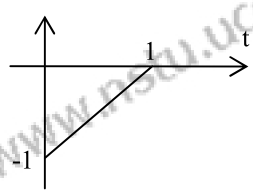
ВАРИАНТ 18
Задание 1-7

Найти изображения и указать, какими теоремами пользовались:

1) $f(t) = \mathrm{sh}\,3t \cdot \mathrm{ch}\,t$; **2)** $f(t) = e^t \sin 2t - 2\cos 2t$; **3)** $f(t) = \int\limits_0^t t^4 e^{-5t} dt$; **4)** $f(t) = \eta(t-4)\sin^2(t-4)$;

5) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^4 \mathrm{sh}7(t-\tau)d\tau$; **6)**



7) $f(t) = (t^2 - 11t + 20)\eta(t-9)$.

РЕШЕНИЯ

1) $f(t) = \mathrm{sh}\,3t \cdot \mathrm{ch}\,t$. Используем формулу для произведения гиперболических функций. Имеем: $\mathrm{sh}\,3t \cdot \mathrm{ch}\,t = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}2t + \mathrm{sh}4t)$. По таблицам, $\mathrm{sh}\,2t \risingdotseq \frac{2}{p^2-4}$ и $\mathrm{sh}4t \risingdotseq \frac{4}{p^2-16}$. Далее, в силу свойства линейности, $\mathrm{sh}\,3t \cdot \mathrm{ch}\,t \risingdotseq \frac{1}{2}(\frac{2}{p^2-4} + \frac{4}{p^2-16}) = \frac{3(p^2-8)}{(p^2-4)(p^2-16)}$.

<u>ОТВЕТ</u>: $\mathrm{sh}3t \cdot \mathrm{ch}\,t \risingdotseq \frac{3(p^2-8)}{(p^2-4)(p^2-16)}$.

2) $f(t) = e^t \sin 2t - 2\cos 2t$. По таблице находим $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$ и $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$. Применение теоремы смещения даёт: $e^t \sin 2t \risingdotseq \frac{2}{(p-1)^2+4}$ и, по свойству линейности получаем:

$$e^t \cdot \sin 2t - 2\cos 2t \risingdotseq \frac{2}{(p-1)^2+4} - \frac{2p}{p^2+4} = \frac{2p^2+8-2p^3+4p^2-2p-8p}{[(p-1)^2+4](p^2+4)} = \frac{-2p^3+6p^2-10p+8}{[(p-1)^2+4](p^2+4)}.$$

ОТВЕТ: $e^t \cdot \sin 2t - 2\sin 2t \risingdotseq \frac{-2p^3+6p^2-10p+8}{[(p-1)^2+4](p^2+4)}$.

3) $f(t) = \int\limits_0^t t^4 e^{-5t} dt$. По таблице находим $t^4 \risingdotseq \frac{4!}{p^5}$. Применяя теорему смещения, получим: $t^4 e^{-5t} \risingdotseq \frac{24}{(p+5)^5}$. По теореме интегрирования оригинала операции интегрирования оригинала соответствует деление изображения на p. Таким образом, $\int\limits_0^t t^4 e^{-5t} dt \risingdotseq \frac{24}{p(p+5)^5}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t t^4 e^{-5t} dt \risingdotseq \frac{24}{p(p+5)^5}$.

4) $f(t) = \eta(t-4)\sin^2(t-4)$. Воспользуемся формулой: $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$. По таблице находим $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$ и $\frac{1}{2} \risingdotseq \frac{1}{2p}$ Тогда по свойству линейности получаем:

$\eta(t)\sin^2 t \risingdotseq \dfrac{1}{2p} - \dfrac{p}{2(p^2+4)}$. Или $\eta(t)\sin^2 t \risingdotseq \dfrac{p^2+4-p^2}{2p(p^2+4)} = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$. Согласно теореме запаздывания $\eta(t-4)\sin^2(t-4) \risingdotseq \dfrac{2}{p(p^2+4)} \cdot e^{-4p}$.

ОТВЕТ: $\eta(t-4)\sin^2(t-4) \risingdotseq \dfrac{2}{p(p^2+4)} \cdot e^{-4p}$.

5) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^4 \mathrm{sh}7(t-\tau)d\tau$. Данный интеграл есть свёртка оригиналов t^4 и sh7t. Операции свёртки оригиналов соответствует умножение изображений. По таблице находим: $t^4 \risingdotseq \dfrac{4!}{p^5}$ и $\mathrm{sh}7t \risingdotseq \dfrac{7}{p^2-49}$. Следовательно, $\int\limits_0^t \tau^4 \mathrm{sh}7(t-\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{24\cdot 7}{p^5(p^2-49)} = \dfrac{168}{p^5(p^2-49)}$.

ОТВЕТ: $\int\limits_0^t \tau^4 \mathrm{sh}7(t-\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{168}{p^5(p^2-49)}$.

6) Аналитическая запись функции имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t-1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

Применяя функцию Хевисайда, данную функцию можно представить следующим образом: $f(t) = (t-1)\cdot\eta(t) - (t-1)\cdot\eta(t-1) = t\cdot\eta(t) - 1\cdot\eta(t) - (t-1)\cdot\eta(t-1)$. Очевидно, что начиная с момента t=1 функция становится равной нулю. По таблице $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$ и $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$. Согласно теореме запаздывания $(t-1)\cdot\eta(t-1) \risingdotseq \dfrac{e^{-p}}{p^2}$. По свойству линейности получим: $f(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} - \dfrac{e^{-p}}{p^2} = \dfrac{1-p-e^{-p}}{p^2}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq \dfrac{1-p-e^{-p}}{p^2}$.

7) $f(t) = (t^2 - 11t + 20)\eta(t-9)$. Разложим функцию u(t)= $t^2 - 11t + 20$ по степеням (t-9), пользуясь формулой Тейлора (t_0=9): $u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\dfrac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$. Имеем: $u'(t) = 2t-11$ $u''(t) = 2$, $u'(9) = 7$, u(9)=2. Тогда $u(t)=2+7(t-9)+(t-9)^2$. Окончательно получаем: $f(t)=u(t)\cdot\eta(t-9)=[2+7(t-9)+(t-9)^2]\cdot\eta(t-9)$.). По таблице $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$, $t\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$ и $t^2\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}$. Согласно теореме запаздывания $1\cdot\eta(t-9) \risingdotseq \dfrac{e^{-9p}}{p}$, $(t-9)\cdot\eta(t-9) \risingdotseq \dfrac{e^{-9p}}{p^2}$ и $(t-9)^2\cdot\eta(t-9) \risingdotseq \dfrac{2e^{-9p}}{p^3}$. Применим свойство линейности:

$f(t) \risingdotseq \frac{2e^{-9p}}{p} + \frac{7e^{-9p}}{p^2} + \frac{2e^{-9p}}{p^3} = (\frac{2}{p} + \frac{7}{p^2} + \frac{2}{p^3}) \cdot e^{-9p}$.

ОТВЕТ: $f(t) \risingdotseq (\frac{2}{p} + \frac{7}{p^2} + \frac{2}{p^3}) \cdot e^{-9p}$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти оригинал по изображению, используя свойства преобразования Лапласа:

$$F(p) = \frac{d}{dp}\left(\frac{5(p+3)}{(p+3)^2 - 1}\right).$$

РЕШЕНИЕ

Наличие слагаемого $(p+3)^2$ в сумме $(p+3)^2-1$, стоящей в знаменателе, говорит о том, что косинус имеет смещение, т.е. нужно воспользоваться формулой $e^{\lambda p} \mathrm{ch}\, wt \risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 - w^2}$.

Действительно, $\frac{5(p+3)}{(p+3)^2-1} = 5\frac{p+3}{(p+3)^2 - 1^2} \risingdotseq 5e^{-3t}\mathrm{ch}t$. По теореме о дифференцировании изображения имеем: $\frac{d}{dp}\left(\frac{5(p+3)}{(p+3)^2-1}\right) \risingdotseq -5te^{-3t}\mathrm{ch}t$.

ОТВЕТ: : $\frac{d}{dp}\left(\frac{5(p+3)}{(p+3)^2-1}\right) \risingdotseq -5te^{-3t}\mathrm{ch}t$.

ЗАДАНИЕ 9

Найти оригинал с помощью вычетов: $F(p) = \frac{1}{p^3 - 6p^2 + 18p}$.

РЕШЕНИЕ

Для отыскания f(t) нужно найти сумму вычетов функции $F(p) \cdot e^{pt}$ во всех особых точках F(p). Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $p(p^2+6p+18)=0$ следует, что корнями являются $p_1=0$, $p_2=3-3i$, $p_3=3+3i$. Все корни являются простыми полюсами для функции F(p). Для простого полюса справедливо следующее: если $\Phi(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, а p_0 является простым полюсом $\Phi(p)$, то вычет можно вычислить по формуле $\operatorname*{res}_{p_0} \Phi(p) = \frac{\varphi(p_0)}{\psi'(p_0)}$.

В данном случае $\varphi(p)=e^{pt}$, $\psi(p)= p(p^2-6p+18)$ и $\psi'(p) = 3p^2 - 12p + 18$. Следовательно,

$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{1}{18}$, $\operatorname*{res}_{p=3-3i}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(3-3i)}{\psi'(3-3i)} = \frac{e^{(3-3i)t}}{3(3-3i)^2 - 12(3-3i) + 18} = -\frac{e^{(3-3i)t}}{18(i+1)}$,

$\operatorname*{res}_{p=3+3i}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{\varphi(3+3i)}{\psi'(3+3i)} = \frac{e^{(3+3i)t}}{3(3+3i)^2 - 12(3+3i) + 18} = \frac{e^{(3+3i)t}}{18(i-1)}$. Просуммируем все вычеты:

$\operatorname*{res}_{p=0}[F(p)\cdot e^{pt}] + \operatorname*{res}_{p=3-3i}[F(p)\cdot e^{pt}] + \operatorname*{res}_{p=3+3i}[F(p)\cdot e^{pt}] = \frac{1}{18} + \frac{1}{18}(-\frac{e^{-3it}}{i+1} + \frac{e^{3it}}{i-1})e^{3t} =$

$= \frac{1}{18} - \frac{1}{18} \cdot \frac{-e^{-3it}(i-1) + e^{3it}(i+1)}{2} \cdot e^{3t} = \frac{1}{18} - \frac{1}{18}(i \cdot \mathrm{sh}(3it) + \mathrm{ch}(3it)) \cdot e^{3t} =$

$= \frac{1}{18} - \frac{1}{18}(\cos 3t - \sin 3t) \cdot e^{3t}$. Здесь учтено, что $\cos(t)=\mathrm{ch}(it)$, а $\sin(t)=-i\cdot\mathrm{sh}(it)$.

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{p^3-6p^2+18p} \risingdotseq \dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{18}(\cos 3t-\sin 3t)\cdot e^{3t}$.

ЗАДАНИЕ 10

Найти оригинал, произведя разложение рациональной дроби на элементарные:

$$F(p)=\frac{p^2+3p-2}{(p-1)(p^2+9)}.$$

РЕШЕНИЕ

Найдём корни знаменателя функции F(p). Из уравнения $(p-1)(p^2+9)=0$ следует, что корнями являются $p_1=1$, $p_2=-3i$, $p_3=3i$. Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{p^2+3p-2}{(p-1)(p^2+9)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+9}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим:

$$\frac{p^2+3p-2}{(p-1)(p^2+9)}=\frac{A(p^2+9)+(Bp+C)(p-1)}{(p^2+9)(p-1)}.$$

Знаменатели в обеих частях равны, следовательно, равны и числители:
$A(p^2+9)+(Bp+C)(p-1)=p^2+3p-2$. Полагая p=1, получим A=1/5. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, найдём B: A+B=1 или B=1-A=4/5. Приравнивая коэффициенты при p в левой и правой частях равенства, найдём C: -B+C=3 или
C=3+B=3+4/5=19/5. Таким образом,

$$\frac{p^2+3p-2}{(p-1)(p^2+9)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{p}{p^2+9}+\frac{19}{5}\cdot\frac{1}{p^2+9}.$$

Применяя теорему смещения и свойство линейности, получим:

$$\frac{p^2+3p-2}{(p-1)(p^2+9)}\risingdotseq\frac{1}{5}\cdot e^t+\frac{4}{5}\cdot\cos 3t+\frac{19}{15}\sin 3t.$$

ОТВЕТ: $\dfrac{p^2+3p-2}{(p-1)(p^2+9)}\risingdotseq\dfrac{1}{5}\cdot e^t+\dfrac{4}{5}\cdot\cos 3t+\dfrac{19}{15}\sin 3t$.

ЗАДАНИЯ 11, 12

Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

11. $x''+3x'-4x=2\operatorname{sh}t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=2$ **;** **12.** $x''+4x'=20\sin 3t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$ **.**

РЕШЕНИЯ.

11. $x''+3x'-4x=2\operatorname{sh}t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=2$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2$. По таблице $2\operatorname{sh}t\risingdotseq\dfrac{2}{p^2-1}$. Получаем операторное

уравнение $p^2X(p)+3pX(p)-4X(p)-2=\dfrac{2}{p^2-1}$ или $X(p)[p^2+3p-4]=\dfrac{2}{p^2-1}+2$. Тогда

$X(p)=\dfrac{2p^2}{(p^2-1)[p^2+3p-4]}=\dfrac{2p^2}{(p+1)(p-1)^2(p+4)}$. Применим метод разложения на простые дроби:

$\dfrac{2p^2}{(p+1)(p-1)^2(p+4)}=\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p+4}+\dfrac{C}{p-1}+\dfrac{D}{(p-1)^2}$. Отсюда

$2p^2=A(p+4)(p-1)^2+B(p+1)(p-1)^2+C(p+1)(p+4)(p-1)+D(p+1)(p+4)$. Если p=-1, то

$A=\frac{1}{6}$, при $p=-4$ получим $B=-\frac{32}{75}$, при $p=1$ получим $D=\frac{1}{5}$. Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=\frac{13}{50}$. Таким образом,

$X(p)=\frac{1}{6(p+1)}-\frac{32}{75(p+4)}+\frac{13}{50(p-1)}+\frac{1}{5(p-1)^2}$. Пользуясь формулой $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$ и теоремой смещения $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$, получим: $x(t)=\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{32}{75}e^{-4t}+\frac{1}{50}(10t+13)e^t$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{32}{75}e^{-4t}+\frac{1}{50}(10t+13)e^t$.

12. $x''+4x'=20\sin 3t,\quad x(0)=0,\ x'(0)=0$. Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)$. По таблице $20\sin 3t \risingdotseq \frac{60}{p^2+9}$. Получаем операторное уравнение $p^2X(p)+4pX(p)=\frac{60}{p^2+9}$ или $X(p)p[p+4]=\frac{60}{p^2+9}$. Тогда $X(p)=\frac{60}{p(p^2+9)(p+4)}$.

Применим метод разложения на простые дроби: $\frac{60}{p(p^2+9)(p+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{Cp+D}{p^2+9}$. Отсюда

$60=A(p+4)(p^2+9)+Bp(p^2+9)+(Cp+D)p(p+4)$. Если p=0, то $A=\frac{5}{3}$, при $p=-4$ получим $B=-\frac{3}{5}$.

Для определения C приравняем коэффициенты при p^3: A+B+C=0. Отсюда $C=-\frac{16}{15}$. Для определения D приравняем коэффициенты при p^2: 2A+2C+D=0. Отсюда $D=-\frac{12}{5}$. Таким образом, $\frac{60}{p(p^2+9)(p+4)}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p+4}-\frac{16}{15}\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}$. Следовательно,

$x(t)=\frac{5}{3}-\frac{3}{5}e^{-4t}-\frac{4}{5}\sin 3t-\frac{16}{15}\cos 3t$.

ОТВЕТ: $x(t)=\frac{5}{3}-\frac{3}{5}e^{-4t}-\frac{4}{5}\sin 3t-\frac{16}{15}\cos 3t$.

ЗАДАНИЕ 13

Решить систему уравнений с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} x'-3x-3y=3e^{3t} \\ y'-y-x=e^{2t} \end{cases} \quad x(0)=y(0)=0$$

РЕШЕНИЕ

Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t)\risingdotseq pX(p)$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)$, а по таблице $e^{2t}\risingdotseq\frac{1}{p-2}$ и $e^{3t}\risingdotseq\frac{1}{p-3}$. Получили систему уравнений в изображениях:

$$\begin{cases} X(p)[p-3]-3Y(p)=\dfrac{3}{p-3} \\ -X(p)+Y(p)[p-1]=\dfrac{1}{p-2} \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на p-1, а второе – на 3, затем сложим их. Получим:

$X(p)(p-1)(p-3)-3X(p)=\dfrac{3(p-1)}{p-3}+\dfrac{3}{p-2}=\dfrac{3(p^2-3p+2)+3p-9}{(p-2)(p-3)}$ или $p(p-4)X(p)=\dfrac{3(p^2-2p-1)}{(p-2)(p-3)}$. Тогда

$X(p)=\dfrac{3(p^2-2p-1)}{p(p-4)(p-2)(p-3)}$. Разложим правую часть на простые множители:

$\dfrac{3(p^2-2p-1)}{p(p-4)(p-2)(p-3)}=$

$=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p-2}+\dfrac{C}{p-3}+\dfrac{D}{p-4}=\dfrac{A(p-2)(p-3)(p-4)+Bp(p-3)(p-4)+Cp(p-2)(p-4)+Dp(p-2)(p-3)}{p(p-2)(p-3)(p-4)}$.

Приравняем числители:

$A(p-2)(p-3)(p-4)+Bp(p-3)(p-4)+Cp(p-2)(p-4)+Dp(p-2)(p-3)=3(p^2-2p-1)$ полагая p=0, находим A=1/8, при p=2 получим B=-3/4, при p=3 находим C=-2, при p=4 находим D=21/8. Таким образом, $X(p)=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{p}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{p-2}-2\cdot\dfrac{1}{p-3}+\dfrac{21}{8}\cdot\dfrac{1}{p-4}$. Следовательно,

$x(t)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{4}e^{2t}-2e^{3t}+\dfrac{21}{8}e^{4t}$. Из первого уравнения ситемы следует, что $y(t)=\dfrac{1}{3}x'(t)-x(t)-e^{3t}$,

т.е. $y(t)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{4}e^{2t}-2e^{3t}+\dfrac{21}{8}e^{4t}\right)'-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{4}e^{2t}+2e^{3t}-\dfrac{21}{8}e^{4t}-e^{3t}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}e^{2t}-e^{3t}+\dfrac{7}{8}e^{4t}$.

ОТВЕТ: $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{4}e^{2t}-2e^{3t}+\dfrac{21}{8}e^{4t} \\ y(t)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}e^{2t}-e^{3t}+\dfrac{7}{8}e^{4t} \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

Операторным методом с применением интеграла Дюамеля найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ *в индуктивно связанных цепях (см. схему), вызвынных напряжением u(t). Параметры цепей:* L_1, L_2 (Гн), R_1, R_2 (Ом), M (Гн). *Начальные условия* $i_1(0)=0, i_1(0)=0$.

$L_1=1,\ L_2=\dfrac{4}{3},\ R_1=\dfrac{3}{2},\ R_2=2,\ M=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\qquad u(t)=\begin{cases} e^t-1, & 0\le t<3 \\ e^{-t}+2\,\mathrm{sh}3-1, & t\ge 3 \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

Индуктивно связанные цепи описываются следующей системой уравнений:

$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ В данном случае $\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{3}{2}i_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{di_2}{dt}=u(t) \\ \dfrac{4}{3}\dfrac{di_2}{dt}+2i_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{di_1}{dt}=0 \end{cases}$ Пусть $u(t)\fallingdotseq U(p)$, $i_1(t)\fallingdotseq I_1(p)$ и $i_2(t)\fallingdotseq I_2(p)$. Тогда $\dfrac{di_1}{dt}\fallingdotseq pI_1(p)$ и $\dfrac{di_2}{dt}\fallingdotseq pI_2(p)$. Перейдём к системе операторных уравнений $\begin{cases} pI_1(p)+\dfrac{3}{2}I_1(p)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}pI_2(p)=U \\ \dfrac{4}{3}pI_2(p)+2I_2(p)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}pI_1(p)=0 \end{cases}$. Заменим функцию u(t) единичной функцией η(t), для которой $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$, и рассмотрим другую систему $\begin{cases} pX_1(p) + \frac{3}{2}X_1(p) + \frac{1}{\sqrt{3}}pX_2(p) = \frac{1}{p} \\ \frac{4}{3}pX_2(p) + 2X_2(p) + \frac{1}{\sqrt{3}}pX_1(p) = 0 \end{cases}$, в которой $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – изображения некоторых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выразим $X_2(p)$ из второго уравнения $X_2(p) = -\dfrac{pX_1(p)}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)}$ и подставим в первое. Получим:

$X_1(p)[p + \frac{3}{2} - \frac{p^2}{4p+6}] = \frac{1}{p}$ или $X_1(p)\dfrac{3(p^2+4p+3)}{2(2p+3)} = \frac{1}{p}$. Отсюда

$X_1(p) = \frac{2}{3} \cdot \dfrac{2p+3}{p(p^2+4p+3)} = \frac{2}{3} \cdot \dfrac{2p+3}{p(p+1)(p+3)}$. Для обращения функции применим метод разложения дроби на простейшие дроби: $\frac{2}{3} \cdot \dfrac{2p+3}{p(p^2+4p+3)} = \frac{2}{3} \cdot (\frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+3})$. Или

$A(p+1)(p+3) + Bp(p+3) + Cp(p+1) = 2p+3$. Полагая p=0, находим A=1, полагая p=-1, находим B=-1/2, при p=-3, определяем C=-1/2. Тогда

$X_1(p) = \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{p} - \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{2(p+3)}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p+3}$. Следовательно, $x_1(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(e^{-t} + e^{-3t})$.

Изображение $I_1(p)$ связано с изображением $X_1(p)$ формулой $I_1(p) = pX_1(p)U(p)$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_1(0)=0$, получим: $i_1(t) = \int_0^t u(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$. Поскольку

$x_1'(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(e^{-t} + e^{-3t})\right)' = \frac{1}{3}e^{-t} + e^{-3t}$, то при t<3

$$i_1(t) = \int_0^t (e^{\tau} - 1) \cdot [\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}]d\tau = \frac{1}{6}e^{-t+2\tau}\Big|_0^t + \frac{1}{4}e^{-3t+4\tau}\Big|_0^t - \frac{1}{3}e^{-t+\tau}\Big|_0^t - \frac{1}{3}e^{-3t+3\tau}\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{6}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t}) - \frac{1}{3}(1 - e^{-t}) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) = \frac{5}{12}e^t + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12}e^{-3t}.$$

При t≥3 получим: $i_1(t) = \int_0^3 (e^{\tau} - 1) \cdot [\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}]d\tau + \int_3^t (e^{-\tau} + 2sh3 - 1) \cdot [\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}]d\tau =$

$$= \frac{1}{6}(e^{-t+6} - e^{-t}) + \frac{1}{4}(e^{-3t+12} - e^{-3t}) - \frac{1}{3}(e^{-t+3} - e^{-t}) - \frac{1}{3}(e^{-3t+9} - e^{-3t}) + \frac{(2sh3-1)}{3}[e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)}]\Big|_3^t =$$

$$= \frac{1}{6}(e^{-t+6} - e^{-t}) + \frac{1}{4}(e^{-3t+12} - e^{-3t}) - \frac{1}{3}(e^{-t+3} - e^{-t}) - \frac{1}{3}(e^{-3t+9} - e^{-3t}) + \frac{(2sh3-1)}{3}[2 - e^{-t+3} - e^{-3t+9}] =$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}sh3 + \frac{2t - e^6}{6}e^{-t} - \frac{e^{12} + 2e^6 - 1}{4}e^{-3t}$$

Найдём $x_2(t)$:

$$X_2(p) = -\frac{pX_1(p)}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)} = \frac{p}{\sqrt{3}(\frac{4}{3}p+2)} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2p+3}{p(p+1)(p+3)} = -\frac{1}{\sqrt{3}(p+1)(p+3)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3}),$$

т.е. $x_2(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t} - e^{-3t})$. Применяя формулу Дюамеля и учитывая, что $x_2(0)=0$, получим: $i_2(t) = \int_0^t u(\tau)x_2'(t-\tau)d\tau$. Поскольку $x_2'(t) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t} - e^{-3t})\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{-t} - 3e^{-3t})$, то при 0≤t<3

$$i_2(t)=\int_0^t (e^{\tau}-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t}(\frac{1}{2}e^{2\tau}-e^{\tau})\Big|_0^t-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3t}(\frac{1}{4}e^{4\tau}-\frac{1}{3}e^{3\tau})\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}e^{t}-\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{8}e^{t}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{4\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{\sqrt{3}}{24}e^{-3t}=\frac{1}{4\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{1}{8\sqrt{3}}(e^{t}+e^{-3t})$$. При $t\geq 3$

$$i_2(t)=\int_0^3 (e^{\tau}-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau+\int_3^t (e^{-\tau}+2\operatorname{sh}3-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-3e^{-3(t-\tau)}]d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t}(\frac{1}{2}e^{2\tau}-e^{\tau})\Big|_0^3-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3t}(\frac{1}{4}e^{4\tau}-\frac{1}{3}e^{3\tau})\Big|_0^3+e^{-t}\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\Big|_3^t-\frac{\sqrt{3}}{4}e^{-3t+2\tau}\Big|_3^t+\frac{(2\operatorname{sh}3-1)}{2\sqrt{3}}[e^{-(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}]\Big|_3^t=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t}(\frac{1}{2}e^{6}-e^{3}-\frac{1}{2})-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3t}(\frac{1}{4}e^{12}-\frac{1}{3}e^{9}-\frac{1}{12})+\frac{t}{2\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}-\frac{\sqrt{3}}{4}e^{-t}+\frac{\sqrt{3}}{4}e^{-3t+6}+$$

$$-\frac{(2\operatorname{sh}3-1)}{2\sqrt{3}}[e^{-t+3}-e^{-3t+9}]=\frac{2t-6-e^{6}}{4\sqrt{3}}e^{-t}+\frac{e^{12}+2e^{6}-1}{8\sqrt{3}}e^{-3t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases} i_1(t)=\frac{5}{12}e^{t}+\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{2}{3}+\frac{1}{12}e^{-3t} \\ i_2(t)=\frac{1}{4\sqrt{3}}e^{-t}-\frac{1}{8\sqrt{3}}(e^{t}+e^{-3t}) \end{cases}$ при $0\leq t<3$ и

$\begin{cases} i_1(t)=-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\operatorname{sh}3+\frac{2t-e^{6}}{6}e^{-t}-\frac{e^{12}+2e^{6}-1}{4}e^{-3t} \\ i_2(t)=\frac{2t-6-e^{6}}{4\sqrt{3}}e^{-t}+\frac{e^{12}+2e^{6}-1}{8\sqrt{3}}e^{-3t} \end{cases}$ при $t\geq 3$.

ЗАДАНИЕ 15

Решить уравнение с переменными коэффициентами: $tx''-(10t+1)x'+5(5t+1)x=0$.

РЕШЕНИЕ

Перейдём в дифференциальном уравнении к изображениям. Если $x(t)\risingdotseq X(p)$, то $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq -\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае $tx(t)\risingdotseq -\frac{dX}{dp}$,

$tx'(t)\risingdotseq -\frac{d}{dp}\{pX-x(0)\}=-(X+p\frac{dX}{dp})$, $tx''\risingdotseq -\frac{d}{dp}\{p^2X-px(0)-x'(0)\}=-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))$. Учитывая это, получаем операторное уравнение:

$-(2pX+p^2\frac{dX}{dp}-x(0))-(pX-x(0))+10(X+p\frac{dX}{dp})-25\frac{dX}{dp}+5X=0$. Или

$(-p^2+10p-25)\frac{dX}{dp}-3(p-5)X+2x(0)=-(p-5)^2\frac{dX}{dp}-3(p-5)X+2x(0)=0$. Таким образом, получилось линейное дифференциальное уравнение $\frac{dX}{dp}+\frac{3}{(p-5)}X=\frac{2x(0)}{(p-5)^2}$. Применим метод Бернулли. Если $X(p)=U\cdot V$, то U и V определяются соответственно уравнениями: $\frac{dU}{dp}+\frac{3}{(p-5)}U=0;\quad UV'=\frac{2x(0)}{(p-5)^2}$. Таким образом, $\frac{dU}{U}=-\frac{3dp}{p-5};\quad \ln|U|=-3\ln|p-5|;\quad U(p)=\frac{1}{(p-5)^3}$.

Подставим это во второе уравнение:

$\frac{V'}{(p-5)^3}=\frac{2x(0)}{(p-5)^2}$ или $V'=2x(0)(p-5)$. Тогда $V=x(0)(p-5)^2+C$. Следовательно,

$X(p)=\frac{x(0)(p-5)^2+C}{(p-5)^3}=\frac{x(0)}{p-5}+\frac{C}{2}\cdot\frac{2}{(p-5)^3}$ Переходя к оригиналу, получим $x(t)=e^{5t}(x(0)+Ct^2)$.

ОТВЕТ: $x(t)=e^{5t}(x(0)+Ct^2)$.

ЗАДАНИЕ 16

Решить операционным методом уравнение в частных производных:

$(x+1)\frac{\partial u}{\partial x}=u+y, \quad x>0,\ y>0, \quad u\big|_{x=0}=y^3.$

РЕШЕНИЕ

Пусть $u(x,y)\risingdotseq U(p,y)$. Тогда $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\risingdotseq pU(p,y)-u(0,y)=pU(p,y)-y^3$. Воспользуемся свойством дифференцирования изображения: $tf(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}F(p)$. В данном случае

$x\frac{\partial u}{\partial x}\risingdotseq-\frac{d}{dp}\{pU-y^3\}=-(U+p\frac{dU}{dp})$, Запишем операторное уравнение:

$-U-p\frac{dU}{dp}+(pU-y^3)=U+\frac{y}{p}$ или $\frac{dU}{dp}-\frac{(p-2)}{p}U=-\frac{y^3}{p}-\frac{y}{p^2}$. Это линейное уравнение первого по-

рядка. Его решение имеет вид: $U(p,y)=\frac{C(p,y)}{p^2}e^p$, где C(p,y) – функция, определяемая из уравнения $C'(p,y)\frac{e^p}{p^2}=-\frac{y^3}{p}-\frac{y}{p^2}$, т.е. $C(p,y)=-\int y^3p+y]e^{-p}dp=[y^3(p-1)+y]\cdot e^{-p}+C_1$.

Следовательно, решением уравнения будет

$U(p,y)=\frac{C(p,y)}{p^2}e^p=\frac{1}{p^2}[y^3(p+1)+y]e^p+C_1]e^{-p}=\frac{y^3(p+1)+y}{p^2}+\frac{C_1}{p^2}e^p$. По свойству изображений Лапласа $U(p,y)\to0$ при $p\to\infty$. Это возможно только тогда, когда $C_1=0$. Таким образом,

$U(p,y)=\frac{y^3(p+1)+y}{p^2}=\frac{y^3+y}{p^2}+\frac{y^3}{p}$. Пользуясь таблицами, находим $u(x,y)=(y^3+y)x+y^3$.

ОТВЕТ: $u(x,y)=(y^2+1)yx+y^3$