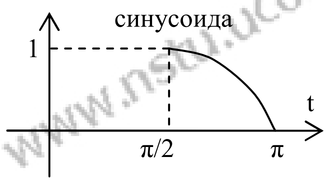
ВАРИАНТ 14
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t)=\sin 4t\cdot\cos 2t$; **2)** $f(t)=e^{-3t}\operatorname{sh}2t-2t$; **3)** $f(t)=\int_0^t \tau^2 e^{-2\tau}d\tau$; **4)** $f(t)=\eta(t-4)\operatorname{sh}^2(t-4)$;

5) $f(t)=\int_0^t (t-\tau)^4 \sin 7\tau d\tau$;

6)



7) $f(t)=(3t^2-14t-5)\eta(t-5)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t)=\sin 4t\cdot\cos 2t.$ Используем тригонометрическую формулу. Имеем:

$\sin 4t\cdot\cos 2t=\frac{1}{2}(\sin 2t+\sin 6t).$ По таблицам, $\sin 2t\fallingdotseq\frac{2}{p^2+4}$ и $\sin 6t\fallingdotseq\frac{6}{p^2+36}$. Далее, в силу свойства линейности, $\sin 4t\cdot\cos 2t\fallingdotseq\frac{1}{2}(\frac{2}{p^2+4}+\frac{6}{p^2+36})=\frac{4(p^2+12)}{(p^2+4)(p^2+36)}.$

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin 4t\cdot\cos 2t\fallingdotseq\frac{4(p^2+12)}{(p^2+4)(p^2+36)}.$

2) $f(t)=e^{-3t}\operatorname{sh}2t-2t$. По таблице находим $t\fallingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $\operatorname{sh}2t\fallingdotseq\frac{2}{p^2-4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{-3t}\operatorname{sh}2t\fallingdotseq\frac{2}{(p+3)^2-4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{-3t}\operatorname{sh}2t-2t\fallingdotseq\frac{2}{(p+3)^2-4}-\frac{2}{p^2}=\frac{2p^2-2p^2-12p-18+8}{p^2[(p+3)^2-4]}=\frac{-12p-10}{p^2[(p+3)^2-4]}.$$

ОТВЕТ: $e^{-3t}\operatorname{sh}2t-2t\fallingdotseq\frac{-12p-10}{p^2[(p+3)^2-4]}.$

3) $f(t)=\int_0^t t^4 e^{-2t}dt.$ По таблице находим $t^4\fallingdotseq\frac{4!}{p^5}$. Применяя теорему смещения, получим:

$t^4e^{-2t}\fallingdotseq\frac{24}{(p+2)^5}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом, $\int_0^t t^4e^{-2t}dt\fallingdotseq\frac{24}{p(p+2)^5}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t t^4e^{-2t}dt\fallingdotseq\frac{24}{p(p+2)^5}$.

4) $f(t)=\eta(t-4)\operatorname{sh}^2(t-4).$ Воспользуемся формулой: $\operatorname{sh}^2t=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2t-1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ch}2t$. По таблице находим $\operatorname{ch}2t\fallingdotseq\frac{p}{p^2-4}$ и $\frac{1}{2}\fallingdotseq\frac{1}{2p}$ Тогда по свойству линейности получаем:

$\eta(t)\mathrm{sh}^2 t \risingdotseq -\frac{1}{2p} + \frac{p}{2(p^2-4)}$. Или $\eta(t)\mathrm{sh}^2 t \risingdotseq \frac{-p^2+4+p^2}{2p(p^2-4)} = \frac{2}{p(p^2-4)}$. Согласно теореме запаздывания $\eta(t-4)\mathrm{sh}^2(t-4) \risingdotseq \frac{2}{p(p^2-4)} \cdot e^{-4p}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-4)\mathrm{sh}^2(t-4) \risingdotseq \frac{2}{p(p^2-4)} \cdot e^{-4p}$.

5) $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^4 \sin 7\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^4 и $\sin 7t$. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^4 \risingdotseq \frac{4!}{p^5}$ и $\sin 7t \risingdotseq \frac{7}{p^2+49}$. Следовательно, $\int_0^t (t-\tau)^4 \sin 7\tau d\tau \risingdotseq \frac{24 \cdot 7}{p^5(p^2+49)} = \frac{168}{p^5(p^2+49)}$.

ОТВЕТ: $\int_0^t (t-\tau)^4 \sin 7\tau d\tau \risingdotseq \frac{168}{p^5(p^2+49)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/2, \\ \sin t, & \pi/2 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t) = \cos(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) + \sin(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi)$. Очевидно, что начиная с момента t=π синусоиды уничтожаются. По таблице $\sin t \cdot \eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \cdot \eta(t) \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$. Согласно теореме запаздывания $\cos(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \frac{pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}$, а $\sin(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi) \risingdotseq \frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}$,. По свойству линейности получим:

$$f(t) \risingdotseq \frac{pe^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1} + \frac{e^{-\pi p}}{p^2+1} = \frac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}.$$

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq \frac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}$.

7) $f(t) = (3t^2 - 14t - 5)\eta(t-5)$. Разложим функцию $u(t)=3t^2-14t-5$ по степеням (t-5), пользуясь формулой Тейлора (t_0=5): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t) = 6t-14$, $u''(t) = 6$, $u'(5) = 16$, $u(5)=0$. Тогда $u(t)=16(t-5)+3(t-5)^2$. Окончательно получаем:

$f(t)=u(t)\cdot\eta(t-5)=[16(t-5)+3(t-5)^2]\cdot\eta(t-5)$.). По таблице $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $(t-5)\cdot\eta(t-5)\risingdotseq\frac{e^{-5p}}{p^2}$ и $(t-5)^2\cdot\eta(t-5)\risingdotseq\frac{2e^{-5p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$$f(t)\risingdotseq\frac{16e^{-5p}}{p^2}+\frac{6e^{-5p}}{p^3}=(\frac{16}{p^2}+\frac{6}{p^3})\cdot e^{-5p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq(\frac{16}{p^2}+\frac{6}{p^3})\cdot e^{-5p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{5}{(p+3)^2+1}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p+3)^2$ в сумме $(p+3)^2+1$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что синус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}\sin wt\risingdotseq\frac{w}{(p-\lambda)^2+w^2}$.

Действительно, $\frac{5}{(p+3)^2+1}=5\frac{1}{(p+3)^2+1^2}\risingdotseq 5e^{-3t}\sin t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{5}{(p+3)^2+1}\right)\risingdotseq -5te^{-3t}\sin t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{5}{(p+3)^2+1}\right)\risingdotseq -5te^{-3t}\sin t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+4p^2+13p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+4p+13)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-2-3i$, $p_3=-2+3i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом $\Phi(p)$, то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname{res}_{p_0}\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2+4p+13)$ и $\psi'(p)=3p^2+8p+13$. Следовательно,

$\operatorname{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{13}$, $\operatorname{res}_{p=-2-3i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(-2-3i)}{\psi'(-2-3i)}=\frac{e^{(-2-3i)t}}{3(-2-3i)^2+8(-2-3i)+13}=\frac{e^{(-2-3i)t}}{6(2i-3)}$,

$\underset{p=-2+3i}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(-2+3i)}{\psi'(-2+3i)} = \frac{e^{(-2+3i)t}}{3(-2+3i)^2+8(-2+3i)+13} = -\frac{e^{(-2+3i)t}}{6(2i+3)}$. Просуммируем все вычеты:

$\underset{p=0}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}] + \underset{p=-2-3i}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}] + \underset{p=-2+3i}{\operatorname{res}}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{1}{13} + \frac{1}{6}\left(\frac{e^{-3it}}{2i-3} - \frac{e^{2it}}{2i+3}\right)e^{-2t} =$

$= \frac{1}{13} - \frac{1}{6}\cdot\frac{e^{-3it}(2i+3) - e^{3it}(2i-3)}{13}\cdot e^{-2t} = \frac{1}{13} - \frac{1}{39}(-2i\cdot \mathrm{sh}(3it) + 3\mathrm{ch}(3it))\cdot e^{-2t} =$

$= \frac{1}{13} - \frac{1}{39}(3\cos 3t + 2\sin 3t)\cdot e^{-2t}$. Здесь учтено, что cos(t)=ch(it), а sin(t)=−i·sh(it).

ОТВЕТ: $\frac{1}{p^3+4p^2+13p} \risingdotseq \frac{1}{13} - \frac{1}{39}(3\cos 3t + 2\sin 3t)\cdot e^{-2t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p) = \frac{-3-5p}{p(p^2+16)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+16)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=-4i$, $p_3=4i$. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{-3-5p}{p(p^2+16)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+16}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-3-5p}{p(p^2+16)} = \frac{A(p^2+16)+(Bp+C)p}{(p^2+16)p}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители:

$A(p^2+16)+(Bp+C)p = -3-5p$. Полагая p=0, получим A=-3/16. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=0 или B=-A=3/16. Приравнивая коэффициенты при p в левой и правой частях равенства, найдём C: C=-5. Таким образом,

$\frac{-3-5p}{p(p^2+16)} = -\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{p} + \frac{3}{16}\cdot\frac{p}{p^2+16} - 5\cdot\frac{1}{p^2+16}$. Применяя свойство линейности, получим:

$\frac{-3-5p}{p(p^2+16)} \risingdotseq -\frac{3}{16} + \frac{3}{16}\cdot\cos 4t - \frac{5}{4}\sin 4t$.

ОТВЕТ: $\frac{-3-5p}{p(p^2+16)} \risingdotseq -\frac{3}{16} + \frac{3}{16}\cdot\cos 4t - \frac{5}{4}\sin 4t$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x'' + 3x' - 4x = -\mathrm{sh}t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$; **12.** $x'' + 2x' = 6\sin t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$.

РЕШЕНИЯ.

11. $x'' + 3x' - 4x = -\mathrm{sh}t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=1$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1$. По таблице $-\mathrm{sh}t \risingdotseq -\frac{1}{p^2-1}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p) + 3pX(p) - 4X(p) - 1 = -\frac{1}{p^2-1}$ или $X(p)[p^2+3p-4] = -\frac{1}{p^2-1} + 1$. Тогда

$X(p)=\dfrac{p^2-2}{(p^2-1)[p^2+3p-4]}=\dfrac{p^2-2}{(p+4)(p-1)^2(p+1)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\dfrac{p^2-2}{(p+4)(p-1)^2(p+1)}=\dfrac{A}{p+4}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{p-1}+\dfrac{D}{(p-1)^2}$. Отсюда

$p^2-2=A(p+1)(p-1)^2+B(p+4)(p-1)^2+C(p+4)(p-1)(p+1)+D(p+4)(p+1)$. Если p=-4, то $A=-\dfrac{14}{75}$, при $p=-1$ получим $B=-\dfrac{1}{12}$, при $p=1$ получим $D=-\dfrac{1}{10}$. Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=\dfrac{27}{100}$. Таким образом,

$X(p)=-\dfrac{14}{75(p+4)}-\dfrac{1}{12(p+1)}+\dfrac{27}{100(p-1)}-\dfrac{1}{10(p-1)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой сме-

щения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t)=-\dfrac{14}{75}e^{-4t}-\dfrac{1}{12}e^{-t}+\dfrac{27}{100}e^{t}-\dfrac{1}{10}te^{t}$.

ОТВЕТ: $x(t)=-\dfrac{14}{75}e^{-4t}-\dfrac{1}{12}e^{-t}-\dfrac{1}{100}(10t-27)e^{t}$

12. $x''+2x'=6\sin t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)$. По таблице 6sint$\risingdotseq \dfrac{6}{p^2+1}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p)+2pX(p)=\dfrac{6}{p^2+1}$ или $X(p)[p^2+2p]=\dfrac{6}{p^2+1}$. Тогда $X(p)=\dfrac{6}{p(p+2)(p^2+1)}$.

Применим метод разложения на простые дроби: $\dfrac{6}{p(p^2+1)(p+2)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+2}+\dfrac{Cp+D}{p^2+1}$. Отсюда

$6=A(p+2)(p^2+1)+Bp(p^2+1)+(Cp+D)p(p+2)$. Если p=0, то $A=3$, при $p=-2$ получим $B=-\dfrac{3}{5}$.

Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=-\dfrac{12}{5}$. Для определения D приравняем коэффициенты при p^2: 2A+2C+D=0. Отсюда $D=-\dfrac{6}{5}$. Таким

образом, $\dfrac{6}{p(p^2+1)(p+2)}=3\cdot\dfrac{1}{p}-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{p+2}-\dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{p}{p^2+1}-\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$. Следовательно,

$x(t)=3-\dfrac{3}{5}e^{-2t}-\dfrac{6}{5}\sin t-\dfrac{12}{5}\cos t$.

ОТВЕТ: $x(t)=3-\dfrac{3}{5}e^{-2t}-\dfrac{6}{5}\sin t-\dfrac{12}{5}\cos t$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x'+3x+3y=e^{2t} \\ y'+y+x=2e^{-2t} \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\risingdotseq pX(p)$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t}\risingdotseq \frac{1}{p-2}$,

$e^{-2t}\risingdotseq \frac{1}{p+2}$. Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p+3]+3Y(p)=\dfrac{1}{p-2} \\ X(p)+Y(p)[p+1]=\dfrac{2}{p+2} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на p+1, а второе – на -3, и сложим их. Получим:

$X(p)[p+1](p+3)-3X(p)=\frac{p+1}{p-2}-\frac{6}{p+2}=\frac{p^2+3p+2-6p+12}{(p-2)(p+2)}$ или $p(p+4)X(p)=\frac{p^2-3p+14}{(p-2)(p+2)}$. Тогда

$X(p)=\frac{p^2-3p+14}{p(p-2)(p+4)(p+2)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{p^2-3p+14}{p(p-2)(p+4)(p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+4}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+2}=$$

$$=\frac{A(p-2)(p+4)(p+2)+Bp(p-2)(p+2)+Cp(p+2)(p+4)+Dp(p+4)(p-2)}{p(p+4)(p-2)(p+2)}$$. Приравняем числители:

$A(p-2)(p+4)(p+2)+Bp(p-2)(p+2)+Cp(p+2)(p+4)+Dp(p+4)(p-2)=p^2-3p+14$. Полагая p=0, находим A=-7/8, при p=-4 получим B=-7/8, при p=2 находим C=1/4, при p=-2 находим D=3/2. Таким образом, $X(p)=-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{p}-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{p+4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p+2}$. Следовательно,

$x(t)=-\frac{7}{8}-\frac{7}{8}e^{-4t}+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-2t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что

$y(t)=\frac{2}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}x'(t)-x(t)$, т.е.

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{8}-\frac{7}{8}e^{-4t}+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)'+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}e^{-4t}-\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{3}{2}e^{-2t}=\frac{7}{8}-\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{7}{24}e^{-4t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=-\dfrac{7}{8}-\dfrac{7}{8}e^{-4t}+\dfrac{1}{4}e^{2t}+\dfrac{3}{2}e^{-2t} \\ y(t)=\dfrac{7}{8}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}-\dfrac{1}{12}e^{2t}-\dfrac{7}{24}e^{-4t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$$L_1=L_2=2,\ R_1=10,\ R_2=10,\ M=2;\qquad u(t)=\begin{cases} 20t, & 0\le t<1 \\ 20(2-t), & 1\le t<2 \\ 0, & t\ge 2 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1 i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t)\\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2 i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0\end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt}+10i_1+2\dfrac{di_2}{dt}=u(t)\\ 2\dfrac{di_2}{dt}+10i_2+2\dfrac{di_1}{dt}=0\end{cases}$ Пусть $u(t)\risingdotseq U(p)$, $i_1(t)\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p)+10I_1(p)+2pI_2(p)=U\\ 2pI_2(p)+10I_2(p)+2pI_1(p)=0\end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p)+10X_1(p)+2pX_2(p)=\dfrac{1}{p}\\ 2pX_2(p)+10X_2(p)+2pX_1(p)=0\end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p)=-\dfrac{pX_1(p)}{p+5}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p+10-\dfrac{2p^2}{p+5}]=\dfrac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{10(2p+5)}{p+5}=\dfrac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p)=\dfrac{p+5}{10p(2p+5)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби. Очевидно, что $\dfrac{p+5}{10p(2p+5)}=\dfrac{1}{10}(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2p+5})$. Следовательно, $x_1(t)=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=1/20$, получим: $i_1(t)=u(t)x_1(0)+\int\limits_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_1'(t)=\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)'=\dfrac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при t<1

$$i_1(t)=20t\cdot\frac{1}{20}+\int\limits_0^t 20\tau\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=t+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^t=2t-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}t}=2t-\frac{2}{5}(1-e^{-\frac{5}{2}t}).$$

. При 1≤t<2 получим:

$$i_1(t)=20(2-t)\cdot\frac{1}{20}+\int\limits_0^1 20\tau\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int\limits_1^t 20(2-\tau)\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=2-t+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^1+5\cdot\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Big|_1^t-$$

$$-\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_1^t=2-t+\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}t}+2-2e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}-t+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}=\frac{22}{5}-2t+\frac{2}{5}(1-2e^{\frac{5}{2}})e^{-\frac{5}{2}t}.$$

При t≥2 $i_1(t)=\int\limits_0^1 20\tau\cdot\dfrac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int\limits_1^2 20(2-\tau)\cdot\dfrac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=\dfrac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot(\dfrac{2\tau}{5}-\dfrac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^1+5\cdot\dfrac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Big|_1^2-$

$$-\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_1^2=\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}t}+2e^{-\frac{5}{2}t+5}-2e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}-\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}t+5}+\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}(1-2e^{\frac{5}{2}}+e^5)e^{-\frac{5}{2}t}.$$

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p)=-\dfrac{pX_1(p)}{p+5}=-\dfrac{p}{p+5}\cdot\dfrac{p+5}{10p(2p+5)}=-\dfrac{1}{10(2p+5)}$, т.е. $x_2(t)=-\dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=-1/20$, получим: $i_2(t)=u(t)x_2(0)+\int\limits_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t)=\left(-\frac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)'=\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при 0≤t<2

$$i_2(t)=-20t\cdot\frac{1}{20}+\int_0^t 20\tau\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=t+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\int_0^t \tau e^{\frac{5}{2}\tau}d\tau=-t+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\left(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25}\right)e^{\frac{5}{2}\tau}\Bigg|_0^t=-\frac{2}{5}(1-e^{-\frac{5}{2}t}).$$

. При 1≤t<2 получим:

$$i_2(t)=-20(2-t)\cdot\frac{1}{20}+\int_0^1 20\tau\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau+\int_1^t 20(2-\tau)\cdot\frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau=-2+t+\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot\left(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25}\right)e^{\frac{5}{2}\tau}\Bigg|_0^1+5\cdot\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}\Bigg|_1^t-$$

$$-\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cdot\left(\frac{2\tau}{5}-\frac{4}{25}\right)e^{\frac{5}{2}\tau}\Bigg|_1^t=-2+t+\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}+\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}t}+2-2e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}-t+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}(1-2e^{\frac{5}{2}})e^{-\frac{5}{2}t}.$$

При t≥2 ток $i_2(t)$ совпадает с $i_2(t)$, т.е. $i_2(t)=\frac{2}{5}(1-2e^{\frac{5}{2}}+e^5)e^{-\frac{5}{2}t}$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=2t-\frac{2}{5}(1-e^{-\frac{5}{2}t}) \\ i_2(t)=-\frac{2}{5}(1-e^{-\frac{5}{2}t}) \end{cases}$ при 0≤t<1 и $\begin{cases} i_1(t)=\frac{22}{5}-2t+\frac{2}{5}(1-2e^{\frac{5}{2}})e^{-\frac{5}{2}t} \\ i_2(t)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}(1-2e^{\frac{5}{2}})e^{-\frac{5}{2}t} \end{cases}$ при 1≤t<2

$i_1(t)=i_2(t)=\frac{2}{5}(1-2e^{\frac{5}{2}}+e^5)e^{-\frac{5}{2}t}$ при t≥2.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами: $tx''-2(3t+1)x'+3(3t+2)x=0$.

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq-\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{pX-x(0)\}=-(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{p^2X-px(0)-x'(0)\}=-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение:

$-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))-2(pX-x(0))+6(X+p\frac{dX}{dp})-9\frac{dX}{dp}+6X=0$. Или

$(-p^2+6p-9)\frac{dX}{dp}-4(p-3)X+3x(0)=-(p-3)^2\frac{dX}{dp}-4(p-3)X+3x(0)=0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\frac{dX}{dp}+\frac{4}{(p-3)}X=\frac{3x(0)}{(p-3)^2}$. Применим метод Бернулли.

Если $X(p)=U\cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями:

$\frac{dU}{dp}+\frac{4}{(p-3)}U=0;\quad UV'=\frac{3x(0)}{(p-3)^2}$. Таким образом, $\frac{dU}{U}=-\frac{4dp}{p-3};\quad \ln|U|=-4\ln|p-3|;\quad U(p)=\frac{1}{(p-3)^4}$.

Подставим это во второе уравнение:

$\frac{V'}{(p-3)^4}=\frac{3x(0)}{(p-3)^2}$ или $V'=3x(0)(p-3)^2$. Тогда $V=x(0)(p-3)^2+C$. Следовательно,

$X(p)=\frac{x(0)(p-3)^3+C}{(p-3)^4}=\frac{x(0)}{p-3}+\frac{C}{3!}\cdot\frac{3!}{(p-3)^4}$ Переходя к оригиналу, получим $x(t)=e^{3t}(x(0)+Ct^3)$.

ОТВЕТ: $x(t)=e^{3t}(x(0)+Ct^3)$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=x+ay,\quad (x>0,\ y>0),\quad u\big|_{x=0}=u\big|_{y=0}=b.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y)\risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\risingdotseq pU(x,p)-u(x,0)=pU(x,p)-b$. Запишем операторное уравнение:

$\frac{dU}{dx}+pU-b=\frac{x}{p}+\frac{a}{p^2}$ или $\frac{dU}{dx}+pU=\frac{x}{p}+\frac{a}{p^2}+b$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(x,p)=C(x,p)e^{-px}$, где C(x,p) – функция, определяемая из уравнения $C'(x,p)e^{-px}=\frac{x}{p}+\frac{a}{p^2}+b$, т.е. $C(x,p)=\int(\frac{x}{p}+\frac{a}{p^2}+b)e^{px}dx=(\frac{x}{p^2}+\frac{a-1}{p^3}+\frac{b}{p})e^{px}+C_1$. Следовательно, решением уравнения будет

$U(x,p)=C(x,p)e^{-px}=[(\frac{x}{p^2}+\frac{a-1}{p^3}+\frac{b}{p})e^{px}+C_1]e^{-px}=\frac{x}{p^2}+\frac{a-1}{p^3}+\frac{b}{p}+C_1e^{-px}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{b}{p}$, найдём $C_1=\frac{1-a}{p^3}$. Следовательно, $U(x,p)=\frac{x}{p^2}+\frac{a-1}{p^3}+\frac{b}{p}+\frac{1-a}{p^3}e^{-px}$.

Оригинал функции находим по таблицам: $u(x,y)=b+xy+\frac{a-1}{2}y^2+\frac{1-a}{2}(y-x)^2\eta(y-x)$.

ОТВЕТ: $u(x,y)=b+xy+\frac{a-1}{2}y^2+\frac{1-a}{2}(y-x)^2\eta(y-x)$.