Вариант № 11

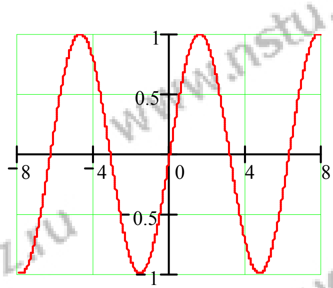
1. Найти область определения функции : $y = \arcsin\dfrac{x-2}{3}$.

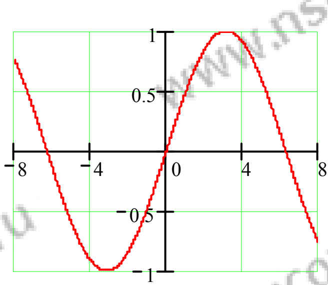
Область определения данной функции определяется неравенством $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| \le 1$. Умножим неравенство на 3 и освободимся от знака модуля: $-3 \le x-2 \le 3$. Из левого неравенства находим $-1 \le x$ или $x \ge -1$. Из правого неравенства $x \le 5$. Объединяя результаты, получим: $-1 \le x \le 5$. **Ответ:** $x \in [-1,\, 5]$.

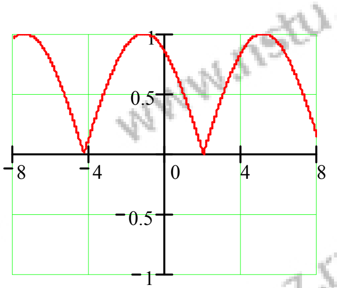
2. Построить график функции: $y = |\sin(x/2-1)|$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: $y = |\sin(x/2-1)| = |\sin(0.5(x-2))|$. Строим сначала $\sin x$. Затем «растягиваем» график в два раза по оси OX. Получим график функции $\sin 0.5x$. Затем переместим график вправо по оси OX на две единицы и повернем отрицательные части графика вверх зеркально по отношению к оси OX. Получим график данной функции.

Ответ: Последовательность построения представлена на рисунках.

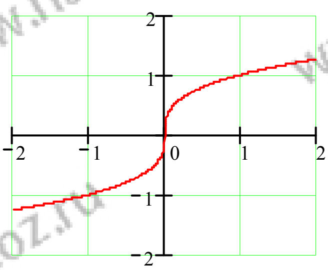


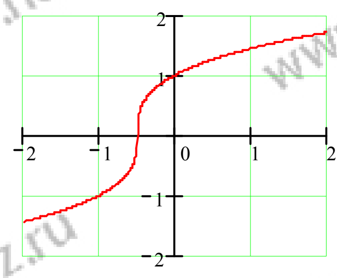


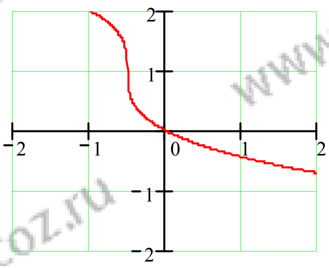


3. Построить график функции: $y = 1-\sqrt[3]{2x+1}$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: $y = 1-\sqrt[3]{2x+1} = 1-\sqrt[3]{2(x+0{,}5)}$. Строим сначала $\sqrt[3]{x}$. Затем «сжимаем» график в два раза по оси OX и сдвигаем его по оси OX на 0,5 единицы влево. Получим график функции $\sqrt[3]{2(x+0{,}5)}$. Затем отобразим весь график вверх зеркально по отношению к оси OX и «поднимем» его по оси OY вверх на одну единицу. Получим график данной функции. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.



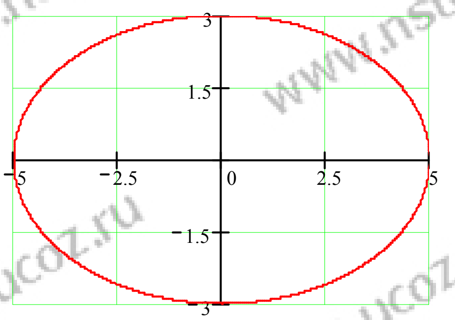




4. Построить график функции: $y = \begin{cases} x = -5\cos t \\ y = -3\sin t \end{cases}$.

Исключим параметр t: $\dfrac{x^2}{25} = \cos^2 t,\ \dfrac{y^2}{9} = \sin^2 t$.

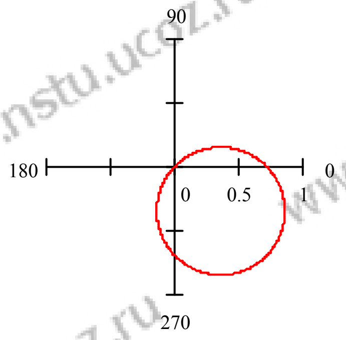
Складывая равенства, получим: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Это уравнение



эллипса с большой полуосью 5 и малой полуосью 3: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **Ответ:** График функции представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho=\sin(\varphi-5\pi/4)$.

Поскольку $\rho\ge 0$, то функция существует для тех значений φ, для которых $\sin(\varphi-5\pi/4)\ge 0$. Это наблюдается при $0\le\varphi-5\pi/4\le\pi$ или $\frac{5\pi}{4}\le\varphi\le\frac{9\pi}{4}$ или $-\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$. В этом интервале функция возрастает от 0 до 1 (при $\varphi=-\pi/4$), затем убывает от 1 до 0. Можно перейти к декартовым координатам. Тогда получим уравнение окружности $(x-1/\sqrt{2})^2+(y+1/\sqrt{2})^2=1/4$, радиус которой равен 1/2, а центр находится в точке $(1/(2\sqrt{2}),-1/(2\sqrt{2}))$ **Ответ:** график представлен на рисунке.



6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3^{-1}+\ldots+3^{-n}}{1+5^{-1}+\ldots+5^{-n}}$.

Воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии: $S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, где a_1 – первый член прогрессии, а q – знаменатель прогрессии. Тогда числитель равен $\frac{1-3^{-n}}{1-3^{-1}}$, а знаменатель - $\frac{1-5^{-n}}{1-5^{-1}}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3^{-1}+\ldots+3^{-n}}{1+5^{-1}+\ldots+5^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-3^{-n})(1-5^{-1})}{(1-5^{-n})(1-3^{-1})}=$$

$$=\frac{(1-5^{-1})}{(1-3^{-1})}\lim_{n\to\infty}\frac{(1-3^{-n})}{(1-5^{-n})}=\frac{(1-5^{-1})}{(1-3^{-1})}=\frac{6}{5}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3^{-1}+\ldots+3^{-n}}{1+5^{-1}+\ldots+5^{-n}}=\frac{6}{5}$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2/3}\frac{9x^2-12x+4}{27x^3-8}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 2/3}\frac{9x^2-12x+4}{27x^3-8}=$

$$=\lim_{x\to 2/3}\frac{9x^2-12x+4}{27x^3-8}=\lim_{x\to 2/3}\frac{(3x-2)^2}{(3x-2)(9x^2+6x+4)}=\lim_{x\to 2/3}\frac{3x-2}{9x^2+6x+4}=\frac{0}{12}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2/3}\frac{9x^2-12x+4}{27x^3-8}=0$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое к знаменателю выражение, получим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{2x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})}{1-x}.$$

Разложим знаменатель как разность кубов:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{2x})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2x}}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену:
$x-\pi=t,\ \ x=t+\pi,\ \ \sin(x/2)=\sin(t/2+\pi/2)=\cos(t/2)$, *если* $x\to\pi$, *то* $t\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t/2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2(t/4)}{t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t/4)}{t/4}\cdot\lim_{t\to 0}\sin(t/4)=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}=0$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$ (неопределённость вида (1^∞)).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right)^{\frac{n^2+n-1}{2}\cdot\frac{-2n^2}{n^2+n-1}}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right)^{\frac{n^2+n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2}{n^2+n-1}}.$$ Предел в квадратных скобках равен числу *e*.

Рассмотрим предел в показателе степени: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2}{n^2+n-1}=-2$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}=e^{-2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}=e^{-2}$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{2x}-e^x}$ (неопределённость вида (0/0)).

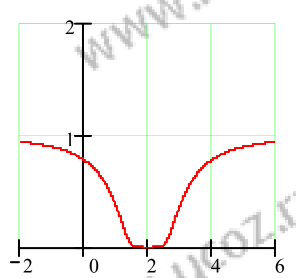
Преобразуем предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{2x}-e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(x/2)}{e^x(e^x-1)}$. Но e^x-1~x и sin(x/2)~x/2. Поэтому

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{2x}-e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2e^x}=0$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{2x}-e^x}=0$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=2^{-\frac{1}{(x-2)^2}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме x=2. В точке x=2 функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

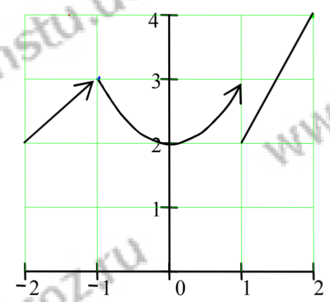
$\lim\limits_{x\to 2-0}2^{-\frac{1}{(x-2)^2}}=\lim\limits_{x\to 2+0}2^{-\frac{1}{(x-2)^2}}=2^{-\infty}=0$. Таким образом, в точке x=2 имеют место устранимый разрыв. Полагая $f(2)=0$, можно считать функцию непрерывной на всей числовой оси.



Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-\frac{1}{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-\frac{1}{(x-2)^2}} = 2^0 = 1$. **Ответ:** В точке x=2 функция имеет устранимый разрыв, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y = \begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1 \le x < 1, \\ 2x, & x \ge 1. \end{cases}.$$



Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to-1-0}(x+4) = 3$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to-1+0}(x^2+2) = 3$,

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to1-0}(x^2+2) = 3$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to1+0} 2x = 2$. Таким образом, в точке x=−1 функция непрерывна, а в точке x=1 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке x=1 равна -1.

Ответ: В точке x=1 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = arctg(x\cos(1/5x)),\ x \ne 0,\ f(0) = 0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{arctg(x\cos(1/5x))}{x}$. Но arctg($t$) ~$t$, при $t\to0$. Поэтому

$f'(0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\cos(1/5x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\cos(1/5x)$. **Ответ:** Производная $f'(0)$ не существует.

15. Найти производную показательно-степенной функции: $y = x^{e^{\sin x}}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = e^{\sin x}\ln x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = e^{\sin x}\cos x\cdot\ln x + \dfrac{e^{\sin x}}{x} = e^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x + \dfrac{1}{x})$. Подставляем сюда y:

$y' = x^{e^{\sin x}} e^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x + \dfrac{1}{x})$. **Ответ:** $y' = x^{e^{\sin x}} e^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x + \dfrac{1}{x})$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{1+2\cos t} \\ y = \dfrac{\sin t}{1+2\cos t} \end{cases} \qquad t = -\frac{\pi}{3}.$$

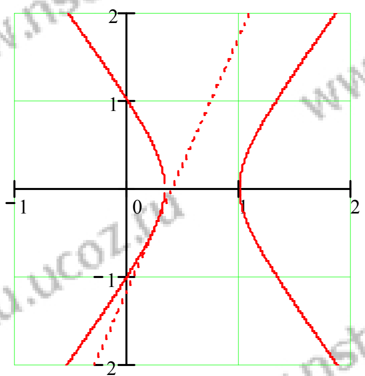
Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:

$x_0 = x(-\pi/3) = 1/4,\ \ y_0 = y(-\pi/3) = -\sqrt{3}/4$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} =$

$$= \frac{\cos t(1+2\cos t) + 2\sin^2 t}{(1+2\cos t)^2} \cdot \frac{(1+2\cos t)^2}{-\sin t(1+2\cos t) + 2\cos t \sin t} = -\frac{2+\cos t}{\sin t}$$.Тогда

$y'_x(-\pi/3) = 5/\sqrt{3}$. Далее,

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{[-\sin^2 t - \cos t(2+\cos t)](1+2\cos t)^2}{\sin^3 t} = -\frac{(1+2\cos t)3}{\sin^3 t}$$



, следовательно, $y''_x(-\pi/3) = 64/(3\sqrt{3})$. Таким образом, уравнение касательной $y = -\sqrt{3}/4 + 5/\sqrt{3}(x - 1/4)$, уравнение нормали $y = -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/5(x - 1/4)$. Или $5x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ и $3x + 5\sqrt{3}y + 3 = 0$. Можно перейти к полярной системе координат: действительно, $t = arctg\dfrac{y}{x} = \varphi$ - полярный угол. Тогда полярный радиус точки равен: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\dfrac{\cos^2 t + \sin^2 t}{(1+2\cos t)^2}} = \dfrac{1}{1+2\cos t}$. Получили

уравнение гиперболы в полярных координатах: $\rho = \dfrac{1}{1+2\cos\varphi}$ или $\rho + 2\rho\cos\varphi = 1$.

Можно перейти к декартовым координатам: $\sqrt{x^2+y^2} = 1 - 2x \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - 2x \Rightarrow x^2 + y^2 = 3x^2 - 4x - y^2 + 1 = 0 \Rightarrow 3(x - \frac{2}{3})^2 - y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 9(x - \frac{2}{3})^2 - 3y^2 = 1$

.

Ответ:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ \ y'_x(x_0) = \frac{5}{\sqrt{3}}\ \ y''_x(x_0) = \frac{64}{3\sqrt{3}},\ \begin{cases} 5x - \sqrt{3}y - 2 = 0 & \textit{касательная} \\ 3x + 5\sqrt{3}y + 3 = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}.$$

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $4\sin(y/x) - 2\sqrt{2} = 4y/x - \pi$, принимает в точке $x_0 = 1$ значение $y_0 = \pi/4$. Найти $y'_x, y''_{xx}, y'_x(x_0), y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по *x*, предполагая, что *y*= *y*(*x*): $\dfrac{4(y'x - y)}{x^2}\cos(y/x) = \dfrac{4(y'x-y)}{x^2}$. Или $4(y'x - y)[\cos(y/x) - 1] = 0$. Из этого равенства

находим: $y' = \dfrac{y}{x}$. Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{xy' - y}{x^2}$. Вычислим производные в

точке: $x_0 = 1$ $\ y'(1) = \dfrac{\pi}{4},\ \ y''(1) = 0$. **Ответ:** $y' = \dfrac{y}{x},\ \ y'' = \dfrac{xy' - y}{x^2},\ \ y'(1) = \dfrac{\pi}{4},\ \ y''(1) = 0$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = x^6,\ x = 2{,}01$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0)),\ \Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 2,\ \ y(x_0) = y(2) = 64,\ \ y' = 6x^5,\ \ y'(x_0) = y'(2) = 192,\ \ \Delta x = 0{,}01$. Тогда $y(2{,}01) \approx 64 + 0{,}01 \cdot 192 = 65{,}92$. **Ответ:** $y \approx 65{,}92$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi/2-arctg\,x)^{1/x}$.

Это неопределённость вида (0^0). Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to\infty}(\pi/2-arctg\,x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{(1/x)\cdot\ln(\pi/2-arctg\,x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}[(1/x)\cdot\ln(\pi/2-arctg\,x)]}$. Найдём предел в показателе степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\pi/2-arctg\,x)}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln(\pi/2-arctg\,x))'}{(x)'}=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x^2)^{-1}}{\pi/2-arctg\,x}=$

$=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x^2)^{-2}2x}{(1+x^2)^{-1}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}=0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi/2-arctg\,x)^{1/x}=e^0=1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctg\,x\right)^{1/x}=1$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3\cdot e^{-x^2})$.

Это неопределённость вида ($\infty\cdot 0$): $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{x^2}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^3\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2xe^{x^2}}=$

$=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}=\dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^{x^2}}=0$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3\cdot e^{-x^2})=0$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=3x^4-6x^2+10,\ x_0=2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dfrac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$.

Найдём все производные: $f'(x)=12x^3-12x,\ f''(x)=36x^2-12,\ f'''(x)=72x,\ f^{(4)}(x)=72$. Тогда $f(2)=34,\ f'(2)=72,\ f''(2)=132,\ f'''(2)=144,\ f^{(4)}(2)=72$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=34+72(x-2)+66(x-2)^2+24(x-2)^3+3(x-2)^4$.

Ответ: $f(x)=34+72(x-2)+66(x-2)^2+24(x-2)^3+3(x-2)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=arctg\dfrac{1}{x},\ x_0=1$.

Применяем формулу Тейлора:

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$.

Вычисляем последовательно: $f(1)=\pi/4,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+1/x^2}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})=-\dfrac{1}{1+x^2},\ f'(1)=-1/2,$

$f''(x)=2x(1+x^2)^{-2},\ f''(1)=1/2,\quad f'''(x)=2(1+x^2)^{-2}-8x^2(1+x^2)^{-3},\ f'''(1)=-1/2$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{4}(x-1)^2-\dfrac{1}{12}(x-1)^3+o((x-1)^3)$.

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=6e^{x-1}-3x-x^3,\ x_0=1$.

Найдём значения функции и её первых четырёх производных в заданной точке: $f(1)=2,\ f'(x)=6e^{x-1}-3-3x^2,\ f'(1)=0,\ f''(x)=6e^{x-1}-6x,\ f''(1)=0,\ f'''(x)=6e^{x-1}-6,$ $f'''(1)=0,\ f^{(4)}(x)=6e^{x-1},\ f^{(4)}(1)=6$. По формуле Тейлора $f(x)=2+(x-1)^4/4+o((x-1)^4)$. **Ответ:** В окрестности точки (1, 2) функция ведёт себя как степенная функция четвёртой степени. Точка (1, 2) является точкой минимума функции.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln(1+x)-2x^2+x^3}{x^4}$.

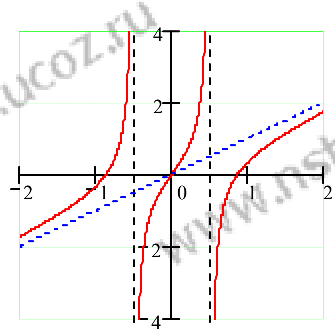
По формуле Тейлора $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$. Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+x)-2x^2+x^3}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(x-x^2/2+x^3/3+o(x^3))-2x^2+x^3}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4/3+o(x^3)}{x^4}=\frac{2}{3}$$

.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln(1+x)-2x^2+x^3}{x^4}=\dfrac{2}{3}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{4x^3-3x}{4x^2-1}$.



Область определения функции: $x\in(-\infty,-1/2)\cup(-1/2,1/2)\cup(1/2,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения:

$$\lim_{x\to -1/2-0}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=\infty,\quad \lim_{x\to -1/2+0}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1/2-0}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=\infty,\quad \lim_{x\to 1/2+0}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=-\infty.$$

Отсюда следует, что прямые $x=-1/2$ и $x=1/2$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=\lim_{x\to -\infty}[x-\frac{2x}{4x^2-1}]=-\infty,\quad \lim_{x\to \infty}\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}=\lim_{x\to \infty}[x-\frac{2x}{4x^2-1}]=\infty.$$

Следовательно, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

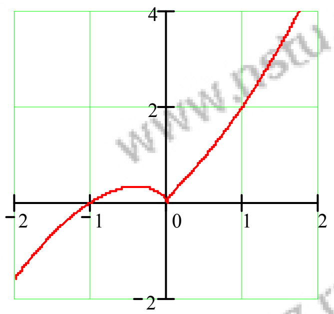
26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=\sqrt[3]{x^2}(x+1)$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют. 3. Функция непрерывна в области определения. Вертикальных асимптот нет. 4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[3]{x^2}(x+1)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x^2}(x+1)=\infty$. Найдём наклонные асимптоты: $y=kx+b$,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^2}(x+1)/x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})=\infty\ =\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{4x^2}}-1)==\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{4x^2}=0.$$

Следовательно, наклонных асимптот нет. 5. Первая производная

$$y'=[\sqrt[3]{x^2}(x+1)]'=(x^{5/3}+x^{2/3})'=\frac{5}{3}x^{2/3}+\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5x+2}{\sqrt[3]{x}}.$$



Производная обращается в нуль в точке $x=-2/5$. В точке $x=0$ производная не существует. При $x\in(-\infty,-2/5)$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает, при $x\in(-2/5,0)$ производная $y'<0$ - функция убывает, при $x\in(0,\infty)$ производная $y'>0$, следовательно, функция возрастает. Точка $x = -2/5$ является точкой максимума функции, причём $y_{\max} = y(-1/\sqrt{2}) = (3/5)\sqrt[3]{4/25}$. Точка $x = 0$ является точкой минимума функции, причём $y_{\min} = 0$.

6. $y'' = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5x+2}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt[3]{x} - (5x+2)\sqrt[3]{x^{-2}}/3}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{15x - (5x+2)}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{10x-2}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{5x-1}{\sqrt[3]{x^4}}$.

Вторая производная обращается в нуль в точке $x = 1/5$. В точке $x = 0$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty, 0)$ производная $y'' < 0$ - интервал выпуклости, в интервале $(0, 1/5)$ производная $y'' < 0$ - тоже интервал выпуклости графика функции, в интервале $(1/5, \infty)$ производная $y'' < 0$ - интервал выпуклости. Точка перегиба - $x = 1/5$. 7. График функции пересекает ось координат ОХ в точке $x = -1$, а ось координат ОУ – в точке $x = 0$. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремум в точке $(-2/5, (3/5)\sqrt{4/25})$ - максимум, экстремум в точке $(0, 0)$ - минимум. Точка перегиба - $(1/5, (6/5)\sqrt[3]{1/25})$.