## Вариант № 13

**1.** Найти область определения функции : $y = \arcsin\dfrac{x-2}{3} + \sqrt{x}$ .

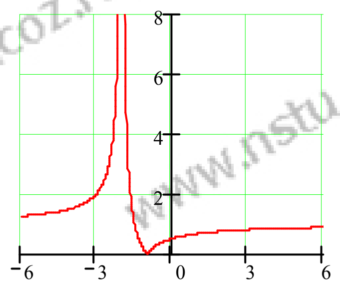
Область определения данной функции определяется двумя неравенствами $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| \le 1$ и $x \ge 0$. Умножим первое неравенство на 3 и освободимся от знака модуля: $-3 \le x-2 \le 3$. Из левого неравенства находим $-1 \le x$ или $x \ge -1$. Из правого неравенства $x \le 5$. Объединяя результаты, получим: $0 \le x \le 5$. **Ответ:** $x \in [0, 5]$**.**

**2.** Построить график функции: $y = \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$.

Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x = -2$. Если $x \to -2 \pm 0$, то $y \to +\infty$. В точке $(0, 1/2)$ график функции пересекает ось ОУ. Функция обращается в нуль в точке (-1, 0). Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 1$.

Вычисляем значения функции в нескольких точках:

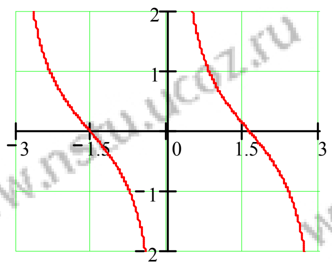
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -6 | -4 | -3 | -2.5 | -2.2 | -1.8 | -1.5 |
| 5/4 | 3/2 | 2 | 3 | 6 | 9 | 3 |
| 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 6 | |
| 3/5 | 2/3 | 5/7 | 3/4 | 4/5 | 7/8 | |

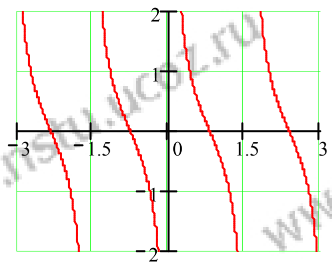


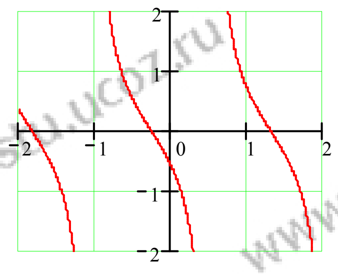

По всем данным строим график. **Ответ:** График представлен на рисунке.

**3.** Построить график функции: $y = ctg(2x - \pi/3)$.

Функция определена на всей числовой оси, кроме точек, для которых $2x - \pi/3 = k\pi,\ k = \pm 0, 1, 2, \ldots$. Преобразуем функцию: $y = ctg(2x - \pi/3) = ctg(2(x - \pi/6))$. Строим сначала $ctg(x)$. Затем «сжимаем» график в два раза по оси ОХ и сдвигаем его по оси ОХ на π/6 единиц вправо. Получим график данной функции. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.

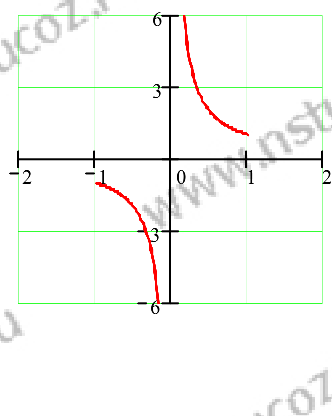



**4.** Построить график функции: $y = \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1/\cos t \end{cases}$.

Исключим параметр *t*, умножая *x* на *y*: $xy = \cos t \cdot (1/\cos t) = 1$. Получили уравнение гиперболы $y = 1/x$, асимптотами которой являются координатные оси. Однако надо учесть, что $x = \cos t$, т.е. $|x| = |\cos t| \le 1$ или $-1 \le x \le 1$. С другой стороны $|y| = 1/|\cos t| \ge 1$. Строим график гиперболы для (x, y) из указанной области.




**Ответ:** График представлен на рисунке.

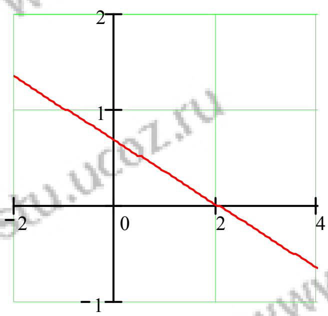
**5.** Построить график функции: $\rho = \dfrac{2}{3\sin\varphi + \cos\varphi}$.

Перейдём к декартовой системе координат, учитывая, что $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$. Получим:

$$\rho = \frac{2}{3y/\rho + x/\rho} = \frac{2\rho}{3y + x} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{2}{3y + x} \quad \text{или} \quad 3y + x = 2.$$

Получили уравнение прямой, которая отсекает от осей координат соответственно отрезки 2 и 2/3.

**Ответ:** График представлен на рисунке.




**6.** Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 21n^2 + 75n + 91}{-4n^3 - 42n^2 - 148n - 175} =$$

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{2 + 21n^{-1} + 75n^{-2} + 91n^{-3}}{4 + 42n^{-1} + 148n^{-2} + 175n^{-3}} = -\frac{1}{2}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4} = -\dfrac{1}{2}$.

**7.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} =$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{6}{1} = 6.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = 6$.

**8.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое к знаменателю выражение:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{4x} - 2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2x})}{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2x})} = 4\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{2 - x} = \left| \begin{matrix} 4x = t^3, & \text{если} \;\; x \to 2, \\ \text{то} \;\; t \to 2 & \end{matrix} \right| =$$

$$= 4\lim_{t\to 2} \frac{t-2}{2 - t^3/4} = 16\lim_{t\to 2} \frac{t-2}{8 - t^3} = 16\lim_{t\to 2} \frac{t-2}{(2-t)(t^2 + 2t + 4)} = -16\lim_{t\to 2} \frac{1}{t^2 + 2t + 4} = -\frac{4}{3}.$$

**Ответ:** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}} = -\dfrac{4}{3}$.

**9.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{tg\,\pi x}{x+2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной: $x + 2 = t$, $x = t - 2$, *если* $x \to -2$, *то* $t \to 0$. Получим:

$$\lim_{x\to -2} \frac{tg\,\pi x}{x+2} = \lim_{t\to 0} \frac{tg(\pi t - 2\pi)}{t} = \left| tg(\pi t - 2\pi) = tg\,\pi t \right| = \lim_{t\to 0} \frac{tg\,\pi t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin\pi t}{t\cos\pi t} = \pi \lim_{t\to 0} \frac{\sin\pi t}{\pi t} = \pi.$$

Здесь воспользовались первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{tg\,\pi x}{x+2} = \pi$.

**10.** Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$ (неопределённость вида $(1^\infty)$).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-1+2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{-n^2}=\left|\frac{2}{n-1}=\frac{1}{t},\ \textit{если}\ n\to\infty,\ \textit{то}\ t\to\infty,\ n=2t+1\right|=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\left(-\frac{(2t+1)^2}{t}\right)}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(2t+1)^2}{t}}=e^{-\infty}=0.$$

**Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}=0$.

**11.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x^2}}{\arcsin 3x^2}$ (неопределённость вида (0/0)).

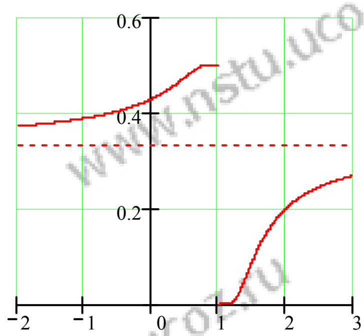
Воспользуемся эквивалентными величинами: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x^2}}{\arcsin 3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-(e^{3x^2}-1)}{\arcsin 3x^2}=$

$$=\left|\arcsin t\sim t\ \text{ и }\ e^t-1\sim t\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x^2}{3x^2}=-\frac{2}{3}.$$

**Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x^2}}{\arcsin 3x^2}=-\dfrac{2}{3}$.

**12.** Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}$.

Область определения – все действительные числа, кроме $x$=1. В точке $x$=1 функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}=0$. Таким образом, в точке $x$=1 имеют место разрыв первого рода. Скачок в точке разрыва равен -0,5. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x-1}}}=\dfrac{1}{3}$.

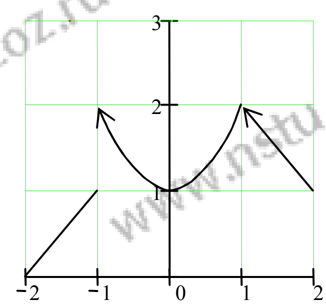



**Ответ:** В точке $x$=1 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

**13.** Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y=\begin{cases}x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1<x\le 1,\\ -x+3, & x>1.\end{cases}$$

Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:




$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}(x+2)=1,\quad \lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}(x^2+1)=2,$$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1) = 2,\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(-x+3) = 2$. Таким образом, в точке $x$=1 функция непрерывна, а в точке $x$=−1 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке $x$=−1 равна 1. **Ответ:** В точке $x$=−1 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

**14.** Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = 2x^2 + x^2\cos(1/9x),\ x \neq 0,\ f(0) = 0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим $\Delta x$ на $x$-$x_0$:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2 + x^2\cos(1/9x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}[2x + x\cos(1/9x)] = 0$, так как $|\cos(1/9x)| \le 1$ всегда.

**Ответ:** $f'(0) = 0$.

**15.** Найти производную показательно-степенной функции: $y = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$.

Прологарифмируем функцию: $\ln y = \ln\sin\sqrt{x}\cdot\ln\sin\sqrt{x} = \left(\ln\sin\sqrt{x}\right)^2$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = 2\ln\sin\sqrt{x}\cdot\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\ln\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot ctg\sqrt{x}$.

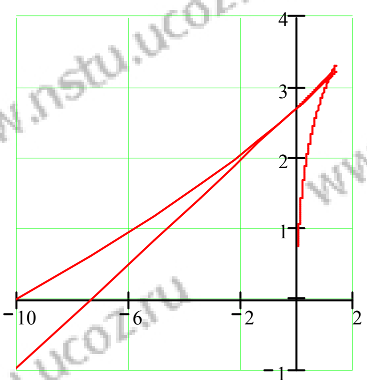
Подставляем сюда $y$:

$y' = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\ln\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot ctg\sqrt{x}$. **Ответ:** $y' = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\ln\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot ctg\sqrt{x}$.

**16.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить $y''_{xx}$:

$$\begin{cases} x = (1+\ln t)/t^2 \\ y = (3+2\ln t)/t \end{cases} \qquad t = \frac{1}{e}.$$

Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0)\cdot(x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0))\cdot(x - x_0)$, где $x_0$ и $y_0$ - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты: $x_0$= $x(1/e) = 0$, $y_0$= $y(1/e) = e$. Найдём производные $y'_x$ и $y''_{xx}$: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} =$




$= \dfrac{2t^{-1}\cdot t - (3+2\ln t)}{t^2}\cdot\dfrac{t^4}{t^{-1}\cdot t^2 - 2t(1+\ln t)} =$

$= \dfrac{-(1+2\ln t)}{t^2}\cdot\dfrac{t^3}{-(1+2\ln t)} = t$.

Тогда $y'_x(1/e) = 1/e$. Далее, $y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\dfrac{(1+2\ln t)}{t^3}$, следовательно, $y''_x(1/e) = e^3$. Таким образом, уравнение касательной $y = e + x/e$, уравнение нормали $y = e - ex$. Или $x - ey + e^2 = 0$ и $ex + y - e = 0$. **Ответ:**

$(x_0, y_0) = (0, e)$, $y'_x(x_0) = \dfrac{1}{e}$, $y''_x(x_0) = e^3$, $\begin{cases} x - ey + e^2 = 0 & \textit{касательная} \\ ex + y - e = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}$.

**17.** Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $x^2y + x\ln y = 1$, принимает в точке $x_0 = 1$ значение $y_0 = 1$. Найти $y'_x,\ y''_{xx},\ y'_x(x_0),\ y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по $x$, предполагая, что $y = y(x)$: $2xy + x^2y' + \ln y + \dfrac{xy'}{y} = 0$.

Из этого равенства находим: $y' = -\dfrac{2xy^2 + y\ln y}{x^2y + x}$. Находим вторую производную:

$$y'' = -\frac{(2y^2 + 4xyy' + y'\ln y + y')(x^2y + x) - (2xy + x^2y' + 1)(2xy^2 + y\ln y)}{(x^2y + x)^2}.$$

Вычислим производные в точке: $x_0 = 1$ $y'(1) = -1,\ \ y''(1) = \dfrac{5}{2}$. **Ответ:** $y' = -\dfrac{2xy^2 + y\ln y}{x^2y + x}$,

$$y'' = -\frac{(2y^2 + 4xyy' + y'\ln y + y')(x^2y + x) - (2xy + x^2y' + 1)(2xy^2 + y\ln y)}{(x^2y + x)^2},$$

$y'(1) = -1,\ \ y''(1) = \dfrac{5}{2}$.

**18.** Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = (2x^2 + x + 1)^{-1/2},\ \ x = 1{,}016$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0)),\ \ \Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 1,\ \ y(x_0) = y(1) = 0{,}5,\ \ y' = -(2x^2 + x + 1)^{-3/2}(4x + 1)/2,\ \ y'(x_0) = y'(1) = -5/16,\ \ \Delta x = 0{,}016$. Тогда $y(1{,}016) \approx 0{,}5 - 0{,}016 \cdot 5/16 = 0{,}495$. **Ответ:** $y \approx 0{,}495$

**19.** Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{1/\ln x}$.

Это неопределённость вида $(0^0)$. Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{1/\ln x} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(1/\ln x)\cdot\ln(\arcsin x)} = e^{\lim\limits_{x\to+0}[(1/\ln x)\cdot\ln(\arcsin x)]}$. Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\arcsin x)}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln(\arcsin x))'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{\arcsin x\cdot\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{x}{x\sqrt{1 - x^2}} = 1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{1/\ln x} = e^1$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{1/\ln x} = e$.

**20.** Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(tg\,x - x)}{x^3}$.

Это неопределённость вида (0/0): $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(tg\,x - x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1/\cos^2 x - 1)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x} =$

$\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{3}$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(tg\,x - x)}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

**21.** Многочлен по степеням $x$ представить в виде многочлена по степеням $(x - x_0)$: $f(x) = 3x^4 - 8x^2 + 12,\ \ x_0 = -2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x)=12x^3-16x,\ f''(x)=36x^2-16,\ \ f'''(x)=72x,\ \ f^{(4)}(x)=72$. Тогда $f(-2)=28,\ \ f'(-2)=-64,\ f''(-2)=128,\ \ f'''(-2)=-144,\ \ f^{(4)}(-2)=72$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=28-64(x+2)+64(x+2)^2-24(x+2)^3+3(x+2)^4$.

**Ответ:** $f(x)=28-64(x+2)+64(x+2)^2-24(x+2)^3+3(x+2)^4$.

**22.** Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки $x_0$ с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=(e^x-1)^{-2},\ x_0=\ln 2$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(\ln 2)=1,\ \ f'(x)=-2e^x(e^x-1)^{-3},\ \ f'(\ln 2)=-4,$

$f''(x)=-2e^x(e^x-1)^{-3}+6e^{2x}(e^x-1)^{-4},\ \ f''(\ln 2)=20$

$f'''(x)=-2e^x(e^x-1)^{-3}+6e^{2x}(e^x-1)^{-4}+12e^{2x}(e^x-1)^{-4}-24e^{3x}(e^x-1)^{-5},\ \ f'''(\ln 2)=-124$.

**Ответ:** $f(x)=1-4(x-\ln 2)+10(x-\ln 2)^2-\dfrac{62}{3}(x-\ln 2)^3+o((x-\ln 2)^3)$

**23.** Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=(x+1)\sin(x+1)-2x-x^2,\ \ x_0=-1$.

Найдём значение функции и её первых четырёх производных в заданной точке: $f(-1)=1,\ \ f'(x)=\sin(x+1)+(x+1)\cos(x+1)-2-2x,\ \ f'(-1)=0,\ \ f''(x)=2\cos(x+1)-$ $-(x+1)\sin(x+1)-2,\ \ f''(-1)=0,\ f'''(x)=-3\sin(x+1)-(x+1)\cos(x+1),\ \ f'''(-1)=0$ $f^{(4)}(x)=-4\cos(x+1)+(x+1)\sin(x+1),\ \ f^{(4)}(-1)=-4$. По формуле Тейлора $f(x)=1-(x+1)^4/6+o((x+1)^4)$. **Ответ:** В окрестности точки (-1, 1) функция ведёт себя как степенная четвёртой степени. Точка (-1, 1) является точкой максимума.

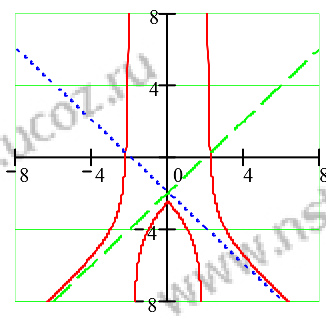
**24.** Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$.

Заметим, что $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$ По формуле Тейлора $\cos 2x=1-\dfrac{1}{2}(2x)^2+\dfrac{1}{24}(2x)^4+o(x^4)$. Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(1-\cos 2x)/2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1/2+(1-2x^2+2x^4/3+o(x^4)/2)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/3+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{3}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\dfrac{1}{3}$.

**25.** Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{4x^3-20}{8-4|x|}$.




Область определения функции: $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{4x^2-20}{8-4|x|}=\infty,\ \ \lim_{x\to -2+0}\frac{4x^2-20}{8-4|x|}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to +2-0}\frac{4x^2-20}{8-4|x|}=-\infty,\ \ \lim_{x\to +2+0}\frac{4x^2-20}{8-4|x|}=\infty.$$ Отсюда следует, что прямые $x=-2$ и $x=2$

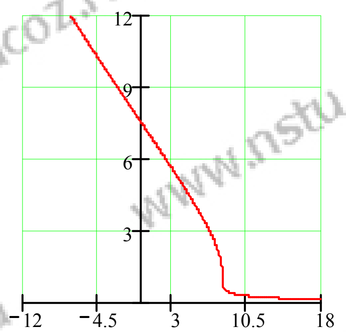
являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-20}{8-4|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-20}{8+4x}=\lim_{x\to-\infty}[x-2-\frac{1}{x+2}]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-20}{8-4|x|}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-20}{8-4x}=\lim_{x\to\infty}[-x-2-\frac{1}{2-x}]=\infty.$$ Следовательно, прямые $y=x-2$ и $y=-x-2$ являются наклонными асимптотами. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

**26.** Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=e^{-\sqrt[3]{x-8}}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют. 3. Функция непрерывна в области определения. Вертикальных асимптот нет. 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\sqrt[3]{x-8}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\sqrt[3]{x-8}}=0$. Найдём наклонные асимптоты: $y=kx+b$,




$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{x-8}}}{x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{x-8}}}{x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sqrt[3]{x-8}=t,\ x=t^3+8,\\ \text{если } x\to-\infty,\ \text{то } t\to-\infty\end{matrix}\right|=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-t}}{t^3+8}=-\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-t}}{3t^2}=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-t}}{6t}=-\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-t}}{6}=-\infty.$$ Следовательно, имеется только односторонняя (правая) горизонтальная асимптота $y=0$.

5. Первая производная $y'=[e^{-\sqrt[3]{x-8}}]'=-\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{-\sqrt[3]{x-8}}}{\sqrt[3]{(x-8)^2}}$. Производная в нуль не обращается. В точке $x=8$ производная не существует. Производная остаётся отрицательной на всей числовой оси. Следовательно, функция монотонно убывает и экстремумов не имеет.

6. $$y''=\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{-\sqrt[3]{x-8}}}{\sqrt[3]{(x-8)^2}}\right)'=-\frac{1}{3}\cdot\frac{-e^{-\sqrt[3]{x-8}}\cdot\sqrt[3]{(x-8)^{-2}}\sqrt[3]{(x-8)^2}/3-e^{-\sqrt[3]{x-8}}\cdot2\sqrt[3]{(x-8)^{-1}}/3}{\sqrt[3]{(x-8)^4}}=$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{e^{-\sqrt[3]{x-8}}\cdot(\sqrt[3]{x-8}+2)}{\sqrt[3]{(x-8)^5}}.$$ Вторая производная обращается в нуль в точке $x=0$. В точке $x=8$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty,0)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции, в интервале $(0,8)$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости, в интервале $(8,\infty)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции. Точки перегиба - $x=0, x=8$. 7. График функции не пересекает осей координат, во всех точках $f(x)>0$. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, экстремумов нет. Точки перегиба - $(0,e^2)$, $(8,1)$.