Вариант № 5

1. Найти область определения функции : $y=\lg(5x-x^2-6)$.

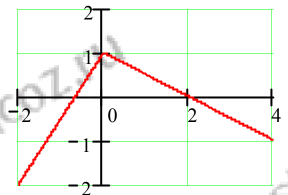
Область определения данной функции определяется неравенством $5x-x^2-6>0$. Корнями уравнения $x^2-5x+6=0$ являются числа $x_1=2, x_2=3$. Так как ветви параболы $y=-x^2+5x-6$ направлены вниз, то неравенство $-x^2+5x-6>0$ выполняется при $2<x<3$. **Ответ:** $x\in(2,3)$.

2. Построить график функции: $y=\frac{1}{2}x-|x|+1$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: если $x\geq 0$, то $y=\frac{1}{2}x-x+1=1-\frac{1}{2}x$.

Если $x<0$, то $y=\frac{1}{2}x+x+1=\frac{3}{2}x+1$. Таким образом,

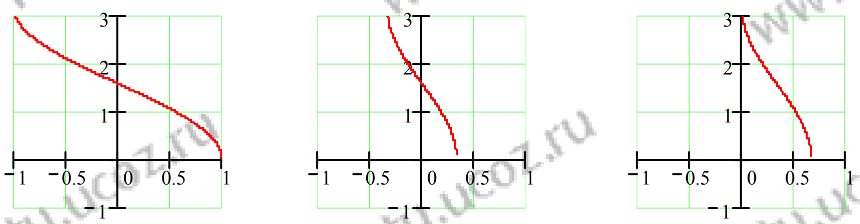
$$y=\begin{cases}1-\frac{1}{2}x, & \text{если } x\geq 0,\\ \frac{3}{2}x+1, & \text{если } x<0\end{cases}.$$



Ответ: график представлен на рисунке.

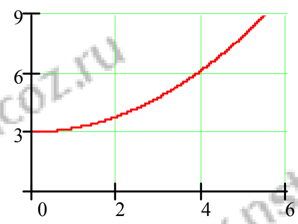
3. Построить график функции: $y=\arccos(3x-1)$.

Данная функция определена при $|3x-1|\leq 1$ или $x\in[0,2/3]$. Преобразуем функцию. Вынесем за скобки множитель 3: $y=\arccos 3(x-1/3)]$. Последовательно строим сначала $y=\arccos x$, затем $y=\arccos 3x$, «сжимая» график в три раза по оси ОХ, затем сдвигаем график вправо по оси ОХ на величину 1/3. **Ответ:** построения представлены на рисунках (y – в радианах).



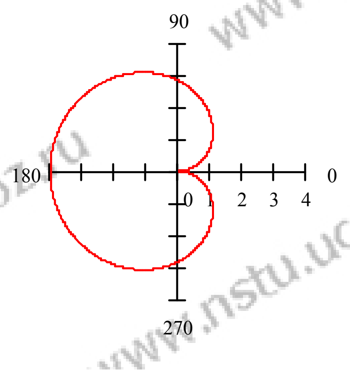
4. Построить график функции: $\begin{cases}x=5^{t+1}\\ y=5^{2t+1}+3\end{cases}$

Исключим параметр *t*. Подставим во вторую формулу $5^{t+1}=x$, получим: $y=5^{2(t+1)}\cdot\frac{1}{5}+3=x^2\cdot\frac{1}{5}+3$ или $y=\frac{x^2}{5}+3$. Функция определена при $x>0$, так как всегда $5^{t+1}>0$. **Ответ:** график представлен на рисунке.



5. Построить график функции: $\rho=4\sin(\varphi/2)$.

Функция существует, если $\sin(\varphi/2)\geq 0$, т.е. $0\leq\varphi/2\leq\pi$ или $0\leq\varphi\leq 2\pi$. Функция монотонно возрастает от 0 до 4 в интервале $0\leq\varphi\leq\pi$ и монотонно



убывает от 4 до 0 в интервале $\pi \le \varphi \le 2\pi$. **Ответ:** график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$.

Возведём все скобки в квадраты, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{36-12n+n^2-(36+12n+n^2)}{36+12n+n^2-(1-2n+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-24n}{14n-35}=\lim_{n\to\infty}\frac{-24}{14-35/n}=-\frac{12}{7}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}=-\dfrac{12}{7}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители:

$$\lim_{x\to-1/2}\frac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}=\lim_{x\to-1/2}\frac{2(x-3)(x+1/2)}{4(x-5)(x+1/2)}=\lim_{x\to-1/2}\frac{x-3}{2(x-5)}=\frac{7}{22}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}=\dfrac{7}{22}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{(x-6)}+4$:

$$=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt[3]{x-6}+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{(x-6)}+4)}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{(x-6)}+4)}=.$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt[3]{x-6})^3+2^3)}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{(x-6)}+4)}=\lim_{x\to-2}\frac{x-6+8}{(x+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{(x-6)}+4)(x^2-x+4)}=$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{1}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{(x-6)}+4)(x^2-x+4)}=\frac{1}{144}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}=\dfrac{1}{144}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,x}$ (неопределённость вида (∞/∞)).

Воспользуемся первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin3x\cdot\cos x}{\cos3x\cdot\sin x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin3x\cos x}{\sin x\cdot\cos3x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin3x}{\sin x}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\cos3x}=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\cos3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x-\pi/2=t,\ \ x=t+\pi/2,\\ \text{если}\ \ x\to\pi/2,\ \ \text{то}\ \ t\to0\end{array}\right|=-\lim_{t\to0}\frac{\cos(t+\pi/2)}{\cos(3t+3\pi/2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\sin3t}=\frac{1}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{3t}{\sin3t}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,x}=\dfrac{1}{3}$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\left|\begin{matrix}2n^2+1=t,\ \textit{если}\ n\to\infty,\ \textit{то}\ t\to\infty,\\ n^2=t/2+1/2\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t/2+1/2}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\sqrt{e}$.

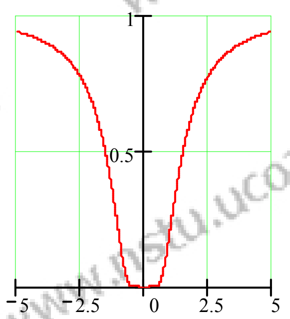
11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\,arctg\,3x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся эквивалентными величинами:

$$\lim_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4\,arctg3x}\,|\,ln(1\text{-}2x)\sim\text{-}2x,\ arctg3x\sim3x|=\lim_{x\to 0}\frac{9(-2x)}{4\cdot 3x}=-\frac{3}{2}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\,arctg\,3x}=-\dfrac{3}{2}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=5^{-\frac{1}{x^2}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме x=0. В точке x=0 функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

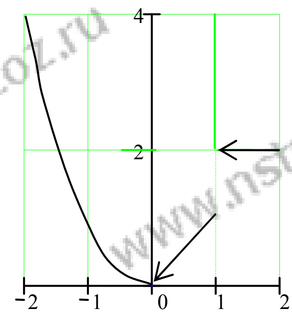


$\lim\limits_{x\to 0-0}\left(5^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\left(5^{-\frac{1}{x^2}}\right)=5^{-\infty}=0$. Таким образом, в точке x=0 имеют место устранимый разрыв. Полагая $f(0)=0$, можно считать функцию непрерывной на всей числовой оси. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^{-\frac{1}{x^2}}\right)=5^{0}=1$.

Ответ: В точке x=0 функция имеет устранимый разрыв, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось ОХ разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:



$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}x^2=0,\quad \lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}x=0,$

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}x=1,\ \lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}2=2$. Таким образом, в точке x=0 функция непрерывна, а в точке x=1 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=1 равна 2.

Ответ: В точке x=0 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x)=x^2\cos\dfrac{4}{3x}+\dfrac{x^2}{2},\ x\neq 0,\ f(0)=0$.

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0=0,\ f(x_0)=0$, поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos(4/3x)+x^2/2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x\cos(4/3x)+x/2)=0$, так как $|\cos(4/3x)|\le 1$ при любых значениях x. **Ответ:** $f'(0)=0$.

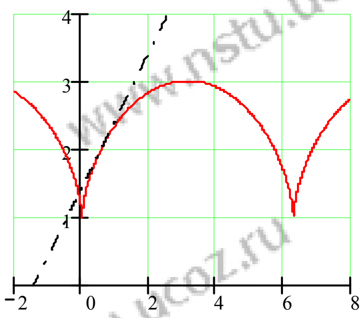
15. Найти производную показательно-степенной функции: $y=(tg\,x)^{4e^x}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y=4e^x\cdot\ln tg\,x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y}=4e^x\cdot\ln tg\,x+4e^x\cdot\dfrac{1}{tg\,x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=4e^x(\ln tg\,x+\dfrac{2}{2\sin x\cdot\cos x})$. Подставляем сюда y:

$y'=4e^x(tg3x)^{4e^x}(\ln tg\,x+\dfrac{2}{\sin 2x})$ **Ответ:** $y'=4e^x(tg3x)^{4e^x}(\ln tg\,x+\dfrac{2}{\sin 2x})$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=2-\cos t\end{cases}\qquad t=\frac{\pi}{2}.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ имеют вид $y=y_0+y'_x(x_0)\cdot(x-x_0)$ и $y=y_0-(1/y'_x(x_0))\cdot(x-x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты: $x_0=x(\pi/2)=\pi/2-1,\ y_0=y(\pi/2)=2$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$. Тогда $y'_x(\pi/2)=1$. Далее, $y''_x=\dfrac{(y'_t)'_t}{x'_t}=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^3}=-\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$,



следовательно, $y''_x(\pi/2)=-1$. Таким образом, уравнение касательной $y=2+(x-\pi/2+1)$, уравнение нормали $y=2-(x-\pi/2+1)$. Или $2x-2y+6-\pi=0$ и $2x+2y-2-\pi=0$.

Ответ: $(x_0,y_0)=(\pi/2-1,\,2),\ y'_x(x_0)=1,\ y''_x(x_0)=-1,\ \begin{cases}2x-2y+6-\pi=0 & \textit{касательная}\\ 2x+2y-2-\pi=0 & \textit{нормаль}\end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $xe^y+y^2=x^2$, принимает в точке $x_0=1$ значение $y_0=0$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y=y(x)$: $e^y+xe^y y'+2yy'=2x$. Из этого равенства находим: $y'=\dfrac{2x-e^y}{xe^y+2y}$. Находим вторую производную:

$y''=\dfrac{[2-e^y y'](xe^y+2y)-(e^y+xe^y y'+2y')(2x-e^y)}{(xe^y+2y)^2}$. Вычислим производные в точке $x_0=1$:

$y'(1)=1,\ \ y''(1)=-3$. **Ответ:** $y'=\dfrac{2x-e^y}{xe^y+2y}$, $y''=\dfrac{[2-e^y y'](xe^y+2y)-(e^y+xe^y y'+2y')(2x-e^y)}{(xe^y+2y)^2}$,

$y'(1)=1,\ \ y''(1)=-3$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y=\sqrt[3]{x},\ \ x=1{,}21$.

По определению дифференциала $y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+dy(x_0)+o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x)=y(x_0)+dy(x_0)+o((x-x_0)),\ \ \Delta x=dx=x-x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$. В данном случае $x_0=1,\ \ y(x_0)=y(1)=1,\ \ y'=\dfrac{1}{3}x^{-2/3},\ \ y'(x_0)=y'(1)=\dfrac{1}{3},\ \ \Delta x=0{,}21$. Тогда $y(1{,}21)\approx 1+0{,}21/3=1{,}07$. **Ответ:** $y\approx 1{,}07$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x\sin x}$.

Это неопределённость вида (∞^0). Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}e^{-x\sin x\cdot\ln x}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+0}[-x\sin x\cdot\ln x]}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to+0}(-x\sin x\cdot\ln x)=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}\sin^{-1}x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{[\ln x]'}{[x^{-1}\sin^{-1}x]'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x[-x^{-2}\sin^{-1}x-x^{-1}\sin^{-2}x\cos x]}=-\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{-1}\sin^{-1}x+\sin^{-2}x\cos x]}=0,$$ так как предел знаменателя равен ∞. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x\sin x}=e^0=1$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{x\sin x}=1$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\ln x\right)$.

Это неопределённость вида (∞-∞). Преобразуем предел, делая замену $\ln x=t,\ \ x=e^t,\ \ \textit{если}\ \ x\to\infty,\ \ \textit{то}\ \ t\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}-\ln x\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t-t^2}{t}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(e^t-t^2\right)'}{t'}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t-2t}{1}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{2t}-4t^2}{e^t+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2e^{2t}-8t}{e^t+2}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4e^{2t}-8}{e^t}=\lim_{t\to\infty}(4e^t-\frac{8}{e^t})=\infty.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\ln x\right)=\infty$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=2x^4-6x^3+10x,\ \ x_0=-1$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x)=8x^3-18x^2+10,\ f''(x)=24x^2-36x,\ \ f'''(x)=48x-36$, $f^{(4)}(x)=48$. Тогда $f(-1)=-2,\ \ f'(-1)=-16,\ f''(-1)=60,\ \ f'''(-1)=-84,\ \ f^{(4)}(-1)=48$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=-2-16(x+1)+30(x+1)^2-14(x+1)^3+2(x+1)^4$.

Ответ: $f(x)=-2-16(x+1)+30(x+1)^2-14(x+1)^3+2(x+1)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=\cos\ln x,\ x_0=e^{\pi/4}$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(e^{\pi/4})=1/\sqrt{2}$, $f'(x)=-x^{-1}\sin\ln x$, $f'(e^{\pi/4})=-e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$,

$f''(x)=x^{-2}\sin\ln x-x^{-2}\cos\ln x=x^{-2}(\sin\ln x-\cos\ln x)$, $f''(e^{\pi/4})=0$,

$f'''(x)=-2x^{-3}(\sin\ln x-\cos\ln x)+x^{-3}(\cos\ln x+\sin\ln x)$, $\quad f'''(e^{\pi/4})=\sqrt{2}e^{-3\pi/4}$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}(x-e^{\pi/4})+\dfrac{\sqrt{2}\cdot e^{-3\pi/4}}{6}(x-e^{\pi/4})^3+o((x-e^{\pi/4})^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=1/x-x^2+3x,\ x_0=1$.

Найдём значение функции и её первых трёх производных в заданной точке: $f(1)=3$, $f'(x)=-x^{-2}-2x+3$, $f'(1)=0$,
$f''(x)=2x^{-3}-2$, $f''(1)=0$, $f'''(x)=-6x^{-4}$, $f'''(1)=-6$. По формуле Тейлора $f(x)=3-(x-1)^3+o((x-1)^3)$. **Ответ:** В окрестности точки (1, 3) функция ведёт себя как кубическая функция. Точка (1, 3) является точкой перегиба: слева – интервал вогнутости, справа – интервал выпуклости.

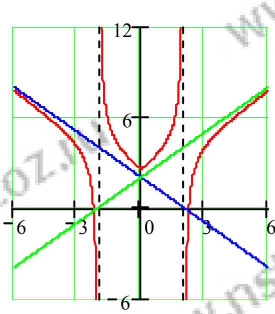
24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+x\sin x-2}{x^4}$.

По формуле Тейлора $\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)$. Аналогично, $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+o(x^5)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+x\sin x-2}{x^4}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)]+x[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)]-2}{x^4}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4))}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+x\sin x-2}{x^4}=-\dfrac{1}{12}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{x^2-5}{|x|-2}$.



Область определения функции: $x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения: $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{x^2-5}{|x|-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{x^2-5}{|x|-2}=\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2-5}{|x|-2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2-5}{|x|-2}=-\infty$. Отсюда следует, что прямые $x=-2$ и $x=2$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5}{-x-2}=-\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2-\dfrac{1}{x+2})=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2-\dfrac{1}{x-2})=\infty$. Следовательно, прямые $y=-x+2$ и $y=x+2$ являются наклонными односторонними асимптотами. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=\frac{3}{2}e^{\sqrt[3]{x^2}}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty)$. 2. Функция чётная, периодичность отсутствует. 3. Функция непрерывна. Вертикальных асимптот нет. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2}e^{\sqrt[3]{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{2}e^{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$, наклонных асимптот нет. 5. Первая производная $y'=\frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}$. Производная в нуль не обращается ни в одной точке. В точке разрыва производной x=0 изменяется. При x<0 производная $y'<0$ - функция убывает, При x>0 производная $y'>0$ - функция возрастает, следовательно, в точке x=0 имеет место минимум функции, причём $y_{\min}=y(0)=3/2$.

6. $y''=\left(\frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\frac{e^{\sqrt[3]{x}}\cdot(2/3)x^{-1/3}\cdot x^{1/3}-(1/3)x^{-2/3}e^{\sqrt[3]{x^2}}}{x^{2/3}}=\frac{e^{\sqrt[3]{x}}\cdot[2x^{2/3}-1]}{3x^{4/3}}=\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3}\cdot\frac{2\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^4}}$.

В точках $x=-1/(2\sqrt{2})$ и $x=1/(2\sqrt{2})$ вторая производная равна нулю. Кроме того, в точке $x=0$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty,-1/(2\sqrt{2}))$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости, в интервалах $(-1/(2\sqrt{2}),0)$ и $(0,1/(2\sqrt{2}))$ производная $y''<0$ - интервалы выпуклости, в интервале $(1/(2\sqrt{2}),\infty)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости. Таким образом, точки $x=-1/(2\sqrt{2})$ и $x=1/(2\sqrt{2})$ являются точками перегиба. 7. При $x=0$ функция равна $y=3/2$. Точка (0, 3/2) – точка пересечения оси ОУ. С осью ОХ график не пересекается. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке (0, 3/2) - минимум, точки перегиба $x=-1/(2\sqrt{2})$ и $x=1/(2\sqrt{2})$. Значение функции в точках перегиба одинаковы и равны $3\sqrt{e}/2$.