\frac{1}{p^2+1}+\frac{3}{p^2+9})=\frac{p^2-3}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin t\cdot\cos 2t\risingdotseq\frac{p^2-3}{(p^2+1)(p^2+9)}$

2) $f(t)=e^{5t}\mathrm{sh}3t+3t$. По таблице находим $t\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $\mathrm{sh}3t\risingdotseq\frac{3}{p^2-9}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{5t}\mathrm{sh}3t\risingdotseq\frac{3}{(p-5)^2-9}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{5t}\mathrm{sh}3t+3t\risingdotseq\frac{3}{(p-5)^2-9}+\frac{3}{p^2}=\frac{3p^2+3p^2-30p+75-27}{[(p-5)^2-9]p^2}=\frac{6p^2-30p+48}{[(p-5)^2-9]p^2}.$$

ОТВЕТ: $e^{5t}\mathrm{sh}3t+3t\risingdotseq\frac{6p^2-30p+48}{[(p-5)^2-9]p^2}$.

3) $f(t)=\int\limits_0^t \tau\mathrm{ch}^2 4\tau d\tau$.. Преобразуем подынтегральную функцию:

$t\mathrm{ch}^2 4t=\frac{t}{2}(\mathrm{ch}8t+1)=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}t\,\mathrm{ch}8t$. По таблице находим $\mathrm{ch}8t\risingdotseq\frac{p}{p^2-64}$. Применяя теорему о дифференцировании изображения, получим: $\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2-64}\right)\risingdotseq-t\cdot\mathrm{ch}8t$. Следовательно,

$$t\cdot\mathrm{ch}8t\risingdotseq-\frac{p^2-64-2p^2}{(p^2-64)^2}=\frac{p^2+64}{(p^2-64)^2}.$$

Так как $t\risingdotseq\frac{1}{p^2}$, то с использованием свойства линейности, получим:

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{2}t\,\mathrm{ch}8t\risingdotseq\frac{1}{2p^2}+\frac{p^2+64}{2(p^2-64)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p^2-64)^2+p^2(p^2+64)}{p^2(p^2-64)^2}=\frac{p^4-32p^2+64\cdot 32}{p^2(p^2-64)^2}=\frac{(p^2-16)^2+7\cdot 4^4}{p^2(p^2-64)^2}.$$

По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом,

$$\int_0^t \operatorname{tch}^2 3t d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{(p^2-16)^2+7\cdot 4^4}{p^2(p^2-64)^2}=\frac{(p^2-16)^2+7\cdot 4^4}{p^3(p^2-64)^2}.$$

ОТВЕТ: $\int_0^t \operatorname{tch}^2 3t d\tau \risingdotseq \frac{(p^2-16)^2+7\cdot 4^4}{p^3(p^2-64)^2}$.

4) $f(t)=\eta(t-5)\cdot\operatorname{ch}3(t-5)$. По таблице $\operatorname{ch}3t\cdot\eta(t)\risingdotseq \frac{p}{p^2-9}$. Согласно теореме запаздывания

$$\eta(t-5)\cdot\operatorname{ch}3(t-5)\risingdotseq\frac{pe^{-5p}}{p^2-9}.$$

ОТВЕТ: $\eta(t-5)\cdot\operatorname{ch}3(t-5)\risingdotseq\frac{pe^{-5p}}{p^2-9}$.

5) $f(t)=\int_0^t (t-\tau)^2\sin 3\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^2 и $\sin 3t$. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^2\risingdotseq\frac{2}{p^3}$ и $\sin 3t\risingdotseq\frac{3}{p^2+9}$. Следовательно, $\int_0^t (t-\tau)^2\sin 3\tau d\tau\risingdotseq\frac{6}{p^3(p^2+9)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t (t-\tau)^2\sin 3\tau d\tau\risingdotseq\frac{6}{p^3(p^2+9)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<2,\\ 3-t, & 2\le t<3,\\ 0, & t\ge 3.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=(3-t)\cdot\eta(t-2)+(t-3)\cdot\eta(t-3)=-(t-2)\cdot\eta(t-2)+1\cdot\eta(t-2)+(t-3)\cdot\eta(t-3)$.
Очевидно, что начиная с момента t=3 функция становится равной нулю. По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$. Согласно теореме запаздывания $(t-2)\cdot\eta(t-2)\risingdotseq\frac{e^{-2p}}{p^2}$, $(t-3)\cdot\eta(t-3)\risingdotseq\frac{e^{-3p}}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t-2)\risingdotseq\frac{e^{-2p}}{p}$. По свойству линейности получим:

$$f(t)\risingdotseq -\frac{e^{-2p}}{p^2}+\frac{e^{-3p}}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{p}=\frac{p-1+e^{-p}}{p^2}\cdot e^{-2p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq\frac{p-1+e^{-p}}{p^2}\cdot e^{-2p}$.

7) $f(t)=(\frac{t^2}{3}-3t-2)\eta(t-9)$. Разложим функцию $u(t)=(\frac{t^2}{3}-3t-2)$ по степеням (t-9), пользуясь формулой Тейлора (t_0=9): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем:

$u'(t) = \frac{2}{3}t -$, $u''(t)=\frac{2}{3}$, $u'(9)=3$, $u(9)=-2$. Тогда $u(t)=-2+3(t-9)+(t-9)^2/3$.

Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-9)=[-2+3(t-9)+(t-9)^2/3]\cdot\eta(t-9)$.). По таблице $1\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и

$t^2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-9)\risingdotseq\frac{e^{-9p}}{p}$, $(t-9)\cdot\eta(t-9)\risingdotseq\frac{e^{-9p}}{p^2}$ и

$(t-9)^2\cdot\eta(t-9)\risingdotseq\frac{2e^{-9p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$$f(t)\risingdotseq\frac{-2e^{-9p}}{p}+\frac{3e^{-9p}}{p^2}+\frac{2e^{-9p}}{3p^3}=\left(\frac{2}{3p^3}+\frac{3}{p^2}-\frac{2}{p}\right)\cdot e^{-9p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq\left(\frac{2}{3p^3}+\frac{3}{p^2}-\frac{2}{p}\right)\cdot e^{-9p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{9}{(p+1)^2+9}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p+1)^2$ в сумме $(p+1)^2+9$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что синус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\sin wt\risingdotseq\frac{w}{(p-\lambda)^2+w^2}$.

Действительно, $\frac{9}{(p+1)^2+9}=3\frac{3}{(p+1)^2+3^2}\risingdotseq 3e^{-t}\sin 3t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{9}{(p+1)^2+9}\right)\risingdotseq -3te^{-t}\sin 3t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{9}{(p+1)^2+9}\right)\risingdotseq -3te^{-t}\sin 3t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+6p^2+10p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+6p+10)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-3-i$, $p_3=-3+i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Ф(p), то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p^3+6p^2+10p$ и $\psi'(p)=3p^2+12p+10$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{10}\;,\quad \operatorname*{res}_{p=-3-i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-3-i)}{\psi'(-3-i)}=\frac{e^{(-3-i)t}}{3(-3-i)^2+12(-3-i)+10}=\frac{e^{(-3-i)t}}{2(3i+1)}\,,$$

$$\operatorname*{res}_{p=-3+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-3+i)}{\psi'(-3+i)}=\frac{e^{(-3+i)t}}{3(-3+i)^2+12(-3+i)+10}=-\frac{e^{(-3+i)t}}{2(3i+1)}.$$ Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=-3-i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=-3+i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-it}}{3i-1}-\frac{e^{it}}{3i+1}\right)e^{-3t}=$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{e^{-it}(3i+1)-e^{it}(3i-1)}{2\cdot 10}\cdot e^{-3t}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}(-3i\cdot \mathrm{sh}it+\mathrm{ch}it)\cdot e^{-3t}=$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{e^{-3t}}{10}(\cos t+3\sin t)$$. Здесь учтено, что $\cos(t)=\mathrm{ch}(it)$, а $\sin(t)=-i\cdot\mathrm{sh}(it)$.

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p^3+6p^2+10p}\risingdotseq\dfrac{1}{10}-\dfrac{e^{-3t}}{10}(\cos t+3\sin t)$

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{2}{p^2(p^2-7p+10)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p^2(p^2-7p+10)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=2$, $p_3=5$. Корень $p_1=0$ имеет кратность 2.
Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{2}{p^2(p^2-7p+10)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p-5}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{2}{p^2(p^2-7p+10)}=\frac{Ap(p-2)(p-5)+B(p-2)(p-5)+Cp^2(p-5)+Dp^2(p-2)}{p^2(p-2)(p-5)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители: $Ap(p-2)(p-5)+$ $+B(p-2)(p-5)+Cp^2(p-5)+Dp^2(p-2)=2$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения B, C, D. Полагая p=0, получим B=1/5, при p=2 получим C=-1/6, при p=5 находим D=2/75. Приравнивая коэффициенты при p^3 в левой и правой частях равенства, найдём A: A+C+D=0 или A=-(C+D)=-(-1/6+2/75)=7/50. Таким образом,

$$\frac{2}{p^2(p^2-7p+10)}=\frac{7}{50}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{2}{75}\cdot\frac{1}{p-5}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{2}{p^2(p^2-7p+10)}\risingdotseq\frac{7}{50}+\frac{1}{5}t-\frac{1}{6}\cdot e^{2t}+\frac{2}{75}\cdot e^{5t}=\frac{7+10t}{50}-\frac{1}{6}\cdot e^{2t}+\frac{2}{75}\cdot e^{5t}.$$

ОТВЕТ: $\dfrac{2}{p^2(p^2-7p+10)}\risingdotseq\dfrac{7+10t}{50}-\dfrac{1}{6}\cdot e^{2t}+\dfrac{2}{75}\cdot e^{5t}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''+2x'-8x=\mathrm{sh}4t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=3$ **;** **12.** $x''+\frac{1}{9}x=4\cos\frac{t}{3},\quad x(0)=0,\ x'(0)=6$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x''+2x'-8x=\operatorname{sh}4t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=3$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-3$. По таблице $\operatorname{sh}4t\risingdotseq\dfrac{4}{p^2-16}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+2pX(p)-8X(p)-3=\dfrac{4}{p^2-16}$ или $X(p)[p^2+2p-8]=\dfrac{4}{p^2-16}+3$. Тогда

$$X(p)=\frac{3p^2-44}{(p^2-16)[p^2+2p-8]}=\frac{3p^2-44}{(p-4)(p+4)^2(p-2)}.$$ Применим метод разложения на простые дроби: $\dfrac{3p^2-44}{(p-4)(p+4)^2(p-2)}=\dfrac{A}{p-4}+\dfrac{B}{p-2}+\dfrac{C}{p+4}+\dfrac{D}{(p+4)^2}$. Отсюда

$3p^2-44=A(p-2)(p+4)^2+B(p-4)(p+4)^2+C(p-4)(p-2)(p+4)+D(p-4)(p-2)$. Если p=4, то $A=\dfrac{1}{32}$, при $p=2$ получим $B=\dfrac{4}{9}$, при $p=-4$ получим $D=\dfrac{1}{12}$. Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=-\dfrac{137}{288}$. Таким образом,

$X(p)=\dfrac{1}{32(p-4)}+\dfrac{4}{9(p-2)}-\dfrac{137}{288(p+4)}+\dfrac{1}{12(p+4)^2}$. Пользуясь формулой $t^n\risingdotseq\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^ne^{\lambda t}\risingdotseq\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t)=\dfrac{1}{32}e^{4t}+\dfrac{4}{9}e^{2t}-\dfrac{137}{288}e^{-4t}+\dfrac{1}{12}te^{-4t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=\dfrac{1}{32}e^{4t}+\dfrac{4}{9}e^{2t}-\dfrac{137}{288}e^{-4t}+\dfrac{1}{12}te^{-4t}$

12. $x''+\dfrac{1}{9}x=4\cos\dfrac{t}{3},\quad x(0)=0,\ x'(0)=6$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-6$. По таблице $4\cos\dfrac{t}{3}\risingdotseq\dfrac{p}{p^2+2^{-2}}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+3^{-2}X(p)-6=\dfrac{4p}{p^2+3^{-2}}$ или $X(p)[p^2+3^{-2}]=\dfrac{4p}{p^2+3^{-2}}+6$. Тогда

$$X(p)=\frac{4p}{(p^2+3^{-2})^2}+\frac{6}{p^2+3^{-2}}.$$

Или $X(p)=6\cdot3\dfrac{3^{-1}}{p^2+3^{-2}}-\dfrac{4\cdot3}{2}\cdot\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{3^{-1}}{p^2+3^{-2}}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t)=18\sin\dfrac{t}{3}+6t\cdot\sin\dfrac{t}{3}=(6t+18)\sin\dfrac{t}{3}$.

ОТВЕТ: $x(t)=(6t+18)\sin\dfrac{t}{3}$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases}x'+x+y=e^t\\ y'+3y+3x=2e^{-t}\end{cases}\quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть x(t)$\risingdotseq$X(p), y(t)$\risingdotseq$Y(p). Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\risingdotseq pX(p)$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^t\risingdotseq\frac{1}{p-1}$, $e^{-t}\risingdotseq\frac{1}{p+1}$.

Полу

чили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+1]+Y(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ 3X(p)+Y(p)[p+3]=\dfrac{2}{p+1} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p+3 и вычтем второе. Получим:

$X(p)[p+1](p+3)-3X(p)=\frac{p+3}{p-1}-\frac{2}{p+1}=\frac{p^2+4p+3-2p+2}{(p-1)(p+1)}$ или $p(p+4)X(p)=\frac{p^2+2p+5}{(p-1)(p+1)}$. Тогда

$X(p)=\frac{p^2+2p+5}{p(p+4)(p+1)(p-1)}$. Разложим правую часть на простые множители: $\frac{p^2+2p+5}{p(p-1)(p+4)(p+1)}=$

$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{p+4}=\frac{A(p+1)(p-1)(p+4)+Bp(p-1)(p+4)+Cp(p+4)(p+1)+Dp(p-1)(p+1)}{p(p+1)(p-1)(p+4)}$.

Приравняем числители:

$A(p+1)(p-1)(p+4)+Bp(p-1)(p+4)+Cp(p+4)(p+1)+Dp(p-1)(p+1)=p^2+2p+5$. Полагая p=0, находим A=-5/4, при p=-1 получим B=2/3, при p=1 находим C=4/5, при p=-4 находим D=-13/60. Таким образом, $X(p)=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{13}{60}\cdot\frac{1}{p+4}$. Следовательно,

$x(t)=-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{4}{5}e^{t}-\frac{13}{60}e^{-4t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t)=e^t-x'(t)-x(t)$,

т.е. $y(t)=e^t-\left(-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{4}{5}e^{t}-\frac{13}{60}e^{-4t}\right)'+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{4}{5}e^{t}+\frac{13}{60}e^{-4t}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}e^{t}-\frac{13}{20}e^{-4t}$.

ОТВЕТ: $$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{3}e^{-t}+\dfrac{4}{5}e^{t}-\dfrac{13}{60}e^{-4t} \\ y(t)=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}e^{t}-\dfrac{13}{20}e^{-4t} \end{cases}.$$

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0.$

$$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=10,\ M=2;\qquad u(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi t}{4}, & 0\le t<1\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & t\ge 1\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$$ В данном случае $$\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+10i_1+2\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt}+10i_2+2\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$$ Пусть u(t)$\risingdotseq$U(p),

i_1(t)$\risingdotseq I_1$(p) и i_2(t)$\risingdotseq I_2$(p). Тогда $\frac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\frac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+10I_1(p)+2pI_2(p)=U \\ 2pI_2(p)+10I_2(p)+2pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+10X_1(p)+2pX_2(p)=\dfrac{1}{p} \\ 2pX_2(p)+10X_2(p)+2pX_1(p)=0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\frac{pX_1(p)}{p+5}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p+10-\frac{2p^2}{p+5}]=\frac{1}{p}$ или $X_1(p)\frac{10(2p+5)}{p+5}=\frac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\frac{p+5}{10p(2p+5)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби. Очевидно, что $\frac{p+5}{10p(2p+5)}=\frac{1}{10}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2p+5})$. Следовательно, $x_1(t)=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=1/20$, получим: $i_1(t)=u(t)x_1(0)+\int\limits_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_1'(t)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)'=\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при t<1

$$i_1(t)=\sin\frac{\pi t}{4}\cdot\frac{1}{20}+\int\limits_0^t \sin\frac{\pi\tau}{4}\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{4}+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\int\limits_0^t \sin\frac{\pi\tau}{4}e^{\frac{5}{2}\tau}d\tau=\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{4}+$$

$$+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\frac{e^{\frac{5}{2}\tau}}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{25}{4}}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{\pi\tau}{4}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi\tau}{4}\right)\Bigg|_0^t=\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{4}+\frac{1}{\pi^2+100}(5\sin\frac{\pi t}{4}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}e^{-\frac{5}{2}t}).$$

. При t≥1 получим:

$$i_1(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{20}+\int\limits_0^1 \sin\frac{\pi\tau}{4}\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int\limits_1^t \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=\frac{\sqrt{2}}{40}+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\frac{e^{\frac{5}{2}\tau}}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{25}{4}}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{\pi\tau}{4}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi\tau}{4}\right)\Bigg|_0^1+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Bigg|_1^t=\frac{\sqrt{2}}{40}+\frac{\sqrt{2}(10-\pi)}{4(\pi^2+100)}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{\pi}{2(\pi^2+100)}e^{-\frac{5}{2}t}+\frac{\sqrt{2}}{40}-\frac{\sqrt{2}}{40}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{20}+\left(\frac{\sqrt{2}(10-\pi)}{4(\pi^2+100)}-\frac{\sqrt{2}}{40}\right)e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{\pi}{2(\pi^2+100)}e^{-\frac{5}{2}t}.$$

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p)=-\frac{pX_1(p)}{p+5}=-\frac{p}{p+5}\cdot\frac{p+5}{10p(2p+5)}=-\frac{1}{10(2p+5)}$, т.е. $x_2(t)=-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=-1/20$, получим: $i_2(t)=u(t)x_2(0)+\int\limits_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t)=\left(-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)'=\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при 0≤t<1

$$i_2(t)=-\sin\frac{\pi t}{4}\cdot\frac{1}{20}+\int_0^t\sin\frac{\pi\tau}{4}\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=-\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{4}+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\int_0^t\sin\frac{\pi\tau}{4}e^{\frac{5}{2}\tau}d\tau=-\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{4}+$$

$$+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\frac{e^{\frac{5}{2}\tau}}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{25}{4}}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{\pi\tau}{4}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi\tau}{4}\right)\Bigg|_0^t=-\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{4}+\frac{1}{\pi^2+100}\left(5\sin\frac{\pi t}{4}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\right)$$

. При $t\geq 1$

$$i_2(t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{20}+\int_0^1\sin\frac{\pi\tau}{4}\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int_1^t\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=-\frac{\sqrt{2}}{40}+\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}\frac{e^{\frac{5}{2}\tau}}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{25}{4}}\left(\frac{5}{2}\sin\frac{\pi\tau}{4}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi\tau}{4}\right)\Bigg|_0^1+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Bigg|_1^t=-\frac{\sqrt{2}}{40}+\frac{\sqrt{2}(10-\pi)}{4(\pi^2+100)}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{\pi}{2(\pi^2+100)}e^{-\frac{5}{2}t}+\frac{\sqrt{2}}{40}-\frac{\sqrt{2}}{40}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}(10-\pi)}{4(\pi^2+100)}-\frac{\sqrt{2}}{40}\right)e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{\pi}{2(\pi^2+100)}e^{-\frac{5}{2}t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{4}+\frac{1}{\pi^2+100}\left(5\sin\frac{\pi t}{4}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\right)\\ i_2(t)=-\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{4}+\frac{1}{\pi^2+100}\left(5\sin\frac{\pi t}{4}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\right)\end{cases}$ при $0\leq t<1$ и

$\begin{cases} i_1(t)=\frac{\sqrt{2}}{20}+\left(\frac{\sqrt{2}(10-\pi)}{4(\pi^2+100)}-\frac{\sqrt{2}}{40}\right)e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{\pi}{2(\pi^2+100)}e^{-\frac{5}{2}t}\\ i_2(t)=\left(\frac{\sqrt{2}(10-\pi)}{4(\pi^2+100)}-\frac{\sqrt{2}}{40}\right)e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{\pi}{2(\pi^2+100)}e^{-\frac{5}{2}t}\end{cases}$ при $t\geq 1$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами: $tx''+(2t-1)x'+(t-1)x=0$.

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq-\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{pX-x(0)\}=-(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{p^2X-px(0)-x'(0)\}=-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение:

$-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))-(pX-x(0))-2(X+p\frac{dX}{dp})-\frac{dX}{dp}-X=0$. Или

$(-p^2-2p-1)\frac{dX}{dp}-3(p+1)X+2x(0)=-(p+1)^2\frac{dX}{dp}-3(p+1)X+2x(0)=0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\frac{dX}{dp}+\frac{3}{(p+1)}X=\frac{2x(0)}{(p+1)^2}$. Применим метод Бернулли.

Если $X(p)=U\cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями:

$\frac{dU}{dp}+\frac{3}{(p+1)}U=0;\quad UV'=\frac{2x(0)}{(p+1)^2}$. Таким образом, $\frac{dU}{U}=-\frac{3dp}{p+1};\quad \ln|U|=-3\ln|p+1|;\quad U(p)=\frac{1}{(p+1)^3}$.

Подставим это во второе уравнение:

$\frac{V'}{(p+1)^3}=\frac{2x(0)}{(p+1)^2}$ или $V'=2x(0)(p+1)$. Тогда $V=x(0)(p^2+2)+C$. Следовательно,

$X(p)=\frac{x(0)(p+1)^2+C}{(p+1)^3}=\frac{x(0)}{p+1}+\frac{C}{2}\cdot\frac{2}{(p+1)^3}$ Переходя к оригиналу, получим $x(t)=e^{-t}(x(0)+Ct^2)$.

ОТВЕТ: $x(t)=e^{-t}(x(0)+Ct^2)$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=36e^{2x}\sin 3y,\quad (x>0,\ y>0)\quad u\big|_{x=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\sin 3y,\ u\big|_{y=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=3xe^{2x}.$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y)\risingdotseq U(p,y)$. Тогда $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\risingdotseq p^2U(p,y)-pu(0,y)-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=p^2U(p,y)-\sin 3y$. Запишем операторное уравнение:

$9(p^2U(p,y)-\sin 3y)+4\frac{d^2U}{dy^2}=\frac{36\sin 3y}{p-2}$ или $\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{9}{4}p^2U=(\frac{9}{p-2}+\frac{9}{4})\sin 3y=\frac{9(p+2)}{4(p-2)}$. Это линейное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $r^2+\frac{9}{4}p^2=0$ имеет корни $r_1=-\frac{3}{2}pi,\ r_2=\frac{3}{2}pi$. Следовательно, решением однородного уравнения будет $U(p,y)=C_1\sin(\frac{3}{2}py)+C_2\cos(\frac{3}{2}py)$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $U_1=A\sin 3y+B\cos 3y$. Подставляя в уравнение, получим:

$-9A\sin 3y-9B\cos 3y+\frac{9}{4}p^2(A\sin 3y+B\cos 3y)=\frac{9(p+2)}{4(p-2)}\sin 3y$ или $B=0,\ A=\frac{1}{(p-2)^2}$. Общим решением уравнения будет $U(p,y)=C_1\sin(\frac{3}{2}py)+C_2\cos(\frac{3}{2}py)+\frac{1}{(p-2)^2}\sin 3y$. Пользуясь начальными условиями $U(p,y)\big|_{y=0}=0$ и $\frac{dU}{dy}\Big|_{y=0}=\frac{3}{(p-2)^2}$, получим: $C_2=0, C_1=0$.

Следовательно, $U(p,y)=\frac{1}{(p-2)^2}\sin 3y$. По таблицам находим: $u(x,y)=xe^{2x}\sin 3y$.

ОТВЕТ: $u(x,y)=xe^{2x}\sin 3y$