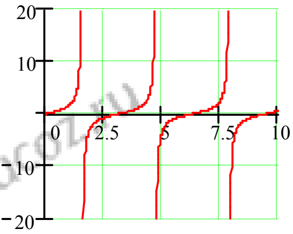
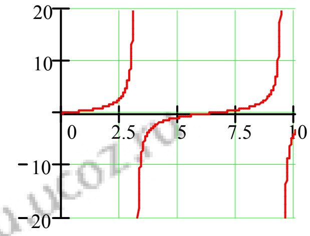
Вариант № 8

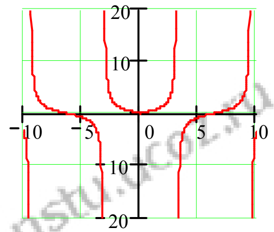
1. Найти область определения функции : $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

Область определения данной функции определяется двумя неравенствами: $x \ge 0$ и $\sin\sqrt{x} \ge 0$. Из второго неравенства следует, что должно выполняться неравенство $2k\pi \le \sqrt{x} \le (2k+1)\pi$ или $4k^2\pi^2 \le x \le (2k+1)^2\pi^2$, где k – любое целое число. В таком случае автоматически выполняется и неравенство $x \ge 0$. **Ответ:** $x \in [4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2]$.

2. Построить график функции: $y = tg\dfrac{|x|}{2}$.





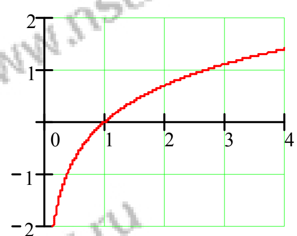


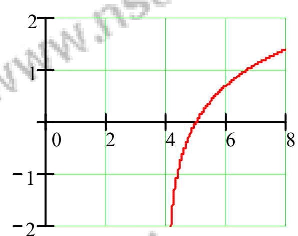
Данная функция определена на всей числовой оси, однако имеет бесконечные разрывы в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Функция чётная, поэтому строить график можно для правой полуплоскости, затем отразить зеркально в левую полуплоскость. Строим сначала $tg\,x,\ x > 0$. Затем уменьшаем график в два раза по оси ОУ и получаем $y = tg\dfrac{x}{2}$. Далее достраиваем график, отражая полученную часть в отрицательную полуплоскость.

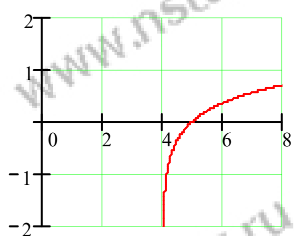
Ответ: Последовательность построения представлена на рисунках.

3. Построить график функции: $y = \ln\sqrt{x-4}$.

Данная функция определена в области $x \in (4, \infty)$. Преобразуем функцию: $y = \ln\sqrt{x-4} = \ln(x-4)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln(x-4)$. Строим сначала $y = \ln x$. Затем сдвинем график на 4 единицы по оси ОХ вправо. Получим график функции $\ln(x-4)$. Затем сжимаем график по оси ОУ в два раза. Получим график функции $y = \ln\sqrt{x-4}$. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.



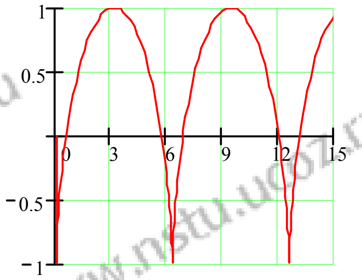




4. Построить график функции: $y = \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -\cos t \end{cases}$.

Функция периодическая с периодом 2π. Действительно, функция достигает максимумов в точках $t = (2k+1)\pi,\ k = \pm(0,1,2,...)$. При этом $x = (2k+1)\pi$, так как $\sin[(2k+1)\pi] = 0$. Составим таблицу координат нескольких точек графика в первом периоде:

t	0	π/6	π/4	π/3	π/2
x	0	0.024	0.078	0.181	0.571



y	-1	-0.866	-0.707	-0.5	0
t	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6
x	1.228	1.649	2.118	3.142	4.165
y	0.5	0.707	0.866	1	0.866
t	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4
x	4.634	5.055	5.712	6.102	6.205
y	0.707	0.5	0	-0.5	-0.707

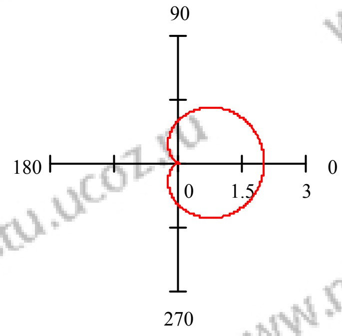
График периодичен. Поэтому нет необходимости вычислять координаты точек в других периодах. По точкам строим график и отражаем его симметрично в другие периоды.

Ответ: График представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho = 2\cos^2(\varphi/2)$.

Преобразуем уравнение:

$\rho = 2\cos^2(\varphi/2) = 1+\cos\varphi$. Функция существует для всех значений φ, так как $|\cos\varphi| \le 1$. Функция уменьшается от 2 (при φ =0) до1 (при φ =π/2), далее до 0 (при φ =π). Затем функция возрастает до 2 в обратном порядке.



Ответ: график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+...+(2n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.

Воспользуемся формулой для суммы арифметической прогрессии: $1+4+...+(3n-2) = \dfrac{1+3n-2}{2}n = \dfrac{n}{2}(3n-1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+...+(2n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(3n-1)}{2\cdot\sqrt{5n^4+n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-1/n}{2\sqrt{5+1/n^3+1/n^4}} = \frac{3}{2\sqrt5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+...+(2n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}} = \dfrac{3}{2\sqrt5}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$ (неопределённость вида (∞-∞)).

Путём преобразований переходим к неопределённости вида (0/0): $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right) = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x+1-3}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$. Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-2}{x^2-x+1} = \dfrac{-3}{3} = -1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right) = -1$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое по отношению к числителю выражение: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x))(\sqrt{1-2x+x^2}+(1+x))}{x(\sqrt{1-2x+x^2}+(1+x))} =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1-2x+x^2-(1+2x+x^2)}{x(\sqrt{1-2x+x^2}+(1+x))} = \lim_{x\to0}\frac{-4x}{x(\sqrt{1-2x+x^2}+(1+x))} = \lim_{x\to0}\frac{-4}{\sqrt{1-2x+x^2}+1+x} = -2.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}=-2$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся формулой $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ и первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Кроме того, разность косинусов можно представить в виде произведения синусов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin 5x\cdot\sin 2x}=-\frac{1}{10}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)^{-1}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^{-1}=-\frac{1}{10}$$

.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}=-\dfrac{1}{10}$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{3n+1}$ (неопределённость вида (1^{∞})).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3n-1}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=e^{-3}.$$

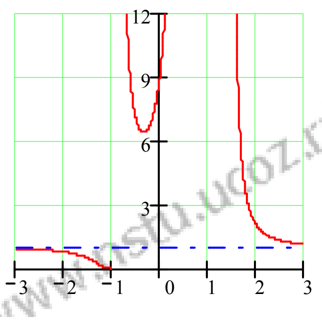
Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{3n+1}=e^{-3}$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\,\pi x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем преобразования в числителе: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\,\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^2(3^{5x-5}-3^{2x^2-2})}{tg\,\pi x}=$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9[3^{5(x-1)}-1-(3^{2(x^2-1)}-1)]}{tg\,\pi x}$. Воспользуемся эквивалентными (при $t\to 0$) величинами: $a^t-1\sim t\ln a$. Получим: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9[3^{5(x-1)}-1-(3^{2(x^2-1)}-1)]}{tg\,\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9[5(x-1)-2(x^2-1)]\ln 3}{tg\,\pi x}=$
$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9(x-1)(2x-3)\ln 3\cdot\cos\pi x}{\sin\pi x}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9(x-1)(2x-3)\ln 3}{\sin\pi x}$. Сделаем замену переменной:

$x-1=t,\ x=t+1,\ если\ x\to 1,\ то\ t\to 0$. Тогда $-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9(x-1)(2x-3)\ln 3}{\sin\pi x}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{9t(2t-1)\ln 3}{\sin(\pi t+\pi)}=$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{9t(2t-1)\ln 3}{\sin\pi t}=\dfrac{9\ln 3}{\pi}\left[\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}\right]^{-1}\lim\limits_{t\to 0}(2t-1)=\dfrac{9\ln 3}{\pi}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\,\pi x}=\dfrac{9\ln 3}{\pi}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=9^{\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}}$.



Область определения – все действительные числа, кроме $x=-1,\ x=1$. В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в граничных точках области определения:

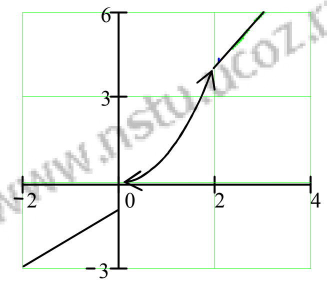
$\lim\limits_{x\to-1-0} 9^{\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}} = 9^{-\infty} = 0$, $\lim\limits_{x\to-1+0} 9^{\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}} = 9^{\infty} = \infty$. Таким образом, в точке $x=-1$ имеет место разрыв второго рода. Далее, $\lim\limits_{x\to1-0} 9^{\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to-1+0} 9^{\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}} = 9^{\infty} = \infty$. В точке $x=1$ также имеет место разрыв второго рода Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty} 9^{\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 9^{\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}} = 9^0 = 1$.

Ответ: В точках $x=-1$ и $x=1$ функция имеет разрывы второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y = \begin{cases} x-1, x \le 0, \\ x^2, 0 < x < 2,. \\ 2x, \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$. Ось ОХ разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to0-0}(x-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to0+0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to2-0} x^2 = 4$, $\lim\limits_{x\to2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to2+0} 2x = 4$. Таким образом, в точке $x=2$ функция непрерывна, а в точке $x=0$ функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке $x=0$ равна 1. **Ответ:** В точке $x=0$ функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.



14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = \sin(x\sin(3/x)), x \ne 0, f(0) = 0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x\sin(3/x))}{x}$. Но $sin(t) \sim t$ при $t\to0$. Поэтому

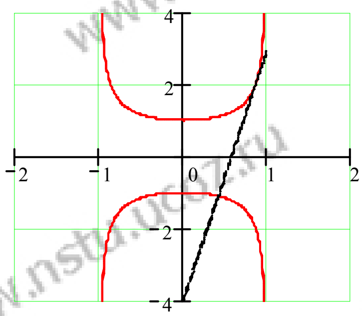
$f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin(3/x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \sin(2/x)$. Предел не существует. **Ответ:** $f'(0)$ не существует.

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = (\sin x)^{5x/2}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = (5x/2)\ln\sin x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{5}{2}\ln\sin x + \dfrac{5x\cos x}{2\sin x} = \dfrac{5}{2}(\ln\sin x + x\cdot ctg\, x)$. Подставляем сюда y:

$y' = \dfrac{5}{2}(\sin x)^{5x/2}(\ln\sin x + x\cdot ctg\, x)$. **Ответ:** $y' = \dfrac{5}{2}(\sin x)^{5x/2}(\ln\sin x + x\cdot ctg\, x)$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases} \qquad t = \frac{\pi}{3}.$$



Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:

$x_0 = x(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $y_0 = y(\pi/3) = 2$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\sin t}{\cos^3 t}$.

Тогда $y'_x(2) = 4\sqrt{3}$. Далее, $y''_{xx} = \dfrac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \dfrac{\cos^4 + 3\cos^2 t\cdot\sin^2 t}{\cos^7 t} = \dfrac{\cos^2 + 3\cdot\sin^2 t}{\cos^5 t} = \dfrac{1 + 2\cdot\sin^2 t}{\cos^5 t}$, следовательно, $y''_{xx}(\pi/3) = 80$. Таким образом, уравнение касательной $y = 2 + 4\sqrt{3}(x - \sqrt{3}/2)$, уравнение нормали $y = 2 - (1/\sqrt{3})(x - \sqrt{3}/2)$. Или $4\sqrt{3}x - y - 4 = 0$ и $2x + 8\sqrt{3}y - 17\sqrt{3} = 0$.

Ответ: $(x_0, y_0) = \left(\sqrt{3}/2,\, 2\right)$, $y'_x(x_0) = 4\sqrt{3}$, $y''_{xx}(x_0) = 80$, $\begin{cases} 4\sqrt{3}x - y - 4 = 0 & \textit{касательная} \\ 2x + 8\sqrt{3}y - 17\sqrt{3} = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $\ln(x + y) + y = x + 1$, принимает в точке $x_0 = 0$ значение $y_0 = 1$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $\dfrac{1 + y'}{x + y} + y' = 1$. Из этого равенства находим: $y' = \dfrac{x + y - 1}{x + y + 1} = 1 - \dfrac{2}{x + y + 1}$. Находим вторую производную:

$y'' = \dfrac{2(1 + y')}{(x + y + 1)^2}$. Вычислим производные в точке $x_0 = 0$: $y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 1/2$.

Ответ: $y' = \dfrac{x + y - 1}{x + y + 1} = 1 - \dfrac{2}{x + y + 1}$, $y'' = \dfrac{2(1 + y')}{(x + y + 1)^2}$, $y'(0) = 0,\ \ y''(0) = \dfrac{1}{2}$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = x^{11}$, $x = 1{,}021$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0))$, $\Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 1,\ \ y(x_0) = y(1) = 1,\ \ y' = 11x^{10},\ \ y'(x_0) = y'(1) = 11,\ \ \Delta x = 0{,}021$. Тогда $y(1{,}021) \approx 1 + 0{,}021\cdot 11 = 1{,}231$. **Ответ:** $y \approx 1{,}231$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\,arctg\,x\right)^x$.

Это неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctg\,x\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln[(2/\pi)arctg\,x)]} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln[(2/\pi)arctg\,x)]}$. Найдём предел в показателе степени: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln((2/\pi)arctg\,x)}{x^{-1}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln((2/\pi)arctg\,x)'}{\left(x^{-1}\right)'} = -\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{arctg\,x\cdot(1+x^2)\cdot x^{-2}} =$

$= -\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2} = -\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{-2}+1} = -\dfrac{2}{\pi}$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctg\,x\right)^x = e^{-2/\pi}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctg\,x\right)^x = e^{-2/\pi}$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$.

Это неопределённость вида (0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(1+x^2)\right)'}{\left(\cos 3x - e^{-x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x^2)(-3\sin 3x + e^{-x})} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}} = 0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x) = x^4 + 8x^3 - 40,\ x_0 = -2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dfrac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$.
Найдём все производные: $f'(x) = 4x^3 + 24x^2$, $f''(x) = 12x^2 + 48x$, $f'''(x) = 24x + 48$, $f^{(4)}(x) = 24$. Тогда $f(-2) = -88$, $f'(-2) = 64$, $f''(-2) = -48$, $f'''(-2) = 0$, $f^{(4)}(-2) = 24$.
Подставив это в формулу, получим: $f(x) = -88 + 64(x+2) - 24(x+2)^2 + (x+2)^4$.

Ответ: $f(x) = -88 + 64(x+2) - 24(x+2)^2 + (x+2)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x) = tg\,e^x\ x_0 = \ln(\pi/4)$.

Применяем формулу Тейлора:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3)$.
Вычисляем последовательно: $f(\ln(\pi/4)) = 1$, $f'(x) = e^x\cos^{-2}e^x$, $f'(\ln(\pi/4)) = \pi/2$,
$f''(x) = e^x\cos^{-2}e^x + 2e^{2x}\cos^{-3}e^x\cdot\sin e^x$, $f''(\ln(\pi/4)) = \pi(\pi+2)/4$,
$f'''(x) = e^x\cos^{-2}e^x + 2e^{2x}\cos^{-3}e^x\cdot\sin e^x + 4e^{2x}\cos^{-3}e^x\cdot\sin e^x + 6e^{3x}\cos^{-4}e^x\cdot\sin^2 e^x +$
$+ 2e^{3x}\cos^{-4}e^x$, $f'''(\ln(\pi/4)) = \pi(\pi^2 + 3\pi + 2)/4$.

Ответ:
$$f(x) = 1 + \frac{\pi}{2}\left(x - \ln\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi(\pi+2)}{8}\left(x-\ln\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi(\pi^2+3\pi+2)}{24}\left(x-\ln\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\ln\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x) = e^{-x} + x - 0.5x^2,\ x_0 = 0$.

Найдём значение функции и её первых трёх производных в заданной точке:
$f(0) = 1$, $f'(x) = -e^{-x} + 1 - x$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = e^{-x} - 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = -e^{-x}$,
$f'''(0) = -1$, . По формуле Тейлора $f(x) = 1 - x^3/6 + o(x^3)$. **Ответ:** В окрестности точки

(0, 1) функция ведёт себя как кубическая функция. Точка (0, 1) является точкой перегиба: слева интервал вогнутости, справа – интервал выпуклости.

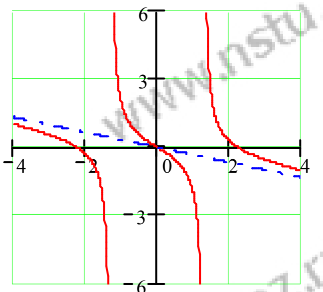
24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sin(x-2)-x^2+2x}{(x-2)^3}$.

По формуле Тейлора $\sin(x-2)=(x-2)-\dfrac{1}{6}(x-2)^3+o((x-2)^3)$. Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x\sin(x-2)-x^2+2x}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2-\frac{1}{6}(x-2)^3+o((x-2)^3)-x^2+2x}{(x-2)^3}=$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{6}(x-2)^3+o((x-2)^3))}{(x-2)^3}=-\frac{1}{3}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sin(x-2)-x^2+2x}{(x-2)^3}=-\dfrac{1}{3}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$.



Область определения функции: $x\in(-\infty,-\sqrt{5/3})\cup(-\sqrt{5/3},\sqrt{5/3})\cup(\sqrt{5/3},\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в точках разрыва функции:

$$\lim_{x\to-\sqrt{5/3}-0}\frac{x^3-5x}{5-3x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to-\sqrt{5/3}+0}\frac{x^3-5x}{5-3x^2}=\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{5/3}-0}\frac{x^3-5x}{5-3x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{5/3}+0}\frac{x^3-5x}{5-3x^2}=\infty,$$

. Отсюда следует, что прямые $x=-\sqrt{5/3}$ и $x=\sqrt{5/3}$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-5x}{5-3x^2}=\lim_{x\to-\infty}(-\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{5-3x^2})=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x}{5-3x^2}=\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{5-3x^2})=-\infty.$$

Отсюда следует, что прямая $y=-x/3$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=xe^{-\frac{1}{x^3}}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствует. 3. Функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Исследуем поведение функции в окрестности точки $x=0$:

$$\lim_{x\to 0-0}(xe^{-\frac{1}{x^3}})=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0-0}\frac{e^{-\frac{1}{x^3}}}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0-0}\frac{e^{-\frac{1}{x^3}}\cdot(3x^{-4})}{-x^{-2}}=-3\lim_{x\to 0-0}e^{-\frac{1}{x^3}}\cdot x^{-2}=-\infty,$$

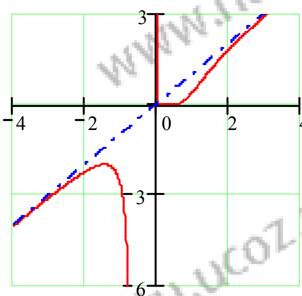
$\lim\limits_{x\to 0+0}(xe^{-\frac{1}{x^3}})=(0\cdot e^{-\infty})=0.$ Следовательно, прямая $x=0$ является односторонней вертикальной асимптотой. 4. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}xe^{-\frac{1}{x^3}}=\pm\infty$. Найдём наклонные асимптоты: $y=kx+b$, $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{xe^{-\frac{1}{x^3}}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-\frac{1}{x^3}}=1,$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(xe^{-\frac{1}{x^3}}-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[x(e^{-\frac{1}{x^3}}-1)=-\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\frac{1}{x^3}=0$. Таким образом, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой. 5. Первая производная

$y'=e^{-\frac{1}{x^3}}+3x^3e^{-\frac{1}{x^3}}=$

$=e^{-\frac{1}{x^3}}(1+\frac{3}{x^3})$. Производная обращается в нуль в точке $x=-\sqrt[3]{3}$. При $x\in(-\infty,-\sqrt[3]{3})$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает, при $x\in(-\sqrt[3]{3},0)$ производная $y'<0$ - функция убывает. При $x\in(0,\infty)$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает. Точка $x=-\sqrt[3]{3}$ является точкой максимума функции, причём $y_{\max}=y(-\sqrt[3]{3})=-\sqrt[3]{3e}$.

6. $y''=\left(e^{-\frac{1}{x^3}}(1+\frac{3}{x^3})\right)'=e^{-\frac{1}{x^3}}3x^{-4}(1+\frac{3}{x^3})-e^{-\frac{1}{x^3}}9x^{-4}=3e^{-\frac{1}{x^3}}x^{-7}(x^3+3-3x^3)=3e^{-\frac{1}{x^3}}\frac{3-2x^3}{x^7}$.



Вторая производная в нуль обращается в точке $x=\sqrt[3]{3/2}$. В точке $x=0$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty,0)$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости, , в интервале $(0,\sqrt[3]{3/2})$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции, в интервале $(\sqrt[3]{3/2},\infty)$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости. Точка перегиба $(\sqrt[3]{3/2},\sqrt[3]{3/2e^2})$.

7. График функции не пересекает осей координат. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке $(-\sqrt[3]{3},-\sqrt[3]{3e})$ - максимум. Точка перегиба - $(\sqrt[3]{3/2},\sqrt[3]{3/2e^2})$.