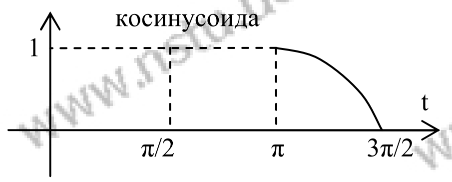
ВАРИАНТ 15
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t) = \sin t \cdot \cos 5t$; **2)** $f(t) = e^{3t}\operatorname{sh}t + 2t$; **3)** $f(t) = \int\limits_0^t t^4 e^{3t}dt$; **4)** $f(t) = \eta(t-5)\operatorname{sh}^2(t-5)$;

5) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^3 \sin 9\tau d\tau$; **6)**



7) $f(t) = (\frac{t^2}{2} - 2t + 6)\eta(t-6)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t) = \sin t \cdot \cos 5t$. Используем тригонометрическую формулу. Имеем: $\sin t \cdot \cos 5t = \frac{1}{2}(\sin(-4t) + \sin 6t) = \frac{1}{2}(-\sin 4t + \sin 5t)$. По таблицам, $\sin 4t \risingdotseq \frac{4}{p^2+16}$ и $\sin 6t \risingdotseq \frac{6}{p^2+36}$. Далее, в силу свойства линейности,

$$\sin t \cdot \cos 5t \risingdotseq \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{p^2+16} + \frac{6}{p^2+36}\right) = \frac{p^2-24}{(p^2+16)(p^2+36)}.$$

<u>ОТВЕТ</u>: $\sin t \cdot \cos 5t \risingdotseq \frac{p^2-24}{(p^2+16)(p^2+36)}$.

2) $f(t) = e^{3t}\operatorname{sh}t + 2t$. По таблице находим $t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ и $\operatorname{sh}t \risingdotseq \frac{1}{p^2-1}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^{3t}\operatorname{sh}t \risingdotseq \frac{1}{(p-3)^2-1}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^{3t}\operatorname{sh}t + 2t \risingdotseq \frac{1}{(p-3)^2-1} + \frac{2}{p^2} = \frac{p^2+2p^2-12p+18-2}{p^2[(p-3)^2-1]} = \frac{3p^2-12p+16}{p^2[(p-3)^2-1]}.$$

ОТВЕТ: $e^{3t}\operatorname{sh}t + 2t \risingdotseq \frac{-p^2+12p-16}{p^2[(p-3)^2-1]}$.

3) $f(t) = \int\limits_0^t t^4 e^{3t}dt$. По таблице находим $t^4 \risingdotseq \frac{4!}{p^5}$. Применяя теорему смещения, получим: $t^4 e^{3t} \risingdotseq \frac{24}{(p-3)^5}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом, $\int\limits_0^t t^4 e^{3t}dt \risingdotseq \frac{24}{p(p-3)^5}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^4 e^{3t}dt \risingdotseq \frac{24}{p(p-3)^5}$.

4) $f(t)=\eta(t-5)\mathrm{sh}^2(t-5)$. Воспользуемся формулой: $\mathrm{sh}^2 t=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2t-1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{ch}2t$. По таблице находим $\mathrm{ch}2t \risingdotseq \frac{p}{p^2-4}$ и $\frac{1}{2}\risingdotseq\frac{1}{2p}$ Тогда по свойству линейности получаем:

$\eta(t)\mathrm{sh}^2 t \risingdotseq -\frac{1}{2p}+\frac{p}{2(p^2-4)}$. Или $\eta(t)\mathrm{sh}^2 t \risingdotseq \frac{-p^2+4+p^2}{2p(p^2-4)}=\frac{2}{p(p^2-4)}$. Согласно теореме запаздывания $\eta(t-5)\mathrm{sh}^2(t-5)\risingdotseq \frac{2}{p(p^2-4)}\cdot e^{-5p}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-5)\mathrm{sh}^2(t-5)\risingdotseq \frac{2}{p(p^2-4)}\cdot e^{-5p}$.

5) $f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)^3\sin 9\tau d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^3 и $\sin 9t$. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^3\risingdotseq\frac{3!}{p^4}$ и $\sin 9t\risingdotseq\frac{9}{p^2+81}$. Следовательно, $\int\limits_0^t (t-\tau)^3\sin 9\tau d\tau\risingdotseq\frac{54}{p^4(p^2+81)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t (t-\tau)^3\sin 9\tau d\tau\risingdotseq\frac{54}{p^4(p^2+81)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<\pi,\\ -\cos t, & \pi\le t<3\pi/2,\\ 0, & t\ge 3\pi/2.\end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t)=\cos(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi)+\sin(t-3\pi/2)\cdot\eta(t-3\pi/2)$. Очевидно, что начиная с момента t=3π/2 синусоиды уничтожаются. По таблице $\sin t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}$, $\cos t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}$.

Согласно теореме запаздывания $\cos(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi)\risingdotseq\frac{pe^{-\pi p}}{p^2+1}$, а

$\sin(t-3\pi/2)\cdot\eta(t-3\pi/2)\risingdotseq\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}p}}{p^2+1}$,. По свойству линейности получим:

$$f(t)\risingdotseq\frac{pe^{-\pi p}}{p^2+1}+\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}p}}{p^2+1}=\frac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}\cdot e^{-\pi p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq\frac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1}\cdot e^{-\pi p}$.

7) $f(t)=(\frac{t^2}{2}-2t+6)\eta(t-6)$. Разложим функцию $u(t)=(\frac{t^2}{2}-2t+6)$ по степеням (t-6), пользуясь формулой Тейлора (t_0=6): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t)=t-2$, $u''(t)=1$, $u'(6)=4$, u(8)=12. Тогда $u(t)=12+4(t-6)+(t-6)^2/2$. Окончательно получаем: $f(t)=u(t)\cdot\eta(t-6)=[12+4(t-6)+(t-6)^2/2]\cdot\eta(t-6)$. По таблице $1\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, $t\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-6)\risingdotseq\frac{e^{-6p}}{p}$, $(t-6)\cdot\eta(t-6)\risingdotseq\frac{e^{-6p}}{p^2}$ и $(t-6)^2\cdot\eta(t-6)\risingdotseq\frac{2e^{-6p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$$f(t)\risingdotseq\frac{12e^{-6p}}{p}+\frac{4e^{-6p}}{p^2}+\frac{2e^{-6p}}{2p^3}=(\frac{12}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{1}{p^3})\cdot e^{-6p}.$$

ОТВЕТ: $f(t)\risingdotseq(\frac{12}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{1}{p^3})\cdot e^{-6p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p)=\frac{d}{dp}\left(\frac{2(p-1)}{(p-1)^2-16}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p-1)^2$ в сумме $(p-1)^2-16$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что косинус гиперболический имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p}ch(wt)\risingdotseq\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-w^2}$. Действительно, $\frac{2(p-1)}{(p-1)^2-16}=2\frac{p-1}{(p-1)^2-4^2}\risingdotseq 2e^t ch4t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{2(p-1)}{(p-1)^2-16}\right)\risingdotseq -2te^t ch4t$.

ОТВЕТ: $\frac{d}{dp}\left(\frac{2(p-1)}{(p-1)^2-16}\right)\risingdotseq -2te^t ch4t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{1}{p^3-6p^2+13p}.$$

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p)\cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2-6p+13)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=3-2i$, $p_3=3+2i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p)=\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом Ф(p), то вычет можно вычислить по формуле $\underset{p_0}{res}\,\Phi(p)=\frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)=p(p^2-6p+13)$ и $\psi'(p)=3p^2-12p+13$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=\frac{1}{13}\ ,\quad \operatorname*{res}_{p=3-2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(3-2i)}{\psi'(3-2i)}=\frac{e^{(3-2i)t}}{3(3-2i)^2-12(3-2i)+13}=-\frac{e^{(3-2i)t}}{4(3i+2)},$$

$$\operatorname*{res}_{p=3+2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{\varphi(3+2i)}{\psi'(3+2i)}=\frac{e^{(3+2i)t}}{3(3+2i)^2-12(3+2i)+13}=\frac{e^{(3+2i)t}}{4(3i-2)}.$$ Просуммируем все вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=3-2i}[F(p)\cdot e^{pt}]+\operatorname*{res}_{p=3+2i}[F(p)\cdot e^{pt}]=\frac{1}{13}+\frac{1}{4}\left(-\frac{e^{-2it}}{3i+2}+\frac{e^{2it}}{3i-2}\right)e^{3t}=$$

$$=\frac{1}{13}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-e^{-2it}(3i-2)+e^{2it}(3i+2)}{13}\cdot e^{3t}=\frac{1}{13}-\frac{1}{26}(3i\cdot\mathrm{sh}(2it)+2\mathrm{ch}(2it))\cdot e^{3t}=$$

$$=\frac{1}{13}-\frac{1}{26}(2\cos 2t-3\sin 2t)\cdot e^{3t}.$$ Здесь учтено, что $\cos(t)=\mathrm{ch}(it)$, а $\sin(t)=-i\cdot\mathrm{sh}(it)$.

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p^3-6p^2+13p} \risingdotseq \dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{26}(2\cos 2t-3\sin 2t)\cdot e^{3t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{-7e^{-7p}}{(p-1)(p-8)^2}.$$

РЕШЕНИЕ

Разложим функцию $\Phi(p)=\dfrac{-7}{(p-1)(p-8)^2}$ на простые дроби. Корнями знаменателя являются $p_1=1$, $p_2=8$, причём корень $p_2=8$ имеет кратность 2.

Следовательно, разложение имеет вид: $\dfrac{-7}{(p-1)(p-8)^2}=\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p-8}+\dfrac{C}{(p-8)^2}$.

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{-7}{(p-1)(p-8)^2}=\frac{A(p-8)^2+B(p-1)(p-8)+C(p-1)}{(p-1)(p-8)^2}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители:
$A(p-8)^2+B(p-1)(p-8)+C(p-1)=-7$. Придавая последовательно переменной p значения корней, найдём коэффициенты разложения A и C. Полагая p=1, получим A=-1/7, при p=8 получим C=1. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=0 или B=-A=1/7. Таким образом,

$$\frac{-7}{(p-1)(p-8)^2}=-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{p-8}+\frac{1}{(p-8)^2}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$\dfrac{-7}{(p-1)(p-8)^2}\risingdotseq-\dfrac{1}{7}e^t+\dfrac{1}{7}\cdot e^{8t}+t\cdot e^{8t}$. Зная оригинал для $\Phi(p)$, можно найти оригинал для

$\Phi(p)e^{-7p}$, опираясь на теорему запаздывания: $\dfrac{-7e^{-7p}}{(p-1)(p-8)^2}\risingdotseq-\dfrac{1}{7}e^{(t-7)}+\dfrac{1}{7}\cdot e^{8(t-7)}+(t-7)\cdot e^{8(t-7)}$.

Или $\dfrac{-7e^{-7p}}{(p-1)(p-8)^2}\risingdotseq-\dfrac{1}{7}e^{(t-7)}+[\dfrac{1}{7}+(t-7)]\cdot e^{8(t-7)}=-\dfrac{1}{7}e^{(t-7)}+\dfrac{7t-48}{7}\cdot e^{8(t-7)}$

ОТВЕТ: $\dfrac{-7e^{-7p}}{(p-1)(p-8)^2}\risingdotseq\dfrac{7t-48}{7}\cdot e^{8(t-7)}-\dfrac{1}{7}e^{(t-7)}$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x'' + x' - 6x = -4\operatorname{sh}2t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -3$ **;** **12.** $x'' + \frac{1}{9}x = 7\cos\frac{t}{3}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 7$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x'' + x' - 6x = -4\operatorname{sh}2t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -3$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 3$. По таблице -4sh2t$\risingdotseq -\frac{8}{p^2-4}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p) + pX(p) - 6X(p) + 3 = -\frac{8}{p^2-4}$ или $X(p)[p^2 + p - 6] = -\frac{8}{p^2-4} - 3$. Тогда

$X(p) = \frac{-3p^2+4}{(p^2-4)[p^2+p-6]} = \frac{-3p^2+4}{(p+3)(p-2)^2(p+2)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\frac{-3p^2+4}{(p+3)(p-2)^2(p+2)} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-2} + \frac{D}{(p-2)^2}$. Отсюда

$-3p^2 + 4 = A(p+2)(p-2)^2 + B(p+3)(p-2)^2 + C(p+2)(p-2)(p+3) + D(p+3)(p+2)$. Если p=-3, то $A = \frac{23}{25}$, при $p = -2$ получим $B = -\frac{1}{2}$, при $p = 2$ получим $D = -\frac{2}{5}$. Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C = -\frac{21}{50}$. Таким образом,

$X(p) = \frac{23}{25(p+3)} - \frac{1}{2(p+2)} - \frac{21}{50(p-2)} - \frac{2}{5(p-2)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t) = \frac{23}{25}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{21}{50}e^{2t} - \frac{2}{5}te^{2t}$.

ОТВЕТ: $x(t) = \frac{23}{25}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{50}(20t+21)e^{2t}$

12. $x'' + \frac{1}{9}x = 7\cos\frac{t}{3}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 7$**.** Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 7$. По таблице $7\cos\frac{t}{3} \risingdotseq \frac{7p}{p^2+3^{-2}}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p) + 3^{-2}X(p) - 7 = \frac{7p}{p^2+3^{-2}}$ или $X(p)[p^2 + 3^{-2}] = \frac{7p}{p^2+3^{-2}} + 7$. Тогда $X(p) = \frac{7p}{(p^2+3^{-2})^2} + \frac{7}{p^2+3^{-2}}$.

Или $X(p) = 7\cdot 3\frac{3^{-1}}{p^2+3^{-2}} - \frac{7\cdot 3}{2}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{3^{-1}}{p^2+3^{-2}}\right)$. При дифференцировании изображения функция-оригинал умножается на –t. Следовательно, $x(t) = 21\sin\frac{t}{3} + \frac{21}{2}t\cdot\sin\frac{t}{3} = \frac{21}{2}(t+2)\sin\frac{t}{3}$.

ОТВЕТ: $x(t) = \frac{21}{2}(t+2)\sin\frac{t}{3}$

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x' - x - y = 2e^t \\ y' - 3y - 3x = e^{2t} \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2}$, $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$.

Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p-1] - Y(p) = \dfrac{2}{p-1} \\ -3X(p) + Y(p)[p-3] = \dfrac{1}{p-2} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p-3 и сложим уравнения.

Получим:

$$X(p)[p-1](p-3) - 3X(p) = \frac{2(p-3)}{p-1} + \frac{1}{p-2} = \frac{2p^2 - 10p + 12 + p - 1}{(p-1)(p-2)} \quad \text{или} \quad p(p-4)X(p) = \frac{2p^2 - 9p + 11}{(p-1)(p-2)}.$$ Тогда

$X(p) = \dfrac{2p^2 - 9p + 11}{p(p-4)(p-1)(p-2)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$$\frac{2p^2 - 9p + 11}{p(p-4)(p-1)(p-2)} =$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} + \frac{D}{p-4} = \frac{A(p-1)(p-4)(p-2) + Bp(p-2)(p-4) + Cp(p-1)(p-4) + Dp(p-1)(p-2)}{p(p-1)(p-2)(p-4)}.$$

Приравняем числители:

$A(p-1)(p-4)(p-2) + Bp(p-2)(p-4) + Cp(p-1)(p-4) + Dp(p-1)(p-2) = 2p^2 - 9p + 11$. Полагая p=0, находим A=-11/8, при p=1 получим B=4/3, при p=2 находим C=-1/4, при p=4 находим D=7/24. Таким образом, $X(p) = -\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{p} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{7}{24}\cdot\frac{1}{p-4}$. Следовательно,

$x(t) = -\frac{11}{8} + \frac{4}{3}e^t - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{7}{24}e^{4t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t) = x'(t) - x(t) - 2e^t$,

т.е. $y(t) = \left(-\frac{11}{8} + \frac{4}{3}e^t - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{7}{24}e^{4t}\right)' + \frac{11}{8} - \frac{4}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{7}{24}e^{4t} - 2e^t = \frac{11}{8} - 2e^t - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{7}{8}e^{4t}$.

ОТВЕТ: $$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{11}{8} + \dfrac{4}{3}e^t - \dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{7}{24}e^{4t} \\ y(t) = \dfrac{11}{8} - 2e^t - \dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{7}{8}e^{4t} \end{cases}.$$

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0) = 0, i_1(0) = 0$.

$$L_1 = L_2 = 2,\ R_1 = 10,\ R_2 = 10,\ M = 2; \qquad u(t) = \begin{cases} 10t, & 0 \le t < 1 \\ 10e^{-(t-1)}, & t \ge 1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M\dfrac{di_2}{dt} = u(t) \\ L_2 \dfrac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} 2\dfrac{di_1}{dt} + 10 i_1 + 2\dfrac{di_2}{dt} = u(t) \\ 2\dfrac{di_2}{dt} + 10 i_2 + 2\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$ Пусть $u(t) \risingdotseq U(p)$, $i_1(t) \risingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t) \risingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt} \risingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt} \risingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} 2pI_1(p) + 10I_1(p) + 2pI_2(p) = U \\ 2pI_2(p) + 10I_2(p) + 2pI_1(p) = 0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией $\eta(t)$, для которой $\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} 2pX_1(p) + 10X_1(p) + 2pX_2(p) = \dfrac{1}{p} \\ 2pX_2(p) + 10X_2(p) + 2pX_1(p) = 0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p) = -\dfrac{pX_1(p)}{p+5}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[2p + 10 - \dfrac{2p^2}{p+5}] = \dfrac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{10(2p+5)}{p+5} = \dfrac{1}{p}$. Отсюда $X_1(p) = \dfrac{p+5}{10p(2p+5)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби. Очевидно, что $\dfrac{p+5}{10p(2p+5)} = \dfrac{1}{10}(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2p+5})$. Следовательно, $x_1(t) = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=1/20$, получим: $i_1(t) = u(t)x_1(0) + \int\limits_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_1'(t) = \left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)' = \dfrac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при t<1

$$i_1(t) = 10t \cdot \frac{1}{20} + \int\limits_0^t 10\tau \cdot \frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau = \frac{t}{2} + \frac{5}{4}e^{-\frac{5}{2}t} \cdot (\frac{2\tau}{5} - \frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^t = t - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{2}t} = t - \frac{1}{5}(1 - e^{-\frac{5}{2}t}).$$

. При t≥1 получим:

$$i_1(t) = 10e^{-(t-1)} \cdot \frac{1}{20} + \int\limits_0^1 10\tau \cdot \frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau + \int\limits_1^t 10e^{-(\tau-1)} \cdot \frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau = \frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{5}{4}e^{-\frac{5}{2}t} \cdot (\frac{2\tau}{5} - \frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}e^{-\frac{5}{2}t + 1 + \frac{3}{2}\tau}\Big|_1^t = \frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{3}{10}e^{-\frac{5}{2}t + \frac{5}{2}} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{2}t} + \frac{5}{6}e^{-t+1} - \frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}t + \frac{5}{2}} = \frac{4}{3}e^{1-t} + \frac{1}{5}(1 - \frac{8}{3}e^{\frac{5}{2}})e^{-\frac{5}{2}t}.$$

Найдём $x_2(t)$: $X_2(p) = -\dfrac{pX_1(p)}{p+5} = -\dfrac{p}{p+5} \cdot \dfrac{p+5}{10p(2p+5)} = -\dfrac{1}{10(2p+5)}$, т.е. $x_2(t) = -\dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=-1/20$, получим: $i_2(t) = u(t)x_2(0) + \int\limits_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$.

Поскольку $x_2'(t) = \left(-\dfrac{1}{20}e^{-\frac{5}{2}t}\right)' = \dfrac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}t}$, то при 0≤t<1

$$i_2(t) = -10t \cdot \frac{1}{20} + \int\limits_0^t 10\tau \cdot \frac{1}{8}e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)}d\tau = -\frac{t}{2} + \frac{5}{4}e^{-\frac{5}{2}t}\int\limits_0^t \tau e^{\frac{5}{2}\tau}d\tau = -\frac{t}{2} + \frac{5}{4}e^{-\frac{5}{2}t}(\frac{2\tau}{5} - \frac{4}{25})e^{\frac{5}{2}\tau}\Big|_0^t = -\frac{1}{5}(1 - e^{-\frac{5}{2}t})$$

. При $t \ge 1$

$$i_2(t) = -10e^{-(t-1)} \cdot \frac{1}{20} + \int_0^1 10\tau \cdot \frac{1}{8} e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)} d\tau + \int_1^t 10e^{-(\tau-1)} \cdot \frac{1}{8} e^{-\frac{5}{2}(t-\tau)} d\tau = -\frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{5}{4} e^{-\frac{5}{2}t} \cdot \left(\frac{2\tau}{5} - \frac{4}{25}\right) e^{\frac{5}{2}\tau} \Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} e^{-\frac{5}{2}t+1+\frac{3}{2}\tau} \Big|_1^t = -\frac{e^{-(t-1)}}{2} + \frac{3}{10} e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{5}{2}t} + \frac{5}{6} e^{-t+1} - \frac{5}{6} e^{-\frac{5}{2}t+\frac{5}{2}} = \frac{1}{3} e^{1-t} + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{8}{3} e^{\frac{5}{2}}\right) e^{-\frac{5}{2}t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t) = t - \frac{1}{5}\left(1 - e^{-\frac{5}{2}t}\right) \\ i_2(t) = -\frac{1}{5}\left(1 - e^{-\frac{5}{2}t}\right) \end{cases}$ при $0 \le t < 1$ и $\begin{cases} i_1(t) = \frac{4}{3} e^{1-t} + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{8}{3} e^{\frac{5}{2}}\right) e^{-\frac{5}{2}t} \\ i_2(t) = \frac{1}{3} e^{1-t} + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{8}{3} e^{\frac{5}{2}}\right) e^{-\frac{5}{2}t} \end{cases}$ при $t \ge 1$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами: $tx'' + 4(2t-1)x' + 16(t-1)x = 0$.

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0)$, $x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t) \risingdotseq -\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{pX - x(0)\} = -(X + p\frac{dX}{dp})$, $tx'' \risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2 X - px(0) - x'(0)\} = -(2pX + p^2 \frac{dX}{dp} - x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение:

$-(2pX + p^2 \frac{dX}{dp} - x(0)) - 4(pX - x(0)) - 8(X + p\frac{dX}{dp}) - 16\frac{dX}{dp} - 16X = 0$. Или

$(-p^2 - 8p - 16)\frac{dX}{dp} - 6(p+4)X + 5x(0) = -(p+4)^2 \frac{dX}{dp} - 6(p+4)X + 5x(0) = 0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\frac{dX}{dp} + \frac{6}{(p+4)} X = \frac{5x(0)}{(p+4)^2}$. Применим метод Бернулли. Если $X(p) = U \cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями:

$\frac{dU}{dp} + \frac{6}{(p+4)} U = 0$; $UV' = \frac{5x(0)}{(p+4)^2}$. Таким образом,

$\frac{dU}{U} = -\frac{6dp}{p+4}$; $\ln|U| = -6\ln|p+4|$; $U(p) = \frac{1}{(p+4)^6}$. Подставим это во второе уравнение:

$\frac{V'}{(p+4)^6} = \frac{5x(0)}{(p+4)^2}$ или $V' = 5x(0)(p+4)^4$. Тогда $V = x(0)(p+4)^5 + C$. Следовательно,

$X(p) = \frac{x(0)(p+4)^5 + C}{(p+4)^6} = \frac{x(0)}{p+4} + \frac{C}{5!} \cdot \frac{5!}{(p+4)^6}$ Переходя к оригиналу, получим $x(t) = e^{-4t}(x(0) + Ct^5)$.

ОТВЕТ: $x(t) = e^{-4t}(x(0) + Ct^5)$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = cx + dy, \quad (ax \ge 0,\ y \ge 0), \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{y=0} = b.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y) \risingdotseq U(x,p)$. Тогда $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \risingdotseq pU(x,p) - u(x,0) = pU(x,p) - b$. Запишем операторное уравнение:

$\frac{dU}{dx} + apU - ab = \frac{cx}{p} + \frac{d}{p^2}$ или $\frac{dU}{dx} + apU = \frac{cx}{p} + \frac{d}{p^2} + ab$. Это линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид: $U(x,p) = C(x,p)e^{-apx}$, где C(x,p) – функция, определяемая из уравнения $C'(x,p)e^{-apx} = \frac{cx}{p} + \frac{d}{p^2} + ab$, т.е.

$C(x,p) = \int (\frac{cx}{p} + \frac{d}{p^2} + ab)e^{apx}dx = (\frac{cx}{ap^2} - \frac{c}{a^2p^3} + \frac{d}{ap^3} + \frac{b}{p})e^{px} + C_1$. Следовательно, решением уравнения будет

$U(x,p) = C(x,p)e^{-apx} = [(\frac{cx}{ap^2} - \frac{c}{a^2p^3} + \frac{d}{ap^3} + \frac{b}{p})e^{apx} + C_1]e^{-apx} = \frac{cx}{ap^2} + \frac{d - c/a}{ap^3} + \frac{b}{p} + C_1e^{-apx}$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0} = \frac{b}{p}$, найдём $C_1 = \frac{c/a - d}{ap^3}$. Следовательно,

$U(x,p) = \frac{cx}{ap^2} + \frac{d - c/a}{ap^3} + \frac{b}{p} + \frac{c/a - d}{ap^3}e^{-apx}$. Оригинал функции находим по таблицам:

$u(x,y) = b + \frac{c}{a}xy + \frac{d - c/a}{2a}y^2 + \frac{c/a - d}{2a}(y - ax)^2\eta(y - ax)$.

ОТВЕТ: $u(x,y) = b + \frac{c}{a}xy + \frac{d - c/a}{2a}y^2 + \frac{c/a - d}{2a}(y - ax)^2\eta(y - ax)$.