Вариант № 9

1. Найти область определения функции : $y = 2^{\arccos(1-x)}$.

Область определения данной функции определяется неравенством $|1-x| \le 1$. Освободимся от знака модуля: $-1 \le 1-x \le 1$. Из левого неравенства находим $-2 \le -x$ или $x \le 2$. Из правого неравенства $-x \le 0$ или $x \ge 0$. Объединяя результаты, получим: $0 \le x \le 2$. **Ответ:** $x \in [0, 2]$.

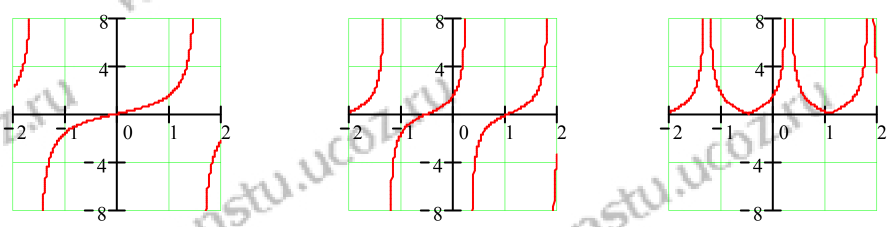
2. Построить график функции: $y = |tg(2x+1)|$.

Данная функция определена на всей числовой оси, Точки $x = \frac{\pi}{4}(1 \pm 2k) - \frac{1}{2}, k = 0, 1, 2, ...$ являются точками разрыва второго рода. Преобразуем функцию:

$y = |tg(2x+1)| = |tg(2(x+1/2))|$. Строим сначала $tg\, x$. Затем «сжимаем» график в два раза по

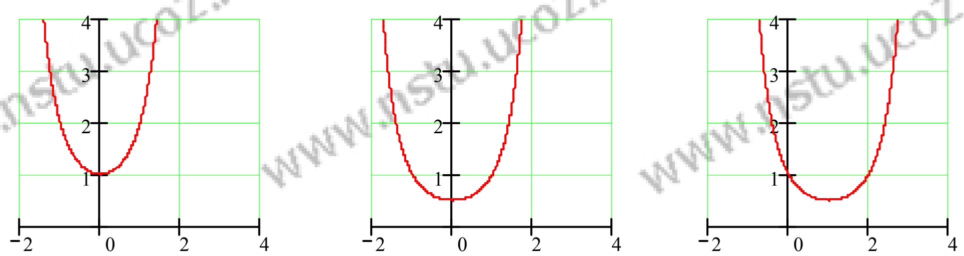
оси ОХ и смещаем его по оси ОХ влево на 0,5 единицы. Получим график функции $y = tg(2x+1)$. Затем повернем отрицательные ветви графика вверх зеркально по отношению к оси ОХ. Получим график функции $|tg(2x+1)|$.

Ответ: Последовательность построения представлена на рисунках.



3. Построить график функции: $y = 2^{x^2-2x}$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: $y = 2^{x^2-2x} = 2^{x^2-2x+1-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{(x-1)^2}$ Строим сначала 2^{x^2}. Затем «сжимаем» график в два раза



по

оси ОУ. Получим график функции 2^{x^2-1}. Затем сдвинем график вправо по оси ОХ на одну единицу. Получим график функции 2^{x^2-2x}. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.

4. Построить график функции: $y = \begin{cases} x = 7\sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$.

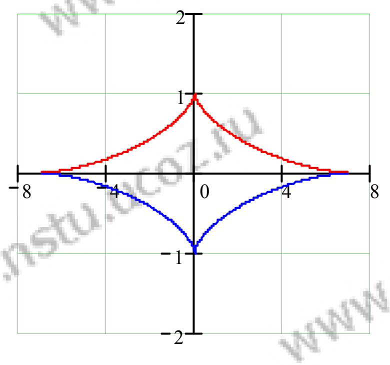
Составим таблицу координат нескольких точек графика в первой четверти:

t	0	π/6	π/4	π/3	π/2
x	0	0.875	2.475	4.546	7

y	1	0.65	0.354	0.125	0

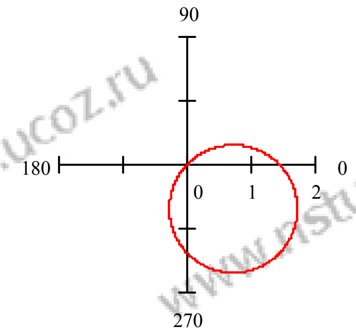
График симметричен относительно осей координат и относительно начала координат. Поэтому нет необходимости вычислять координаты точек в других четвертях координатной плоскости. По точкам строим график и отражаем его симметрично в другие четверти.

Ответ: График представлен на рисунке.



5. Построить график функции: $\rho = 2\sin(\varphi + 3\pi/4)$.

Поскольку $\rho \ge 0$, то функция существует для тех значений φ, для которых $\sin(\varphi + 3\pi/4) \ge 0$. Это наблюдается при $0 \le \varphi + 3\pi/4 \le \pi$ или $-\dfrac{3\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. В этом интервале функция возрастает от 0 до 2 (при $\varphi = -\pi/4$), затем убывает от 2 до 0. Можно перейти к декартовым координатам. Тогда получим уравнение окружности $(x - 1/\sqrt{2})^2 + (y + 1/\sqrt{2})^2 = 1$, радиус которой равен 1, а центр находится в точке $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ **Ответ:** график представлен на рисунке.



6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$.

Возведём в степени все скобки и поделим числитель и знаменатель на n^3, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{27 - 27n + 9n^2 - n^3}{n^2 + 2n + 1 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{27 - 27n + 9n^2 - n^3}{-n^3 - 2n^2 - n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{27n^{-3} - 27n^{-2} + 9n^{-1} - 1}{-1 - 2n^{-1} - n^{-2}} = \frac{-1}{-1} = 1.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3} = 1$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{9x^3 + 9x^2 - x - 1}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{9x^3 + 9x^2 - x - 1} =$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3(x+1)(x-1/3)}{(x+1)(9x^2 - 1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3(x-1/3)}{9x^2 - 1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{9x^3 + 9x^2 - x - 1} = -\dfrac{1}{2}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2} - 2}{x + x^2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Приведём числитель к разности кубов путем умножения числителя и знаменателя на неполный квадрат суммы: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2} - 2}{x + x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2)(\sqrt[3]{(8+3x+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4)}{x(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(8+3x+x^2-8)}{x(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(3+x)}{x(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3+x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x+x^2}+4)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$. **Ответ:** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2} = \frac{1}{4}$.

9. Вычислить предел: $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разность косинусов можно представить в виде произведения синусов, затем воспользуемся первым замечательным пределом: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x} = -\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin 2x\cdot\sin x}{tg^2 2x} = -\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin 2x\cdot\sin x\cdot\cos^2 2x}{\sin^2 2x} = -2\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to\pi}\cos^2 2x =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\cdot\left[\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2(x-\pi)}{2(x-\pi)}\right]^{-1} = 1$$, так как $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$.

Ответ: $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x} = 1$.

10. Вычислить предел: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n+4}{6n-7}\right)^{-(3n+2)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{6n-7}\right)^{-(3n+2)} = \left| \begin{matrix} 6n-7=11t,\ n=\dfrac{11t+7}{6}, \\ если\ n\to\infty,\ то\ t\to\infty \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-11t/2-11/2} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-11/2}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-11/2} = e^{-11/2}.$$ **Ответ:** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} = e^{-11/2}$.

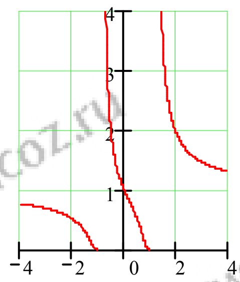
11. Вычислить предел: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x^2)}{1-\cos x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся эквивалентными величинами (при $t\to 0$): $1-\cos t \sim t^2/2$ и $\ln(1+t)\sim t$.

Получим: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x^2\cdot 2}{\sin^2 x} = -8\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right]^{-2} = -8$. **Ответ:** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x^2)}{1-\cos x} = -8$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме $x=-1$ и $x=1$. В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точек разрыва: $\lim\limits_{x\to-1-0}\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to-1+0}\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}\right)=\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0}\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to1+0}\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}\right)=\infty$. Таким образом, точки $x=-1$ и $x=1$ являются точками разрыва второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}\right)=e^0=1$. **Ответ:** Точки $x=-1$ и $x=1$ являются точками разрыва второго рода., в остальных точках функция непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.



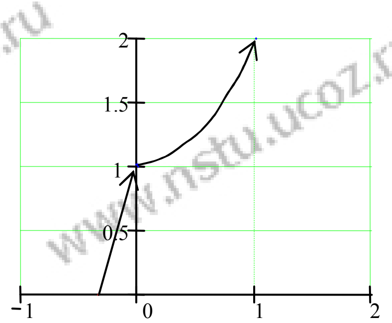
13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y=\begin{cases}3x+1, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}.$$

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to0-0}(3x+1)=1$, $\lim\limits_{x\to0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to0+0}(x^2+1)=1$,

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(x^2+1)=2$, $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}0=0$. Таким образом, в точке $x=0$ функция непрерывна, а в точке $x=1$ функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке $x=1$ равна -2. **Ответ:** В точке $x=1$ функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.



14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x)=\arcsin(x^2\cos(1/9x)-1))+2x/3,\ x\ne0,\ f(0)=0$.

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0=0$, $f(x_0)=0$, поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin(x^2\cos(1/9x)-1))+2x/3}{x}$. Так как $|\cos(1/9x)|\le1$, то

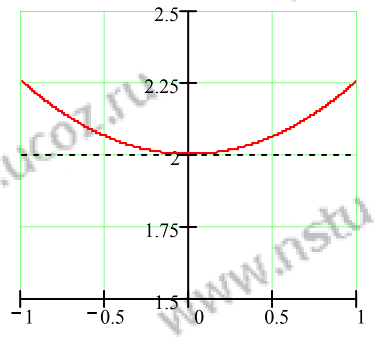
$\arcsin(x^2\cos(1/9x)-1))\sim x^2\cos(1/9x)-1)$. Поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos(1/9x)-1)}{x}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $f'(0)=2/3$

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y=e^{1/x}\ln\sin\sqrt{x}$. Берём производную, как производную неявной функции: $\frac{y'}{y} = -e^{1/x}\frac{1}{x^2}\ln\sin\sqrt{x} + e^{1/x}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{1/x}(\frac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\ln\sin\sqrt{x}}{x^2})$.

Подставляем сюда y: $y' = e^{1/x}\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}(\frac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\ln\sin\sqrt{x}}{x^2})$. **Ответ:** $y' = e^{1/x}\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}(\frac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\ln\sin\sqrt{x}}{x^2})$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:
$\begin{cases} x = 2\ln tg\,t \\ y = tg\,t + ctg\,t \end{cases} \qquad t = \frac{\pi}{4}$.



Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты: $x_0 = x(\pi/4) = 0$, $y_0 = y(\pi/4) = 2$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{2\cos^2 t\cdot\sin^2 t}\cdot tg\,t\cdot\cos^2 t =$
$= \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{2\cos t\cdot\sin t} = -ctg\,2t$. Тогда $y'_x(2) = 0$. Далее,
$y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{2}{2\sin^2 2t}\cdot tg\,t\cdot\cos^2 t = \frac{2\sin t\cdot\cos t}{2\sin^2 2t} = \frac{1}{2\sin 2t}$, тогда $y''_{xx}(\pi/4) = 1/2$. Таким образом, уравнение касательной $y = 2$. Нормаль проходит через точку касания перпендикулярно касательной. Следовательно, уравнение нормали есть $x = 0$.

Ответ: $(x_0, y_0) = (0, 2)$, $y'_x(x_0) = 0$, $y''_{xx}(x_0) = 1/2$, $\begin{cases} y - 2 = 0 & \textit{касательная} \\ x = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $x^2 y + e^y - y^2 = x$, принимает в точке $x_0 = 1$ значение $y_0 = 0$. Найти $y'_x, y''_{xx}, y'_x(x_0), y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y = y(x)$: $2xy + x^2 y' + e^y y' - 2yy' = 1$. Из этого равенства находим: $y' = \frac{1 - 2xy}{x^2 + e^y - 2y}$. Находим вторую производную: $y'' = -\frac{2(y + xy')(x^2 + e^y - 2y) + (2x + e^y y' - 2y')(1 - 2xy)}{(x^2 + e^y - 2y)^2}$. Вычислим производные в точке:

$x_0 = 1$ $y'(1) = 1/2$, $y''(1) = -7/8$. **Ответ:** $y' = \frac{1 - 2xy}{x^2 + e^y - 2y}$,
$y'' = -\frac{2(y + xy')(x^2 + e^y - 2y) + (2x + e^y y' - 2y')(1 - 2xy)}{(x^2 + e^y - 2y)^2}$, $y'(1) = 1/2$, $y''(1) = -7/8$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = x^{21}$, $x = 0{,}998$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0))$, $\Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 1,\ \ y(x_0) = y(1) = 1,\ \ y' = 21x^{20},\ \ y'(x_0) = y'(1) = 21,\ \ \Delta x = -0{,}002$. Тогда $y(0{,}998) \approx 1 - 0{,}002 \cdot 21 = 0{,}958$. **Ответ:** $y \approx 0{,}958$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to 1-0} (1-x)^{\ln x}$.

Это неопределённость вида (0^0). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x \to 1-0} (1-x)^{\ln x} = \lim\limits_{x \to 1-0} e^{\ln x \cdot \ln(1-x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)} = .$ Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\ln^{-1} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 1-0} \frac{(\ln(1-x))'}{\left(\ln^{-1} x\right)'} = -\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{(1-x)\ln^{-2} x} = -\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{-\ln^{-2} x - 2x^{-1}\ln^{-3} x} =$$

$= \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x \ln^3 x}{x \ln x + 2} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 1-0} (1-x)^{\ln x} = e^0 = 1$. **Ответ:** $\lim\limits_{x \to 1-0} (1-x)^{\ln x} = 1$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot e^{-\sqrt{x}})$.

Это неопределённость вида ($\infty \cdot 0$):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{\left(e^{\sqrt{x}}\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} = 2\lim_{x \to +\infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{e^{\sqrt{x}}[(1/2\sqrt{x})]} = 2\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot e^{-\sqrt{x}}) = 0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x - x_0)$: $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2,\ \ x_0 = 1$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x) = 12x^3 + 9x^2 - 10x,\ f''(x) = 36x^2 + 18x - 10,\ \ f'''(x) = 72x + 18,\ \ f^{(4)}(x) = 72$. Тогда $f(1) = 3,\ \ f'(1) = 11,\ f''(1) = 44,\ \ f'''(1) = 90,\ \ f^{(4)}(1) = 72$. Подставив это в формулу, получим: $f(x) = 3 + 11(x-1) + 22(x-1)^2 + 15(x-1)^3 + 3(x-1)^4$.

Ответ: $f(x) = 3 + 11(x-1) + 22(x-1)^2 + 15(x-1)^3 + 3(x-1)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x - x_0)^3)$: $f(x) = \ln\ln x,\ \ x_0 = e$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(e) = 0,\ \ f'(x) = x^{-1}\ln^{-1} x,\ \ f'(e) = e^{-1}$,

$f''(x) = -x^{-2}\ln^{-1} x - x^{-2}\ln^{-2} x = -x^{-2}(\ln^{-1} x + \ln^{-2} x),\ \ f''(e) = -2e^{-2}$,

$f'''(x) = 2x^{-3}(\ln^{-1} x + \ln^{-2} x) + x^{-3}(\ln^{-2} x + 2\ln^{-3} x),\ \ \ f'''(e) = 7e^{-3}$.

Ответ: $f(x) = e^{-1}(x - e) - e^{-2}(x - e)^2 + \dfrac{7e^{-3}}{6}(x - e)^3 + o((x - e)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x) = \ln x - \sin(x-1) + x^2/2 - x,\ \ x_0 = 1$.

Найдём значение функции и её первых трёх производных в заданной точке:

$f(1) = -1/2,\ \ f'(x) = x^{-1} - \cos(x-1) + x - 1,\ \ f'(1) = 0,$
$f''(x) = -x^{-2} + \sin(x-1) + 1,\ \ f''(0) = 0,\ \ f'''(x) = 2x^{-3} + \cos(x-1),$
$f'''(0) = 3,$. По формуле Тейлора $f(x) = -1/2 + (x-1)^3/2 + o((x-1)^3)$. **Ответ:** В окрестности точки (1, -1/2) функция ведёт себя как кубическая функция. Точка (1, -1/2) является точкой перегиба: слева интервал выпуклости, справа – интервал вогнутости.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x - e^{x^2} + 1}{x^4}$.

По формуле Тейлора $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. Аналогично, $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^4)$ Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - e^{x^2} + 1}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x - x^3/6 + o(x^3)) - 1 - x^2 - x^4/2 + o(x^4) + 1}{x^4} =$$

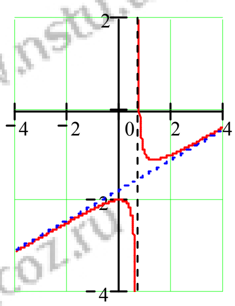
$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x^4/3 + o(x^3)}{x^4} = -\dfrac{2}{3}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x - e^{x^2} + 1}{x^4} = -\dfrac{2}{3}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$.

Область определения функции: $x \in (-\infty, 2/3) \cup (2/3, \infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в точке разрыва функции: $\lim\limits_{x\to 2/3-0}\dfrac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2} = -\infty,\ \ \lim\limits_{x\to 2/3+0}\dfrac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2} = \infty,$. Отсюда следует, что прямая $x = 2/3$ является вертикальной асимптотой. Исследуем функцию при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{3}x - \frac{16}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3x - 2}\right) = -\infty,$$

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2} = \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1}{3}x - \dfrac{16}{9} + \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{3x - 2}\right) = \infty$. Отсюда следует, что прямая $y = x/3 - 16/9$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.



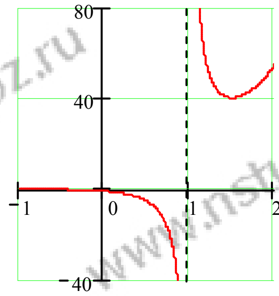
26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y = e^{2x}/(x-1)$.

1. Область определения: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствует. 3. Функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Исследуем поведение функции в окрестности точки $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{e^{2x}}{x-1} = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{e^{2x}}{x-1} = \infty,$

$\lim\limits_{x\to 0+0}(xe^{-\frac{1}{x^3}}) = (0\cdot e^{-\infty}) = 0.$ Следовательно, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. 4. Исследуем функцию при $x \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{2x}}{x-1} = 0,\ \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{2x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(e^{2x})'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2e^{2x}}{1} = \infty$. Найдём горизонтальные и наклонные асимптоты: $y = kx + b,\ \ k = \lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{f(x)}{x},\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{2x}}{x(x-1)} = 0,$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(e^{2x})'}{[x(x-1)]'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2e^{2x})'}{(2x-1)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=\infty$. Таким образом, прямая $y=0$ является односторонней горизонтальной наклонной асимптотой. Наклонных асимптот нет. 5. Первая производная $y'=\left(\frac{e^{2x}}{x-1}\right)'=\frac{2e^{2x}(x-1)-e^{2x}}{(x-1)^2}=\frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}$.
Производная обращается в нуль в точке $x=3/2$ и не существует в точке $x=1$. При $x\in(-\infty,1)$ производная $y'<0$ - функция убывает, при $x\in(1,3/2)$ производная $y'<0$ - функция также убывает. При $x\in(3/2,\infty)$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает. Точка $x=3/2$ является точкой минимума функции, причём $y_{\min}=y(3/2)=2e^3$.



6. $y''=\left(\frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}\right)'=$

$$=\frac{[2e^{2x}(2x-3)+2e^{2x}](x-1)^2-2(x-1)e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^4}=$$

$=\frac{2e^{2x}(2x^2-6x+5)}{(x-1)^3}$. Вторая производная в нуль не обращается. В точке $x=1$ вторая производная не существует.

Имеем два интервала: в интервале $(-\infty,1)$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости, в интервале $(1,\infty)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции. Точек перегиба нет.

7. График функции пересекает координатную ось ОУ в точке (0, -1). **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке $(3/2,\,2e^3)$ - минимум. Точек перегиба нет.