Вариант № 2

1. Найти область определения функции : $y = \arccos\dfrac{1-2x}{3}$.

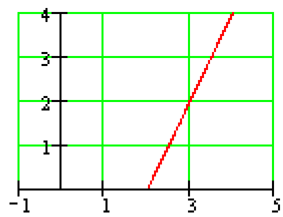
Область определения данной функции определяется неравенством $\left|\dfrac{1-2x}{3}\right| \le 1$. Умножим неравенство на 3 и освободимся от знака модуля: $-3 \le 1-2x \le 3$. Из левого неравенства находим $-4 \le -2x$ или $x \le 2$. Из правого неравенства $-2x \le 2$ или $x \ge -1$. Объединяя результаты, получим: $-1 \le x \le 2$. **Ответ:** $x \in [-1,\ 2]$.

2. Построить график функции: $y = x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

Так как $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \ge 0$ всегда, то данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию:

$$y = x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2 + \sqrt{(x-2)^2} = x - 2 + |x-2|.$$

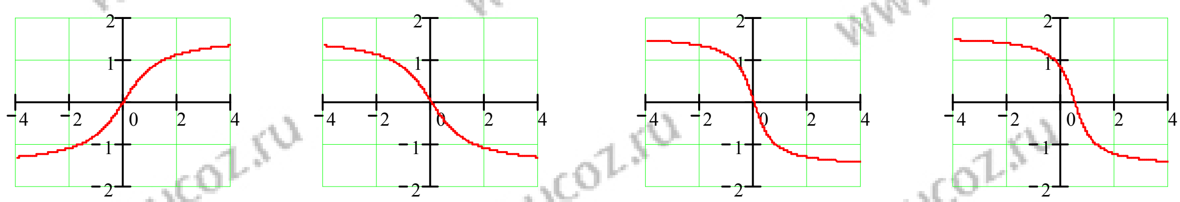
Таким образом, $y = \begin{cases} 2(x-2), & \text{если } x \ge 2, \\ 0, & \text{если } x < 2 \end{cases}$.



Ответ: график представлен на рисунке.

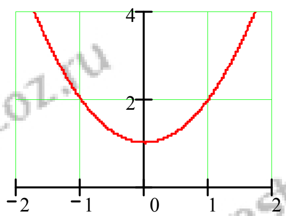
3. Построить график функции: $y = -arctg(2x-1)$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию. Вынесем за скобки множитель 2: $y = -arctg[2(x - \frac{1}{2})]$. Последовательно строим сначала $y = arctg(x)$, затем $y = -arctg(x)$ (переворачивая график вокруг оси OX), затем «сжимаем» график в два раза по оси OX и получаем $y = -arctg(2x)$, затем сдвигаем график вправо по оси OX на величину 1/2. **Ответ:** построения представлены на рисунках (y – в радианах).



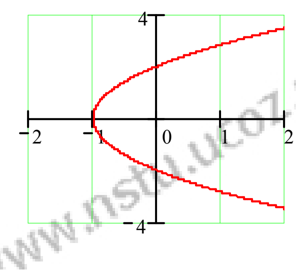
4. Построить график функции: $\begin{cases} x = tg\, t \\ y = \cos^{-2} t \end{cases}$.

Исключим параметр t, применяя формулу $\cos^2 t = \dfrac{1}{1 + tg^2 t}$. Подставляя это во вторую формулу, получим: $y = 1 + tg^2 t$ или $y = 1 + x^2$. Функция определена на всей числовой оси. **Ответ:** график представлен на рисунке.



5. Построить график функции: $\rho = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}$.

Перейдём к декартовым координатам. Так как $y = \rho\sin\varphi,\ x = \rho\cos\varphi$, то $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\cos\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.



Подставим это в функцию: $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{2}{1-x/\sqrt{x^2+y^2}}$ *или* $1=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}-x}$.

Следовательно, $\sqrt{x^2+y^2}-x=2$ или $\sqrt{x^2+y^2}=2+x$. Возведём обе части в квадрат: $x^2+y^2=4+4x+x^2$. Окончательно, данная функция в декартовых координатах имеет вид: $x=\dfrac{y^2}{4}-1$. Это парабола с вершиной в точке (-1;0), пересекающая ось OY в точках $y_1=-2$ и $y_2=2$. **Ответ:** график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона $(a+b)^k=\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i a^i b^{k-i}$, где $C_k^i=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{81-108n+54n^2-12n^3+n^4-(16-32n+24n^2-8n^3+n^4)}{1-4n+6n^2-4n^3+n^4-(1+4n+6n^2+4n^3+n^4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{65-76n+30n^2-4n^3}{-8n-8n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{65/n^3-76/n^2+30/n-4}{-8/n^2-8}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}=\dfrac{1}{2}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{(x-1)^2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель на простые множители: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{(x-1)^2}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)-4x(x-1)+3(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-3)=-2.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{(x-1)^2}=-2$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое выражение: $=\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}=-\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}+3}\cdot\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{(x+8)}{2+\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{(x+8)}{2+\sqrt[3]{x}}$

. Числитель разложим на множители как сумму кубов двух чисел. Получим:

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=-\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to-8}\frac{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2+\sqrt[3]{x}}=-\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to-8}(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=-\frac{12}{6}=-2.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=-2$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{1-\cos3x}{\sin^2 7x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся формулой $1-\cos 3t = 2\sin^2 \frac{3t}{2}$ и первым замечательным пределом: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$:

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 7x} = \left|\begin{array}{l} x-2\pi = t,\ \ x = t+2\pi,\ \ \cos 3x = \cos[3(t+2\pi)] = \cos 3t, \\ \sin 7x = \sin[7(t+2\pi)] = \sin 7t,\ \ \textit{если}\ \ x\to 2\pi,\ \ \textit{то}\ \ t\to 0 \end{array}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 3t}{\sin^2 7t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3t}{2}}{\sin^2 7t} = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3t}{2}}{\frac{3t}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{49}\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{7t}{\sin 7t}\right)^2 = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{49}\cdot\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin 7t}{7t}\right)^{-2} = \frac{9}{98}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2 7x} = \frac{9}{98}$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$ (неопределённость вида (1^{∞})).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left|\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{t},\ \textit{если}\ n\to\infty,\ \textit{то}\ t\to\infty,\ n = t-1/2\right| = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1/2} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1/2} = e$$

. **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = e$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим и поделим на сопряжённое к числителю выражение: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x} =$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{[\sqrt{x^2-x+1}+1]\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{[\sqrt{x^2-x+1}+1]\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} =$$

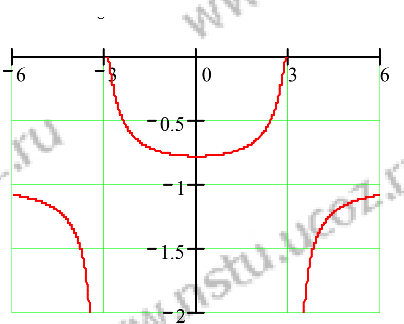
$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = \left|\begin{array}{l} x-1 = t,\ \ x = t+1, \\ \textit{если}\ x\to 1,\ \ \textit{то}\ t\to 0 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = |\ \ln(t+1)\sim t\ | = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x} = \frac{1}{2}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = -3^{\frac{2}{x^2-9}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме $x=-3$ и $x=3$. В точках $x=-3$ и $x=3$ функция имеет разрывы, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точек разрыва:

$$\lim_{x\to -3-0}\left(-3^{\frac{2}{x^2-9}}\right) = -3^{\infty} = -\infty,\quad \lim_{x\to -3+0}\left(-3^{\frac{2}{x^2-9}}\right) = -3^{-\infty} = 0,$$



$\lim\limits_{x\to 3-0}\left(-3^{\frac{2}{x^2-9}}\right)=-3^{-\infty}=0,\ \lim\limits_{x\to 3+0}\left(-3^{\frac{2}{x^2-9}}\right)=-3^{\infty}=\infty$. Таким образом, в точках x=–3 и x=3 имеют место бесконечные разрывы второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3^{\frac{2}{x^2-9}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3^{\frac{2}{x^2-9}}\right)=-3^{0}=-1$.

Ответ: В точках x=–3 и x=3 функция имеет разрывы второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

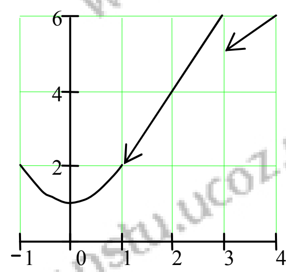
13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1,\\ 2x^2, & 1<x\le 3,\\ x+2, & x>3.\end{cases}.$$

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1)=2,\quad \lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}2x=2,$

$\lim\limits_{x\to 3-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}2x=6,\ \lim\limits_{x\to 3+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}(x+2)=5$. Таким образом, в точке x=1 функция непрерывна, а в точке x=3 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=2 равна (–1).



Ответ: В точке x=3 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x)=\sin x\cos\dfrac{5}{x},\ x\ne 0,\ f(0)=0$.

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0=0,\ f(x_0)=0$, поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos\frac{5}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{5}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{5}{x}$. Этот предел не существует, следовательно, не существует и производная в точке $x_0=0$. **Ответ:** $f'(0)$ не существует.

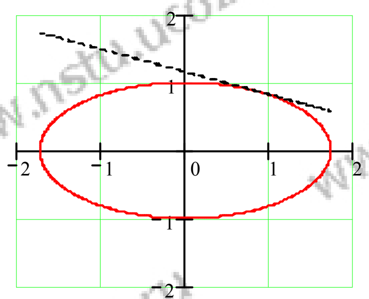
15. Найти производную показательно-степенной функции: $y=(\sin x)^{5e^x}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y=5e^x\cdot\ln\sin x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y}=5e^x\cdot\ln\sin x+5e^x\cdot ctgx=5e^x(\ln\sin x+ctgx)$. Подставляем сюда y:

$y'=5e^x(\sin x)^{5e^x}(\ln\sin x+ctgx)$. **Ответ:** $y'=5e^x(\sin x)^{5e^x}(\ln\sin x+ctgx)$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t = \frac{\pi}{3}.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:



$x_0 = x(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_0 = y(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sqrt{3}\sin t} = -\frac{ctg\, t}{\sqrt{3}}$.

Тогда $y'_x(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} ctg(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{3}$. Далее, $y''_x = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = -\frac{1}{3\sin^3 t}$, следовательно, $y''_x = -\frac{2^3}{3\cdot(\sqrt{3})^3} = -\frac{8}{9\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{27}$. Таким образом, уравнение касательной $y = \sqrt{3}/2 - (1/3)\cdot(x - \sqrt{3}/2)$, уравнение нормали $y = \sqrt{3}/2 + 3\cdot(x - \sqrt{3}/2)$. Или $x + 3y - 2\sqrt{3} = 0$ и $3x - y - \sqrt{3} = 0$.

Ответ: $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y'_x(x_0) = -\frac{1}{3}$, $y''_x(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{27}$, $\begin{cases} x + 3y - 2\sqrt{3} = 0 & \textit{касательная} \\ 3x - y - \sqrt{3} = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $4y/\pi - tg(x^2 + y) = 0$, принимает в точке $x_0 = 0$ значение $y_0 = \pi/4$. Найти y'_x, y''_{xx}, $y'_x(x_0)$, $y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $\frac{4y'}{\pi} - \frac{2x + y'}{\cos^2(x^2 + y)} = 0$.

Из этого равенства находим: $y' = \frac{2\pi x}{4\cos^2(x^2 + y) - \pi} = \frac{2\pi x}{2 + 2\cos 2(x^2 + y) - \pi}$. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2\pi(4\cos^2(x^2 + y) - \pi) + 2\pi x\cdot 8\cos(x^2 + y)\sin(x^2 + y)(2x + y')}{(4\cos^2(x^2 + y) - \pi)^2}$.

Или

$y'' = \frac{2\pi(4\cos^2(x^2 + y) - \pi) + 8\pi x(2x + y')\cdot\sin 2(x^2 + y)}{(4\cos^2(x^2 + y) - \pi)^2}$. Вычислим производные в точке $x_0 = 0$: $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{2\pi}{2 - \pi}$. **Ответ:** $y' = \frac{2\pi x}{2 + 2\cos 2(x^2 + y) - \pi}$,

$y'' = \frac{2\pi(4\cos^2(x^2 + y) - \pi) + 8\pi x(2x + y')\cdot\sin 2(x^2 + y)}{(4\cos^2(x^2 + y) - \pi)^2}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{2\pi}{2 - \pi}$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \frac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2}$, $x = 0{,}98$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0))$, $\Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 1,\ y(x_0) = y(1) = 1{,}5,\ y' = \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}),\ y'(x_0) = y'(1) = 0{,}25,\ \Delta x = -0{,}02$. Тогда $y(0{,}98) \approx 1{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}02 = 1{,}495$. **Ответ:** $y \approx 1{,}495$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{tg^2 x}$.

Это неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел: $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{tg^2 x} = \lim\limits_{x \to \pi/2} e^{tg^2 x \cdot \ln \sin x} = e^{\lim\limits_{x \to \pi/2} tg^2 x \cdot \ln \sin x}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \sin x}{tg^{-2} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \sin x}{ctg^2 x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{[\ln \sin x]'}{[ctg^2 x]'} = -\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\sin x \cdot (2ctg\, x) \sin^{-2} x} = .$$

$= -\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$ Следовательно, $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{tg^2 x} = e^{-1/2}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{tg^2 x} = e^{-1/2}$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{\sqrt{x}}) / x^2$.

Это неопределённость вида (∞/∞): $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\left(e^{\sqrt{x}}\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} \cdot 2x} = \frac{1}{4} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{3/2}} =$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{4} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot 2}{2\sqrt{x} \cdot 3x^{1/2}} = \frac{1}{12} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{24} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{24} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} =$$

$= \frac{1}{24} \lim\limits_{x \to \infty} e^{\sqrt{x}} = \infty$. **Ответ:** $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{\sqrt{x}}) / x^2 = \infty$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x - x_0)$: $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3,\ x_0 = -2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x) = 4x^3 + 4x - 1,\ f''(x) = 12x^2 + 4,\ f'''(x) = 24x,\ f^{(4)}(x) = 24$. Тогда $f(-2) = 23,\ f'(-2) = -41,\ f''(-2) = 52,\ f'''(-2) = -48,\ f^{(4)}(-2) = 24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x) = 23 - 41(x + 2) + 26(x + 2)^2 - 8(x + 2)^3 + (x + 2)^4$.

Ответ: $f(x) = 23 - 41(x + 2) + 26(x + 2)^2 - 8(x + 2)^3 + (x + 2)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x - x_0)^3)$: $f(x) = (e^x + 1)^{-2},\ x_0 = \ln 2$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(\ln 2) = \frac{1}{9},\ f'(x) = -2(e^x + 1)^{-3} e^x,\ f'(\ln 2) = -\frac{4}{27}$,

$f''(x) = 6(e^x + 1)^{-4} e^{2x} - 2(e^x + 1)^{-3} e^x = 2(e^x + 1)^{-4} e^x [2e^x - 1],\ f''(\ln 2) = 4/27$,

$f'''(x) = -8(e^x + 1)^{-5} e^{2x} [2e^x - 1] + 2(e^x + 1)^{-4} e^x [2e^x - 1] + 4(e^x + 1)^{-4} e^{2x},\ f'''(\ln 2) = -4/81$.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{9} - \frac{4}{27}(x - \ln 2) + \frac{2}{27}(x - \ln 2)^2 - \frac{2}{243}(x - \ln 2)^3 + o((x - \ln 2)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=6\sin(x-2)+x^3-6x^2+6x+4,\ \ x_0=2$.

Найдём значение функции и её первых пяти производных в заданной точке: $f(2)=0,\ \ f'(x)=6\cos(x-2)+3x^2-12x+6,\ \ f'(2)=0,$ $f''(x)=-6\sin(x-2)+6x-12,\ \ f''(2)=0,\ \ f'''(x)=-6\cos(x-2)+6,\ \ f'''(2)=0,$ $f^{(4)}(x)=6\sin(x-2),\ \ f^{(4)}(2)=0,\ \ f^{(5)}(x)=6\cos(x-2),\ \ f^{(5)}(2)=6$. По формуле Тейлора $f(x)=(x-2)^5/20+o((x-2)^5)$. **Ответ:** В окрестности точки (2, 0) функция ведёт себя как степенная функция пятой степени. Точка (2, 0) является точкой перегиба: слева – интервал выпуклости, справа – интервал вогнутости.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-e^{-x^2}}{x^4}$.

По формуле Тейлора $e^{-x^2}=1+(-x^2)+\dfrac{1}{2!}(-x^2)^2+\dfrac{1}{3!}(-x^2)^3+o((-x^2)^3)=$ $=1-x^2+\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{6}x^6+o(x^6)$. Аналогично, $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)=\dfrac{1}{2}[1+(1-\dfrac{1}{2!}(2x)^2+$ $+\dfrac{1}{4!}(2x)^4+o((2x)^4))]=1-x^2+\dfrac{1}{3}x^4+o((2x)^4)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-e^{-x^2}}{x^4}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-(1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4))}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}x^4+o(x^4))}{x^4}=-\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos(\sqrt{2}x)}{x^4}=\dfrac{1}{3}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$.

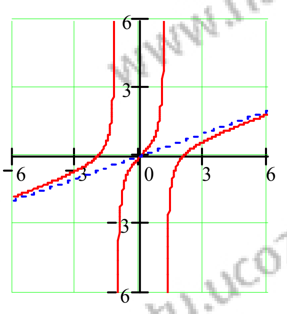
Область определения функции: $x\in(-\infty,-2/\sqrt{3})\cup(2/\sqrt{3},\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения: $\lim\limits_{x\to -2/\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}=\infty,\ \ \lim\limits_{x\to -2/\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}=-\infty,$

$\lim\limits_{x\to 2/\sqrt{3}-0}\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}=\infty,\ \ \lim\limits_{x\to 2/\sqrt{3}+0}\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}=-\infty$. Отсюда следует, что прямые $x=-2\sqrt{3}$ и $x=2\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8x}{3(3x^2-4)})=-\infty,\ \ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8x}{3(3x^2-4)})=\infty$. Из этого следует, что имеется наклонная асимптота $y=kx+b$, где k=1/3. Действительно,

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x}{x(3x^2-4)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x}{x(3x^2-4)}=\frac{1}{3}.$$ Тогда

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3-4x}{3x^2-4}-\frac{1}{3}x)=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3(x^3-4x)-3x^3+4x}{3(3x^2-4)}=0$. Таким образом, прямая $y=x/3$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.



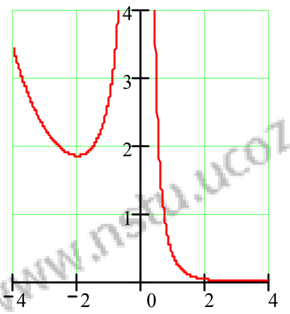
26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y = e^{-x} / x^2$.

1. Область определения: $x \in (-\infty,\, 0) \cup (0,\, \infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют. 3. Функция непрерывна во всех точках области определения. Точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = \infty$. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

4. Исследуем асимптотическое поведение функции: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{2} = 0$, следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой. Наклонных асимптот нет. 5. Первая производная $y' = \dfrac{-e^{-x}x^2 - 2xe^{-x}}{x^4} =$
$= -\dfrac{e^{-x}(x+2)}{x^3}$. Производная обращается в нуль в точке $x = -2$, в точке $x = 0$ производная не существует. В интервале $(-\infty, -2)$ $y' < 0$ - функция монотонно убывает, в интервале $(-2, 0)$ $y' > 0$ - функция монотонно возрастает, в интервале $(0, \infty)$ $y' < 0$ - функция монотонно убывает. Следовательно, в точке $x = -2$ имеет место минимум функции, причём $y_{\min} = y(-2) = e^2 / 4$. 6. $y'' = \left(-\dfrac{e^{-x}(x+2)}{x^3}\right)' =$

$$= -\frac{[-e^{-x}(x+2) + e^{-x}]x^3 - 3x^2 e^{-x}(x+2)}{x^6} =$$

$$= \frac{e^{-x}[(x+1)x + 3x + 6]}{x^4} = \frac{e^{-x}(x^2 + 4x + 6)}{x^4}.$$



Вторая производная нигде в нуль не обращается, в точке $x = 0$ вторая производная не существует. Имеем два интервала: $(-\infty,\, 0)$ и $(0,\, \infty)$. В обоих интервалах производная $y'' > 0$ - интервалы вогнутости. 7. График функции не пересекает осей координат. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке $(-2,\, e^2/4)$, точек перегиба нет.