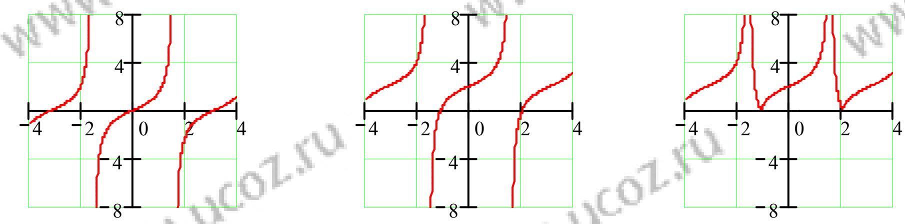
Вариант № 10

1. Найти область определения функции : $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{6}}$.

Область определения данной функции определяется двумя неравенствами: $\dfrac{5x-x^2}{6}>0$ и $\lg\dfrac{5x-x^2}{6}\geq 0$ или $\dfrac{5x-x^2}{6}\geq 1$. Достаточно рассмотреть второе неравенство, так как первое неравенство перекрывается вторым: $5x-x^2\geq 6$ или $x^2-5x+6\leq 0$. Корнями уравнения $x^2-5x+6=0$ являются числа $x_1=2, x_2=3$. Так как ветви параболы $y=x^2-5x+6$ направлены вверх, то неравенство $x^2-5x+6\leq 0$ выполняется при $2\leq x\leq 3$. **Ответ:** $x\in[2,3]$.

2. Построить график функции: $y=|tg\,x+2)|$.

Данная функция определена на всей числовой оси, Точки $x=\dfrac{\pi}{4}(1\pm 2k),\ k=0,1,2,\ldots$ являются точками разрыва второго рода. Строим сначала $tg\,x$. Затем смещаем график на две единицы вверх по оси ОУ. Получим график функции

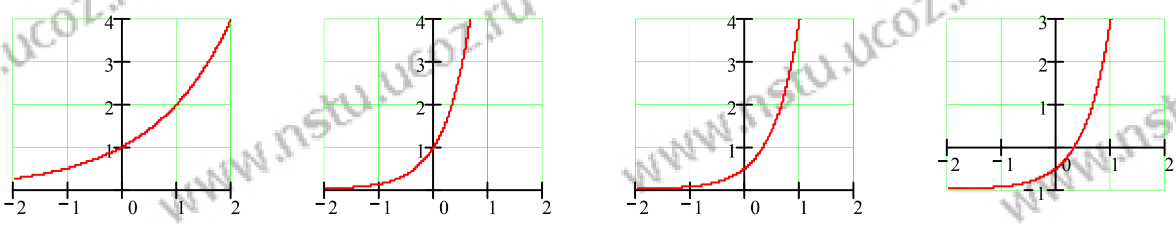


$y=tg\,x+2$.

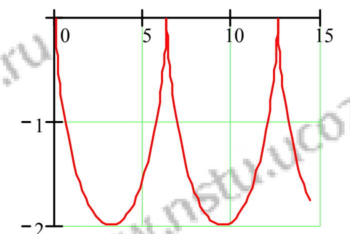
Затем повернем отрицательные ветви графика вверх зеркально по отношению к оси ОХ. Получим график функции $|tg\,x+2)|$. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.

3. Построить график функции: $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-3x}-1$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-3x}-1=2^{3(x-1/3)}-1$. Строим сначала 2^x. Затем «сжимаем» график в три раза по оси ОХ. Получим график функции 2^{3x}. Затем сдвинем график вправо по оси ОХ на 1/3 единицы. Получим график функции $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-3x}$. Затем сдвигаем график по оси OY вниз на одну единицу. **Ответ:** Все построения представлены на рисунках.



4. Построить график функции: $y=\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=\cos t-1\end{cases}$.



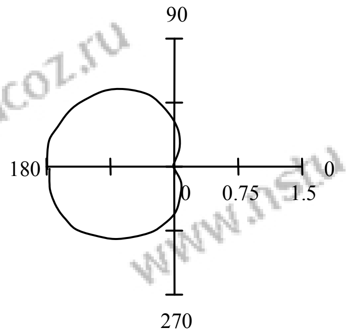
www.nstu.ucoz.ru

Функция периодическая с периодом 2π. Действительно, функция достигает максимумов в точках $t = 2k\pi, k = \pm(0,1,2,...)$. При этом $x = 2k\pi$, так как $\sin(2k\pi) = 0$. Составим таблицу координат нескольких точек графика в первом периоде:

t	0	π/6	π/4	π/3	π/2
x	0	0.024	0.078	0.181	0.571
y	0	-0.134	-0.293	-0.5	-1
t	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6
x	1.228	1.649	2.118	3.142	4.165
y	-1.5	-1.707	-1.866	-2	-1.866
t	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4
x	4.634	5.055	5.712	6.102	6.205
y	-1.707	-1.5	-1	-0.5	-0.293

График периодичен. Поэтому нет необходимости вычислять координаты точек в других периодах. По точкам строим график и отражаем его симметрично в другие периоды.

Ответ: График представлен на рисунке.



5. Построить график функции: $\rho = 0.5 - \cos\varphi$.

Поскольку $\rho \ge 0$, то функция существует для тех значений φ, для которых $\cos\varphi \le 0.5$. Это наблюдается при $\pi/3 \le \varphi \le 5\pi/3$. В этом интервале функция возрастает от 0 до 1.5 (при $\varphi = \pi$), затем убывает от 1.5 до 0. Вертикальная ось пересекается графиком в точках (π/2, 0.5) и (3π/2, 0.5). Можно перейти к декартовым координатам. Тогда получим уравнение $x^2 + y^2 = 0.5\sqrt{x^2 + y^2}) - x$.

Ответ: график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}$.

Возведём скобки в степени, приведём подобные и поделим числитель и знаменатель на старшую степень *n*: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 1 + n^2 - 2n + 1 - (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)}{64 - 48n + 12n^2 - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3 - 4n^2 - 16n - 6}{64 - 48n + 12n^2 - n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1 - 4n/n - 16/n^2 - 6/n^3}{64/n^3 - 48/n^2 + 12/n - 1} = 1.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3} = 1$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 4}(\dfrac{16}{x^2 - 16} - \dfrac{2}{x-4})$ (неопределённость вида (∞−∞).

Приводим к общему знаменателю Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 4}(\dfrac{16}{x^2-16} - \dfrac{2}{x-4}) = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16 - 2x - 8}{x^2 - 16} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-2(x-4)}{x^2-16} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-2}{x+4} = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 4}(\dfrac{16}{x^2-16} - \dfrac{2}{x-4}) = -\dfrac{1}{4}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + \sqrt[3]{x^4}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Приведём числитель к разности кубов путем умножения числителя и знаменателя на неполный квадрат суммы: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + \sqrt[3]{x^4}} =$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}{x(1+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{27+x-(27-x)}{x(1+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(1+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}=\frac{2}{27}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{2}{27}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разность косинусов можно представить в виде произведения синусов, затем воспользуемся первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}=-\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin 4x\cdot\sin x}{\sin^2 x}=-\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin 4x}{\sin x}=8\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(4x-4\pi)}{4x-\pi}\cdot\left[\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{(x-\pi)}\right]^{-1}=8,$$

так как $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}=8$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+2}\right)^{2n+5}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+2}\right)^{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n+2+2n-3}{3n^2+2n+2}\right)^{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-3}{3n^2+2n+2}\right)^{2n+5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-3}{3n^2+2n+2}\right)^{\frac{3n^2+2n+2}{2n-3}\cdot\frac{(2n+5)(2n-3)}{3n^2+2n+2}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-3}{3n^2+2n+2}\right)^{\frac{3n^2+2n+2}{2n-3}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+5)(2n-3)}{3n^2+2n+2}}.$$

Предел в квадратных скобках равен числу *e*. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+5)(2n-3)}{3n^2+2n+2}=\dfrac{4}{3}$. Окончательно:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+2}\right)^{2n+5}=e^{4/3}=e\sqrt[3]{e}$. **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+2}\right)^{2n+5}=e\sqrt[3]{e}$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin[\pi(x+7)]}$ (неопределённость вида (0/0)).

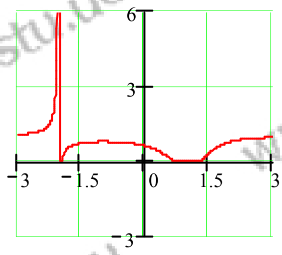
Заметим, что $\sin(\pi x+7\pi)=\sin(\pi x+\pi)=-\sin(\pi x)$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin[\pi(x+7)]}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi x)}$. Воспользуемся эквивалентными величинами :

| *ln*(*t*+1)~*t*| и *sin*(*t*) ~*t* при *t*→0: $-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi x)}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-7x}{\pi x}=\dfrac{7}{\pi}$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin[\pi(x+7)]}=\dfrac{7}{\pi}$.

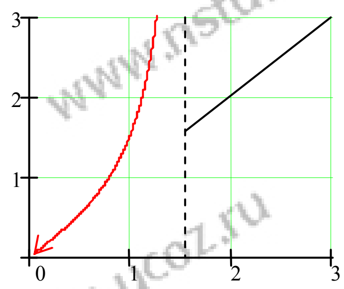
12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=e^{-\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме $x=-2$ и $x=1$. В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точек разрыва:
$$\lim_{x\to-2-0}\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}}\right)=\infty,\ \lim_{x\to-2+0}\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}}\right)=0,\ \lim_{x\to1-0}\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}}\right)=\lim_{x\to1+0}\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}}\right)=0.$$
Таким образом, точка $x=-2$ является точкой разрыва второго рода. В точке $x=1$ функция имеет устранимый разрыв, можно доопределить функцию, полагая $f(1)=0$, и считать, что в этой точке функция непрерывна. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности:
$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}}\right)=e^0=1.$$
Ответ: Точка $x=-2$ является точкой разрыва второго рода, точка $x=1$ является точкой устранимого разрыва, в остальных точках функция непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.



13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:
$$y=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ tgx, & 0<x\le\pi/2,\\ x, & x>\pi/2.\end{cases}.$$

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:
$$\lim_{x\to0-0}f(x)=\lim_{x\to0-0}0=0,\quad \lim_{x\to0+0}f(x)=\lim_{x\to0+0}tgx=0,$$
$$\lim_{x\to\pi/2-0}f(x)=\lim_{x\to\pi/2-0}tgx=\infty,\quad \lim_{x\to\pi/2+0}f(x)=\lim_{x\to\pi/2+0}x=\pi/2.$$
Таким образом, в точке $x=0$ функция непрерывна, а в точке $x=\pi/2$ функция терпит разрыв второго рода. **Ответ:** В точке $x=\pi/2$ функция имеет разрыв второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.



14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:
$$f(x)=\frac{\ln\cos x}{x},\ x\ne0,\ f(0)=0.$$
По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$
Но $x_0=0,\ f(x_0)=0$, поэтому $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x/x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}.$$
Так как $\ln\cos x=\ln(1+\cos x-1)\sim\cos x-1$, то
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$
Ответ: $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = x^{e^{\cos x}}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = e^{\cos x}\ln x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = -e^{\cos x}\sin x\cdot\ln x + \dfrac{e^{\cos x}}{x} = e^{\cos x}(\dfrac{1}{x} - \sin x\cdot\ln x)$. Подставляем сюда *y*:

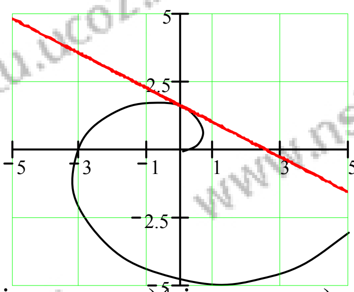
$y' = x^{e^{\cos x}}e^{\cos x}(\dfrac{1}{x} - \sin x\cdot\ln x)$. **Ответ:** $y' = x^{e^{\cos x}}e^{\cos x}(\dfrac{1}{x} - \sin x\cdot\ln x)$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases} \qquad t = \frac{\pi}{2}.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:

$x_0 = x(\pi/2) = 0,\ \ y_0 = y_0(\pi/2) = \pi/2$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$. Тогда $y'_x(\pi/2) = -\dfrac{2}{\pi}$. Далее,



$$y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}\right)'}{\cos t - t\sin t} = \frac{(2\cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t) - (-2\sin t - t\cos x)(\sin t + t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^3} =$$

$= \dfrac{2 + t^2}{(\cos t - t\sin t)^3}$, следовательно, $y''_{xx}(\pi/2) = -\dfrac{16 + 2\pi^2}{\pi^3}$. Таким образом, уравнение касательной $y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{\pi}x$, или $4x + 2\pi y - \pi^2 = 0$; уравнение нормали $y = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}x$, или $\pi x - 2y + \pi = 0$. **Ответ:**

$$(x_0, y_0) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ \ y'_x(x_0) = -\frac{2}{\pi},\ \ y''_{xx}(x_0) = -\frac{16 + 2\pi^2}{\pi^3},\ \ \begin{cases} 4x + 2\pi y - \pi^2 = 0 \ \ \textit{касательная} \\ \pi x - 2y + \pi = 0 \ \ \textit{нормаль} \end{cases}.$$

17. Функция *y*(*x*), заданная неявно уравнением $y + x\ln y = x^2$, принимает в точке $x_0 = 1$ значение $y_0 = 1$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по *x*, предполагая, что *y*= *y*(*x*): $y' + \ln y + \dfrac{xy'}{y} = 2x$. Из этого равенства находим: $y' = \dfrac{2xy - y\ln y}{x + y}$. Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{(2y + 2xy' - y'\ln y - y')(x + y) - (1 + y')(2xy - y\ln y)}{(x + y)^2}$. Вычислим производные в точке: $x_0 = 1\ \ y'(1) = 1,\ \ y''(1) = 1/2$. **Ответ:** $y' = \dfrac{2xy - y\ln y}{x + y}$,

$y'' = \dfrac{(2y + 2xy' - y'\ln y - y')(x + y) - (1 + y')(2xy - y\ln y)}{(x + y)^2}$, $y'(1) = 1,\ \ y''(1) = 1/2$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = \sqrt[3]{x^2},\ \ x = 1{,}03$.

По определению дифференциала $y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+dy(x_0)+o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x)=y(x_0)+dy(x_0)+o((x-x_0))$, $\Delta x=dx=x-x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$. В данном случае $x_0=1,\ y(x_0)=y(1)=1,\ y'=\dfrac{2}{3}x^{-1/3},\ y'(x_0)=y'(1)=\dfrac{2}{3},\ \Delta x=0{,}03$. Тогда $y(1{,}03)\approx 1+0{,}03\cdot 2/3=1{,}02$. **Ответ:** $y\approx 1{,}02$.

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x+e)]^{1/x^3}$.

Это неопределённость вида (1^{∞}). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x+e)]^{1/x^3}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^3}\ln\ln(x+e)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\ln(x+e)}$. Найдём предел в показателе степени:

$\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{x^3}\ln\ln(x+e)]=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln\ln(x+e))'}{\left(x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+e)\ln(x+e)\cdot 3x^2}=\infty$. Следовательно,

$\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x+e)]^{1/x^3}=e^{\infty}=\infty$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x+e)]^{1/x^3}=\infty$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\pi/2}[tgx-\dfrac{2x}{\pi\cos x}]$.

Это неопределённость вида $(\infty-\infty)$:

$$\lim_{x\to\pi/2}[tgx-\frac{2x}{\pi\cos x}]=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\pi\sin x-2x}{\pi\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\pi\cos x-2}{-\pi\sin x}=\frac{2}{\pi}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi/2}[tgx-\dfrac{2x}{\pi\cos x}]=\dfrac{2}{\pi}$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=x^4-3x^3+10x^2,\ x_0=2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x)=4x^3-9x^2+20x,\ f''(x)=12x^2-18x+20,\ f'''(x)=24x-18$, $f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(2)=32,\ f'(2)=36,\ f''(2)=32,\ f'''(2)=30,\ f^{(4)}(2)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=32+36(x-2)+16(x-2)^2+5(x-2)^3+(x-2)^4$.

Ответ: $f(x)=32+36(x-2)+16(x-2)^2+5(x-2)^3+(x-2)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=(x^3+1)^{-1},\ x_0=1$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(1)=1/2,\ f'(x)=-3x^2(x^3+1)^{-2},\ f'(1)=-3/4$,

$f''(x)=-6x(x^3+1)^{-2}+18x^4(x^3+1)^{-3},\ f''(1)=3/4$

$f'''(x)=-6(x^3+1)^{-2}+36x^3(x^3+1)^{-3}+72x^3(x^3+1)^{-3}-162x^6(x^3+1)^{-4},\quad f'''(1)=15/8$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{3}{8}(x-1)^2+\dfrac{5}{16}(x-1)^3+o((x-1)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=\cos 2x-2e^{-x^2},\ x_0=0$.

Найдём значение функции и её первых четырёх производных в заданной точке:

$f(0)=-1,\ \ f'(x)=-2\sin 2x+4xe^{-x^2},\ \ f'(0)=0,$

$f''(x)=-4\cos 2x+4e^{-x^2}-8x^2e^{-x^2},\ \ f''(0)=0,\ \ f'''(x)=8\sin 2x-24xe^{-x^2}+16x^3e^{-x^2},$

$f'''(0)=0,\ \ f^{(4)}(x)=16\cos 2x-24e^{-x^2}+96x^2e^{-x^2}-32x^4e^{-x^2},\ \ f^{(4)}(0)=-8$. По формуле Тейлора $f(x)=-1-x^4/3+o(x^4)$. **Ответ:** В окрестности точки (0, -1) функция ведёт себя как степенная функция четвёртой степени. Точка (1, -1) является точкой максимума функции.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2xe^{x-1}-x^3-x}{(x-1)^3}$.

По формуле Тейлора $e^{x-1}=1+(x-1)+\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{6}(x-1)^3+o((x-1)^3)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2xe^{x-1}-x^3-x}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x[1+(x-1)+(x-1)^2/2+(x-1)^3/6+o((x-1)^3)-x^3-x}{(x-1)^3}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x[2+2(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3/3+o((x-1)^3)-x^2-1]}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)^3/3+o((x-1)^3)}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2xe^{x-1}-x^3-x}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{3}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{x^2}{1-|x|}$.

Область определения функции: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в точках разрыва функции: $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x^2}{1-|x|}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{1-|x|}-\infty,\ \ \lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x^2}{1-|x|}=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{1-|x|}=\infty$. Отсюда следует, что прямые $x=-1$ и $x=1$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

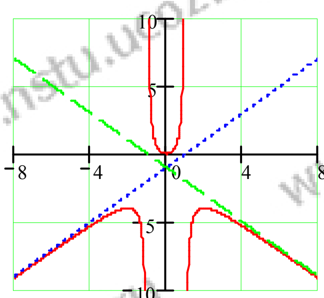
$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{1-|x|}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1-|x|}=-\infty,\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+4}{3x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{16}{9}+\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{3x-2})=\infty$. Найдём наклонные асимптоты:

$y=kx+b,\ \ k_1=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x(1-|x|)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{1-|x|}=,$

$=1,\ \ k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(1-|x|)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-|x|}=-1$. Тогда

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{x^2}{1-|x|}\pm x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\pm x\mp x|x|}{1-|x|}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\pm x}{1-|x|}=1$.Отсюда следует, что прямые $y=x-1$ и $y=-x-1$ являются односторонними наклонными асимптотами. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

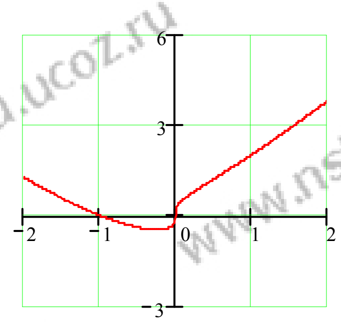


26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=\sqrt[3]{x}(x+1)$.
1. Область определения: $x\in(-\infty,\ \infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствует. 3. Функция непрерывна на всей числовой оси. Вертикальных асимптот нет. 4. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[3]{x}(x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}(x+1)=\infty,$. Найдём наклонные асимптоты:

$y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^{-2}}) = \pm\infty$, следовательно, наклонных и горизонтальных асимптот нет.

5. Первая производная $y' = \left(\sqrt[3]{x}(x+1)\right)' = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^{-2}}(x+1) + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^{-2}}\,\dfrac{4x+1}{3}$. Производная обращается в нуль в точке $x = -1/4$ и не существует в точке $x = 0$. При $x \in (-\infty, -1/4)$ производная $y' < 0$ - функция убывает, при $x \in (-1/4, 0)$ производная $y' > 0$ - функция также возрастает, при $x \in (0, \infty)$ производная $y' > 0$, следовательно, функция также возрастает. Точка $x = -1/4$ является точкой минимума функции, причём $y_{\min} = y(-1/4) = -\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

6. $y'' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4x+1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \dfrac{4\sqrt[3]{x^2} - 2(4x+1)\sqrt[3]{x^{-1}}/3}{x\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{x^5}}$.



Вторая производная в нуль обращается в точке $x = 1/2$. В точке $x = 0$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty, 0)$ производная $y'' > 0$ - интервал вогнутости, в интервале $(0, 1/2)$ производная $y'' < 0$ - интервал выпуклости графика функции, в интервале $(1/2, \infty)$ производная $y'' > 0$ - интервал вогнутости. Точки перегиба $(0, 0)$ и $(1/2, 3/(2\sqrt[3]{2}))$.

7. График функции пересекает координатные оси в точке (0, 0). **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке $(-1/4, -\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}})$ - минимум. Точки перегиба $(0, 0)$ и $(1/2, 3/(2\sqrt[3]{2}))$.

www.nstu.ucoz.ru