Вариант № 1

1. Найти область определения функции : $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}$.

Область определения данной функции определяется неравенством $x^2 - 3x - 4 > 0$. Корнями уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$ являются числа $x_1 = -1, x_2 = 4$. Так как ветви параболы $y = x^2 - 3x - 4$ направлены вверх, то неравенство $x^2 - 3x - 4 > 0$ выполняется при $x_1 < -1$ и $x_2 > 4$. **Ответ:** $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

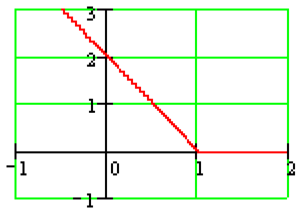
2. Построить график функции: $y = 1 - x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

Так как $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ всегда, то данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию:

$$y = 1 - x + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1 - x + \sqrt{(x-1)^2} = 1 - x + |x - 1|.$$

Таким образом, $y = \begin{cases} 0, & если\ x \geq 1, \\ 2(1-x), & если\ x < 1 \end{cases}$.

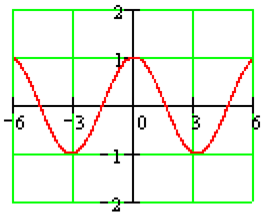
Ответ: график представлен на рисунке.

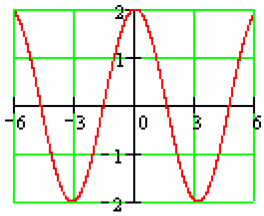


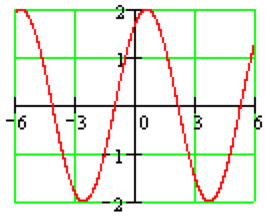
3. Построить график функции: $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию. Вынесем за скобки множитель 2: $y = 2(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = 2(\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$.

Последовательно строим сначала $y = \cos(x)$, затем $y = 2\cos(x)$, затем сдвигаем график вправо по оси OX на величину π/6. **Ответ:** построения представлены на рисунках.

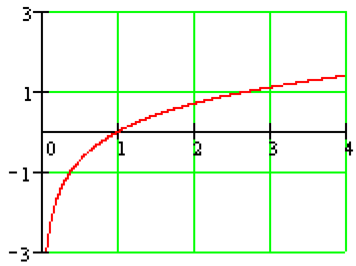






4. Построить график функции: $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$.

Исключим параметр *t*, подставляя во вторую формулу $\sin t = x$. Получим $y = \ln x$. Функция определена для *x*>0. **Ответ:** график представлен на рисунке.



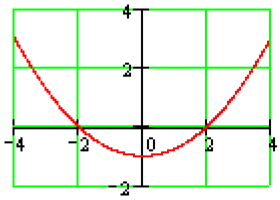
5. Построить график функции: $\rho = \dfrac{2}{1 - \sin\varphi}$.

Перейдём к декартовым координатам. Так как $y = \rho\sin\varphi, x = \rho\cos\varphi$, то $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Подставим это в функцию:

$\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{2}{1 - y/\sqrt{x^2 + y^2}}$ *или* $1 = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2} - y}$. Следовательно, $\sqrt{x^2 + y^2} - y = 2$ или $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 + y$. Возведём обе части в квадрат:

$x^2 + y^2 = 4 + 4y + y^2$. Окончательно, данная функция в декартовых координатах имеет вид:

$y = \dfrac{x^2}{4} - 1$. Это парабола с вершиной в точке (0;-1), пересекающая ось OX в точках $x_1=-2$ и $x_2=2$. **Ответ:** график представлен на рисунке.



6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+...+3n}{n^2+4}$ (неопределённость вида (∞/∞)).

Воспользуемся формулой для суммы арифметической прогрессии: $3+6+...+3n = \dfrac{3+3n}{2}\cdot n = \dfrac{3}{2}n(n+1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+6+...+3n}{n^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+4} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^{-2}}{1+4n^{-2}} = \frac{3}{2}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+...+3n}{n^2+4} = \dfrac{3}{2}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1} =$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{x^2(x+1)-(x+1)}{x^2(x+1)+(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1} = 0$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножаем числитель и знаменатель на сопряжённые выражения:

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2\cdot 4}{6} = \frac{4}{3}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{4}{3}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся формулой $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x}\right] = 4\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^{-2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 4.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x} = 4$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z = e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \left|\frac{2}{n-1} = \frac{1}{t},\ \text{если } n\to\infty,\ \text{то } t\to\infty,\ n = 2t+1\right| =$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1}=e^{2}.$$ **Ответ:** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}=e^{2}$.

11. Вычислить предел: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной: $x-1=t,\ x=t+1,\ \text{если } x\to 1,\ \text{то } t\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}=$$

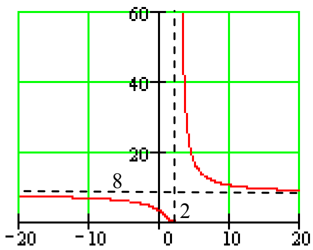
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2-1}{\ln(t+1)}=|\,\ln(t+1)\sim t\,|=\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{t}=\lim_{t\to 0}(t+2)=2.$$ **Ответ:** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}=2$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=8^{\frac{x-1}{x-2}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме x=2. В точке x=2 функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

$$\lim_{x\to 2-0}8^{\frac{x-1}{x-2}}=8^{\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x-1}{x-2}}=8^{-\infty}=0,$$

$$\lim_{x\to 2+0}8^{\frac{x-1}{x-2}}=8^{\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x-1}{x-2}}=8^{\infty}=\infty.$$ Таким образом, в точке x=2 имеет место бесконечный разрыв второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности:



$$\lim_{x\to-\infty}8^{\frac{x-1}{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}8^{\frac{x-1}{x-2}}=8^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x-2}}=8^{1}=8.$$ **Ответ:** В точке x=2 функция имеет разрыв второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

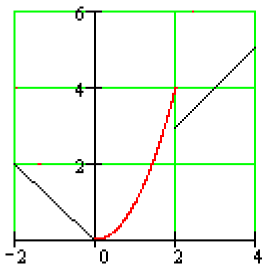
13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}.$$

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}(-x)=0,\quad \lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x^2=0,$$

$$\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}x^2=4,\quad \lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}(x+1)=3.$$



Таким образом, в точке x=0 функция непрерывна, а в точке x=2 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=2 равна (−1).

Ответ: В точке x=2 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$$f(x)=x+\arcsin\left(x^2\sin\frac{6}{x}\right),\ x\ne 0,\ f(0)=0.$$

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0=0$, $f(x_0)=0$, поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\arcsin(x^2\sin\frac{6}{x})}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x^2\sin\frac{6}{x})}{x}$. Далее, $\arcsin(x^2\sin\frac{6}{x})\sim x^2\sin\frac{6}{x}$, т.е.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x^2\sin\frac{6}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{6}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{6}{x}=0$, так как $\left|\sin\frac{6}{x}\right|\le 1$. Следовательно, $f'(0)=1$.

Ответ: $f'(0)=1$.

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y=(arctg\,x)^{(\ln arctg\,x)/2}$.

Прологарифмируем функцию: $\ln y=\frac{1}{2}\ln arctg\,x\cdot\ln arctg\,x=\frac{1}{2}[\ln arctg\,x]^2$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\ln arctg\,x\cdot\dfrac{1}{arctg\,x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$.

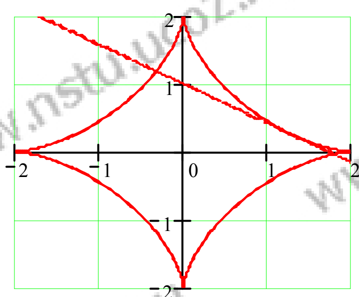
Подставляем сюда y: $y'=(arctg\,x)^{(\ln arctg\,x)/2}\cdot\dfrac{\ln arctg\,x}{(1+x^2)arctg\,x}$. **Ответ:**

$y'=(arctg\,x)^{(\ln arctg\,x)/2}\cdot\dfrac{\ln arctg\,x}{(1+x^2)arctg\,x}$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$\begin{cases}x=2\sin^3 t\\ y=2\cos^3 t\end{cases}\quad t=\dfrac{\pi}{3}$.

Уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ имеют вид $y=y_0+y'_x(x_0)\cdot(x-x_0)$ и $y=y_0-(1/y'_x(x_0))\cdot(x-x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:



$x_0=x(\frac{\pi}{3})=2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^3=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $y_0=y(\frac{\pi}{3})=2\cdot(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{4}$.

Найдём производные y'_x и y''_{xx}:

$y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=-\dfrac{6\cos^2 t\cdot\sin t}{6\sin^2 t\cdot\cos t}=-ctg\,t$. Тогда

$y'_x(\frac{\pi}{3})=-ctg(\frac{\pi}{3})=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Далее,

$y''_x=\dfrac{(y'_t)'_t}{x'_t}=\dfrac{1}{6\sin^4 t\cdot\cos t}$, следовательно, $y''_x=\dfrac{(y'_t)'_t}{x'_t}=\dfrac{32}{6\cdot 9}=\dfrac{16}{27}$. Таким образом, уравнение касательной $y=1/4-(1/\sqrt{3})\cdot(x-3\sqrt{3}/4)$, уравнение нормали $y=1/4+\sqrt{3}\cdot(x-3\sqrt{3}/4)$. Или $x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$ и $\sqrt{3}x-y-2=0$.

Ответ: $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\dfrac{1}{4}\right)$, $y'_x(x_0)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y''_x(x_0)=\dfrac{16}{27}$, $\begin{cases}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0 & \textit{касательная}\\ \sqrt{3}x-y-2=0 & \textit{нормаль}\end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $xy + e^{x+y} - 1 = 0$, принимает в точке $x_0 = 0$ значение $y_0 = 0$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$:

$y + xy' + e^{x+y}(1+y') = 0$. Из этого равенства находим: $y' = -\dfrac{y + e^{x+y}}{x + e^{x+y}}$. Из уравнения функции $e^{x+y} = 1 - xy$. Поэтому $y' = -\dfrac{y+1-xy}{x+1-xy}$. Находим вторую производную:

$y'' = -\dfrac{(y' - y - xy')(x+1-xy) - (y+1-xy)(1-y-xy')}{(x+1-xy)^2}$. Вычислим производные в точке $x_0 = 0$: $y' = -\dfrac{1}{1} = -1,\ \ y'' = -\dfrac{-2}{1} = 2$. **Ответ:** $y' = -\dfrac{y+1-xy}{x+1-xy}$,

$y'' = -\dfrac{(y' - y - xy')(x+1-xy) - (y+1-xy)(1-y-xy')}{(x+1-xy)^2}$, $y'(0) = -1,\ \ y''(0) = 2$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x},\ \ x = 1{,}012$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0)),\ \ \Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 1,\ \ y(x_0) = y(1) = 2,\ \ y' = \dfrac{1}{3}(x^3 + 7x)^{-2/3} \cdot (3x^2 + 7),\ \ y'(x_0) = y'(1) = \dfrac{10}{12},\ \ \Delta x = 0{,}012$.

Тогда $y(1{,}012) \approx 2 + \dfrac{10}{12} \cdot 0{,}012 = 2{,}01$. **Ответ:** $y \approx 2{,}01$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Это неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x}{x^2-1}\ln(2x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}\ln(2x-1)}$. Найдём предел в показателе степени: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln(2x-1)}{x^2-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[x\ln(2x-1)]'}{[x^2-1]'} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1) + 2x/(2x-1)}{2x} = 1$. Следовательно,

$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x^2-1}} = e$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{x}{x^2-1}} = e$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}((\pi - 2arctg\,x)\cdot \ln x)$.

Это неопределённость вида $(0\cdot\infty)$. Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to\infty}((\pi - 2arctg\,x)\cdot \ln x) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\pi - 2arctg\,x}{\ln^{-1} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{[\pi - 2arctg\,x]'}{[\ln^{-1} x]'} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2/(1+x^2)}{(-\ln^{-2} x)/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x\ln^2 x}{(1+x^2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln^2 x + 4\ln x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4(\ln x + 1)/x}{2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x + 1)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2/x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}((\pi - 2arctg\,x)\cdot \ln x) = 0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x - x_0)$: $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3,\ \ x_0 = 2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$
Найдём все производные: $f'(x)=4x^3+4x-1$, $f''(x)=12x^2+4$, $f'''(x)=24x$, $f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(2)=19$, $f'(2)=39$, $f''(2)=52$, $f'''(2)=48$, $f^{(4)}(2)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=19+39(x-2)+26(x-2)^2+8(x-2)^3+(x-2)^4$.

Ответ: $f(x)=19+39(x-2)+26(x-2)^2+8(x-2)^3+(x-2)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, $x_0=1$.

Применяем формулу Тейлора:
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$
Вычисляем последовательно: $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$, $f'(1)=-\dfrac{1}{8}$,
$$f''(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{x(\sqrt{x}+1)^4}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)^2+\sqrt{x}\cdot 2(\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{4}\frac{3\sqrt{x}+1}{x(\sqrt{x}+1)^3\sqrt{x}},\quad f''(1)=\frac{1}{8},$$
$$f'''(x)=\frac{1}{4}\frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3-(3\sqrt{x}+1)\cdot\left(\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)^3+\frac{3}{2\sqrt{x}}x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2\right)}{x^3(\sqrt{x}+1)^6}=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{\frac{3}{2}x(\sqrt{x}+1)-(3\sqrt{x}+1)\cdot\left(\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)+\frac{3}{2}x\right)}{x^3(\sqrt{x}+1)^4},\quad f'''(1)=-\frac{15}{64}.$$
Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}(x-1)+\dfrac{1}{16}(x-1)^2-\dfrac{5}{128}(x-1)^3+o((x-1)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=x^2-4x-(x-2)\ln(x-1)$, $x_0=2$.

Найдём значение функции и её первых трёх производных в заданной точке:
$f(2)=-4$, $f'(x)=2x-4-\ln(x-1)-(x-2)(x-1)^{-1}$, $f'(2)=0$,
$f''(x)=2-2(x-1)^{-1}+(x-2)(x-1)^{-2}$, $f''(2)=0$, $f'''(x)=3(x-1)^{-2}-2(x-2)(x-1)^{-3}$,
$f'''(2)=3$. По формуле Тейлора $f(x)=-4+\dfrac{1}{2}(x-2)^3+o((x-2)^3)$. **Ответ:** В окрестности точки (2, -4) функция ведёт себя как кубическая функция. Точка (2, -4) является точкой перегиба: слева – интервал выпуклости, справа – интервал вогнутости.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos(\sqrt{2}x)}{x^4}$.

По формуле Тейлора $e^{-x^2}=1+(-x^2)+\dfrac{1}{2!}(-x^2)^2+\dfrac{1}{3!}(-x^2)^3+o((-x^2)^3)=$

$=1-x^2+\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{6}x^6+o(x^6)$. Аналогично, $\cos\sqrt{2}x=1-\dfrac{1}{2!}(\sqrt{2}x)^2+\dfrac{1}{4!}(\sqrt{2}x)^4+o((\sqrt{2}x)^4)=$

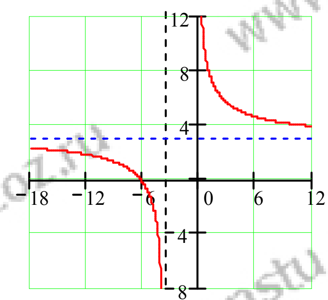
$=1-x^2+\dfrac{1}{6}x^4+o(4x^4)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos(\sqrt{2}x)}{x^4}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^6+o(x^6)-(1-x^2+\frac{1}{6}x^4+o(4x^4))}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^4+o(4x^4))}{x^4}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos(\sqrt{2}x)}{x^4}=\dfrac{1}{3}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения: $\lim\limits_{x\to -4-0}(3-3\ln\dfrac{x}{x+4})=\infty$, $\lim\limits_{x\to +0}(3-3\ln\dfrac{x}{x+4})=\infty$. Отсюда следует, что прямые $x=-4$ и $x=0$ являются односторонними вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to -\infty}(3-3\ln\dfrac{x}{x+4})=3-3\ln 1=3$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(3-3\ln\dfrac{x}{x+4})=3-3\ln 1=3$. Следовательно, прямая $y=3$ является горизонтальной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.



26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=e^{\sqrt[3]{x}}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют. 3. Функция непрерывна. Вертикальных асимптот нет. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\sqrt[3]{x}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty}e^{\sqrt[3]{x}}=0$, следовательно, наклонных асимптот нет. 5. Первая производная $y'=\dfrac{1}{3}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$. Производная в нуль не обращается ни в одной точке, следовательно, экстремумов нет. Функция монотонно возрастает, так как $y'>0$ для всех *x*. 6.

$$y''=\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{\sqrt[3]{x}}\cdot(1/3)-(2/3)x^{-1/3}e^{\sqrt[3]{x}}}{x^{4/3}}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{e^{\sqrt[3]{x}}[1-2x^{-1/3}]}{x^{4/3}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{e^{\sqrt[3]{x}}[\sqrt[3]{x}-2]}{x}.$$ В точке $x=8$ вторая производная равна нулю. Кроме того, в точке $x=0$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty,0)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости, в интервале $(0,8)$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости, в интервале $(8,\infty)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости. 7. При $x=0$ функция равна $y=e^0=1$. Точка $(0,1)$ – точка пересечения оси ОУ. С осью ОХ график не пересекается. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремумов нет, точки перегиба (0, 1) и (8, e^2).