Вариант № 15

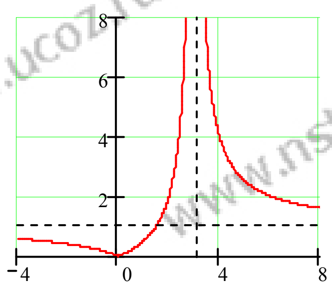
1. Найти область определения функции : $y = \arcsin\dfrac{2-x}{3} + \sqrt{3-x}$.

Область определения данной функции определяется двумя неравенствами: $\left|\dfrac{2-x}{3}\right| \le 1$ и $3 - x \ge 0$ или $x \le 3$. Умножим первое неравенство на 3 и освободимся от знака модуля: $-3 \le 2 - x \le 3$. Из левого неравенства находим $-5 \le -x$ или $x \le 5$. Из правого неравенства $-x \le 1$ или $x \ge -1$. Объединяя результаты, получим: $-1 \le x \le 3$. **Ответ:** $x \in [-1, 3]$**.**

2. Построить график функции: $y = \left|\dfrac{x}{x-3}\right|$.

Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Если $x \to 3 \pm 0$, то $y \to +\infty$. В точке $(0, 0)$ график функции пересекает обе оси. Если $x \to \pm\infty$, то $y \to 1$. Вычисляем значения функции в нескольких точках:

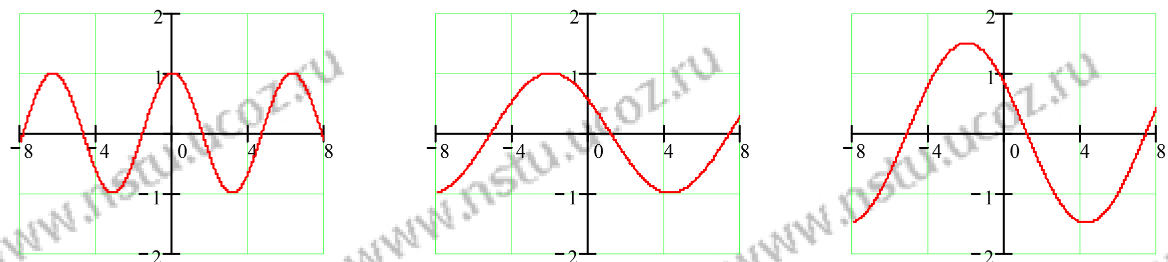
-4	-3	-2	-1	1	2	2.5
4/7	1/2	2/5	1/4	1/2	2	5
2.8	3.2	3.5	4	5	6	
14	16	7	4	5/2	2	



По всем данным строим график. **Ответ:** График представлен на рисунке.

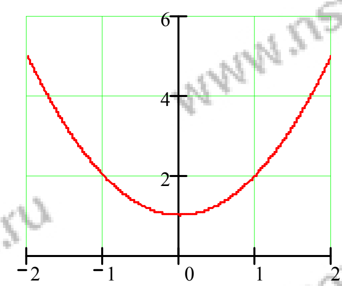
3. Построить график функции: $y = \dfrac{3}{2}\cos(\dfrac{x}{2} + 1)$.

Функция определена на всей числовой оси. Преобразуем функцию: $y = \dfrac{3}{2}\cos(\dfrac{x}{2} + 1) = \dfrac{3}{2}\cos(\dfrac{1}{2}(x + 2))$. Строим сначала $\cos x$. Затем «растягиваем» график в два раза по оси ОХ и сдвигаем его по оси ОХ на 2 единицы влево.



Получим график функции $y = \cos(\dfrac{1}{2}(x + 2))$. Затем «растягиваем» график по оси ОУ в 1,5 раза. Получим график данной функции. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.

4. Построить график функции: $\begin{cases} x = tg\, t \\ y = \dfrac{2}{1 + \cos 2t} \end{cases}$.

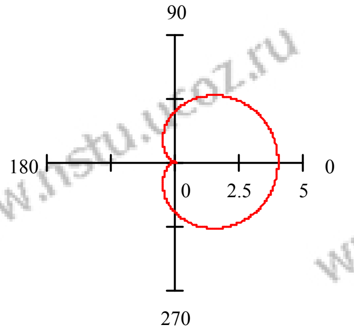


Исключим параметр *t*:

$y = \dfrac{2}{1 + \cos 2t} = \dfrac{2}{2\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + tg^2 t = x^2 + 1$. Получили уравнение параболы $y = x^2 + 1$ с вершиной в точке (0, 1), ветви которой направлены вверх. Область определения функции - (-∞,∞). Графиком функции является парабола.

Ответ: График представлен на рисунке.

5. Построить график функции: $\rho = 2(1+\cos\varphi)$.



Функция существует для всех значений *φ*, так как $|\cos\varphi| \le 1$. Функция уменьшается от 4 (при *φ* =0) до2 (при *φ* =π/2), далее до 0 (при *φ* =π). Затем функция возрастает до 2 в обратном порядке.

Ответ: график представлен на рисунке.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-n}{8n^3+8n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-n^{-2}}{8+8n^{-2}}=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}=1$.

7. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x^2+8}{x^3+8}-\dfrac{1}{x+2}\right)$ (неопределённость вида (0-0)).

Приводим к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2+8}{x^3+8}-\frac{1}{x+2}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+8-(x^2-2x+4)}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)}{x^3+8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{2}{x^2-2x+4}=\frac{1}{6}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x^2+8}{x^3+8}-\dfrac{1}{x+2}\right)=\dfrac{1}{6}$.

8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$ (неопределённость вида (0/0)).

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое к знаменателю выражение:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt[3]{9x}-3)(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{3+x}-\sqrt{2x})(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x})}=2\sqrt{6}\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{3-x}=\left|\begin{matrix}9x=t^3,\ \textit{если}\ \ x\to3,\\ \textit{то}\ \ t\to3\end{matrix}\right|=$$

$$=2\sqrt{6}\lim_{t\to3}\frac{t-3}{3-t^3/9}=18\sqrt{6}\lim_{t\to3}\frac{t-3}{27-t^3}=18\sqrt{6}\lim_{t\to3}\frac{t-3}{(3-t)(t^2+3t+9)}=-18\sqrt{6}\lim_{t\to3}\frac{1}{t^2+3t+9}=-\frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

9. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\pi^2-4x^2}{\cos x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной: $x-\pi/2=t,\ \ x=t+\pi/2,\ \ \textit{если}\ x\to\pi/2,\ \textit{то}\ t\to0$. Получим:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\pi^2-4x^2}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\pi-2x)(\pi+2x)}{\cos x}=-2\pi\lim_{t\to0}\frac{2t}{\cos(t+\pi/2)}=|\cos(t+\pi/2)=-\sin t|=$$

$=4\pi\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sin t}=4\pi$. Здесь воспользовались первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\pi^2-4x^2}{\cos x}=4\pi$.

10. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$ (неопределённость вида (1^{∞})).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1+2}{3n-1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n-1}\right)^{2n+3}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{2}{3n-1}=\dfrac{1}{t},\ \ n=(2t+1)/3\\ \text{если } n\to\infty, \text{ то } t\to\infty\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4t/3+11/3}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{4/3}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{11/3}=e^{4/3}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}=e^{4/3}$.

11. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3\sin(\pi(x+4))}$ (неопределённость вида (0/0)).

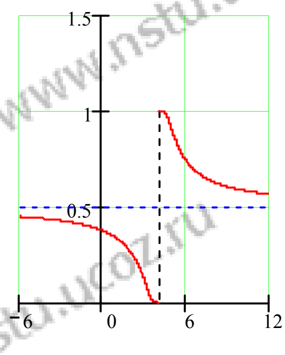
Воспользуемся эквивалентными величинами:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{\pi x}-1)}{3\sin(\pi(x+4))}=\left|\sin(\pi x+4\pi)=\sin\pi x\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{\pi x}-1)}{3\sin\pi x}=\left|\sin\pi x\sim\pi x\ \text{ и }\ e^{\pi x}-1\sim\pi x\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\pi x}{3\pi x}=\frac{2}{3}\,|.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3\sin(\pi(x+4))}=\dfrac{2}{3}$.

12. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=\dfrac{1}{1+8^{\frac{1}{4-x}}}$.

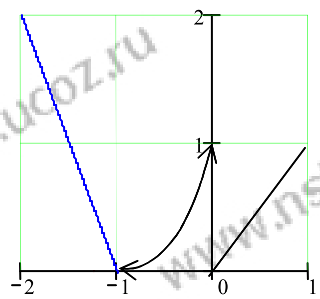
Область определения – все действительные числа, кроме x=4. В точке x=4 функция имеет разрыв, во всех других точках является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва: $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{1}{1+8^{\frac{1}{4-x}}}=0,\ \lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{1}{1+8^{\frac{1}{4-x}}}=1$.



Таким образом, в точке x=4 имеет место разрыв первого рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+8^{\frac{1}{4-x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+8^{\frac{1}{4-x}}}=\dfrac{1}{2}$. **Ответ:** В точке x=4 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

13. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика:

$$y=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^3, & -1<x<0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$$



Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$. Ось OX разбивается на три интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точками разрыва могут быть только точки, разделяющие интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=-2\lim_{x\to-1-0}(x+1)=0,\quad \lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}(x+1)^3=0,$$

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0}(x-1)^3 = -1,\ \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} x = 0$. Таким образом, в точке $x=-1$ функция непрерывна, а в точке $x=0$ функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке $x=0$ равна 1. **Ответ:** В точке $x=0$ функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.

14. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = \ln[1-\sin(x^3\cdot\sin(1/x))],\ x\neq 0,\ f(0)=0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим Δx на x-x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Но $x_0 = 0,\ f(x_0)=0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[1-\sin(x^3\cdot\sin(1/x))]}{x} = |\ln(1+t)\sim t\ при\ t\to 0| = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x^3\cdot\sin(1/x))}{x} =$$

$= |\sin t\sim t\ при\ t\to 0| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3\cdot\sin(1/x))}{x} = -\lim\limits_{x\to 0}[x^2\cdot\sin(1/x))] = 0$, так как $|\sin(1/x)|\le 1$ всегда.

Ответ: $f'(0)=0$.

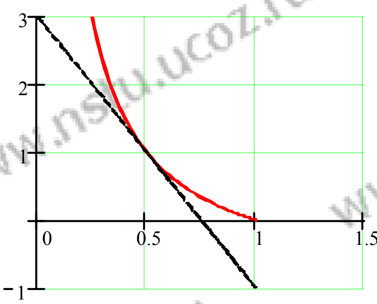
15. Найти производную показательно-степенной функции: $y=(\cos 5x)^{e^x}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = e^x\ln\cos 5x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = e^x\ln\cos 5x - \dfrac{5e^x\sin 5x}{\cos 5x} = e^x(\ln\cos 5x - 5tg\,5x)$. Подставляем сюда y:

$y' = e^x(\ln\cos 5x - 5tg\,5x)\cdot(\cos 5x)^{e^x}$. **Ответ:** $y' = e^x(\ln\cos 5x - 5tg\,5x)\cdot(\cos 5x)^{e^x}$.

16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить y''_{xx}:

$\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y = tg^2 t\end{cases} \qquad t=\dfrac{\pi}{4}$.

Уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ имеют вид $y=y_0+y'_x(x_0)\cdot(x-x_0)$ и $y=y_0-(1/y'_x(x_0))\cdot(x-x_0)$, где x_0 и y_0 - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:



$x_0 = x(\pi/4) = 1/2,\ y_0 = y(\pi/4)=1$. Найдём производные y'_x и y''_{xx}: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} =$

$= -\dfrac{2tg\,t}{\cos^2 t\cdot 2\cos t\sin t} = -\dfrac{1}{\cos^4 t}$. Тогда $y'_x(\pi/4) = -4$.

Далее, $y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\dfrac{(\cos^{-4} t)'}{(\cos^2 t)'} =$

$= -\dfrac{-4\cos^{-5} t\cdot(-\sin t)}{2\cos t\cdot(-\sin t)} = \dfrac{2}{\cos^6 t}$, следовательно, $y''_x(\pi/4)=16$. Таким образом, уравнение касательной $y=1-4(x-1/2)$, уравнение нормали $y=1+(x-1/2)/4$. Или $4x+y-3=0$ и $2x-8y+7=0$.

Ответ: $(x_0,y_0) = \left(\dfrac{1}{2},1\right),\ y'_x(x_0) = -4,\ y''_x(x_0)=16,\ \begin{cases}4x+y-3=0\ \ \textit{касательная}\\ 2x-8y+7=0\ \ \textit{нормаль}\end{cases}$.

17. Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $xy^2+y+x^2=3$, принимает в точке $x_0=1$ значение $y_0=1$. Найти y'_x, y''_{xx}, $y'_x(x_0)$, $y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по x, предполагая, что $y=y(x)$: $y^2+2xyy'+y'+2x=0$. Из этого равенства находим: $y'=-\dfrac{2x+y^2}{2xy+1}$. Находим вторую производную: $y''=-\dfrac{(2yy'+2)(2xy+1)-(2y+2xy')(2x+y^2)}{(2xy+1)^2}$. Вычислим производные в точке: $x_0=1$ $y'(1)=-1,\ y''(1)=0$. **Ответ:** $y'=-\dfrac{2x+y^2}{2xy+1}$, $y''=-\dfrac{(2yy'+2)(2xy+1)-(2y+2xy')(2x+y^2)}{(2xy+1)^2}$, $y'(1)=-1,\ y''(1)=0$.

18. Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x=4{,}16$.

По определению дифференциала $y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+dy(x_0)+o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x)=y(x_0)+dy(x_0)+o((x-x_0)),\ \Delta x=dx=x-x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$. В данном случае $x_0=4,\ y(x_0)=y(4)=0{,}5,\ y'=-x^{-3/2}/2,\ y'(x_0)=y'(4)=-1/16,\ \Delta x=0{,}16$. Тогда $y(4{,}16)\approx 0{,}5-0{,}16/16=0{,}49$. **Ответ:** $y\approx 0{,}49$

19. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x^{-3}}$.

Это неопределённость вида (1^∞). Преобразуем предел:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{x^{-3}}=\lim_{x\to+0}e^{x^{-3}\cdot\ln(\frac{\sin x}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to+0}[x^{-3}\cdot\ln(\frac{\sin x}{x})]}.$$

Найдём предел в показателе степени:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x/x)}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln(\sin x/x))'}{(x^3)'}=\lim_{x\to+0}[\frac{x}{3x^2\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}]=\lim_{x\to+0}\frac{x\cos x-\sin x}{3x^4}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x\cos x-\sin x}{3x^4}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{12x^3}=\lim_{x\to+0}\frac{-x\sin x}{12x^3}=-\lim_{x\to+0}\frac{1}{12x}=-\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x^{-3}}=e^{-\infty}=0$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x^{-3}}=0$.

20. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$.

Это неопределённость вида (∞-∞): $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1-x)'}{[x(e^x-1)]'}==\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=\dfrac{1}{2}$.

21. Многочлен по степеням x представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=3x^4-11x^3-66,\ x_0=-2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$

Найдём все производные: $f'(x)=12x^3-33x^2$, $f''(x)=36x^2-66x$, $f'''(x)=72x-66$, $f^{(4)}(x)=72$. Тогда $f(-2)=70$, $f'(-2)=-228$, $f''(-2)=276$, $f'''(-2)=-210$, $f^{(4)}(3)=72$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=70-228(x+2)+138(x+2)^2-35(x+2)^3+3(x+2)^4$.

Ответ: $f(x)=70-228(x+2)+138(x+2)^2-35(x+2)^3+3(x+2)^4$.

22. Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=(x^2+1)^{-1}$, $x_0=-1$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(-1)=1/2$, $f'(x)=-2x(x^2+1)^{-2}$, $f'(-1)=1/2$,

$f''(x)=-2(x^2+1)^{-2}+8x^2(x^2+1)^{-3}$, $f''(-1)=1/2$

$f'''(x)=8x(x^2+1)^{-3}+16x(x^2+1)^{-3}-48x^3(x^2+1)^{-4}$, $f'''(-1)=0$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1}{4}(x+1)^2+o((x+1)^3)$

23. Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=4x-x^2+(x-2)\sin(x-2)$, $x_0=2$.

Найдём значения функции и её первых четырёх производных в заданной точке: $f(2)=4$, $f'(x)=4-2x+\sin(x-2)+(x-2)\cos(x-2)$, $f'(2)=0$, $f''(x)=-2+2\cos(x-2)-$ $-(x-2)\sin(x-2)$, $f''(2)=0$, $f'''(x)=-3\sin(x-2)-(x-2)\cos(x-2)$, $f'''(2)=0$, $f^{(4)}(x)=-4\cos(x-2)+(x-2)\sin(x-2)$, $f^{(4)}(2)=-4$. По формуле Тейлора $f(x)=4-(x-2)^4/6+o((x-2)^4)$. **Ответ:** В окрестности точки (2, 4) функция ведёт себя как степенная функция четвёртой степени. Точка (2, 4) является точкой максимума.

24. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-e^{-x}-1}{x^3}$.

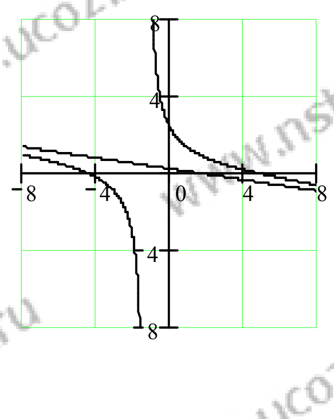
По формуле Тейлора $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. Далее, $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+o(x)$.

Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-e^{-x}-1}{x^3}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2/2+x^3/3+(1-x+x^2/2-x^3/6)-1+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/6+o(x^3)}{x^2}=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-e^{-x}-1}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

25. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\dfrac{21-x^2}{7x+9}$.



Область определения функции: $x\in(-\infty,-9/7)\cup(-9/7,\ \infty)$. Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничной точке области определения: $\lim\limits_{x\to -9/7-0}\dfrac{21-x^2}{7x+9}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1/2+0}\dfrac{21-x^2}{7x+9}=\infty$. Отсюда следует, что прямая $x=-9/7$ является вертикальной асимптотой. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{21-x^2}{7x+9}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-21}{7x+9}=-\lim_{x\to-\infty}[\frac{x}{7}-\frac{9}{49}-\frac{948}{49(7x+9)}]=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{21-x^2}{7x+9}=$$

$=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-21}{7x+9}=-\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x}{7}-\dfrac{9}{49}-\dfrac{948}{49(7x+9)}]=-\infty$. Следовательно, прямая $y=-\dfrac{x}{7}+\dfrac{9}{49}$ является наклонной асимптотой. **Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

26. Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=e^{-\frac{1}{x^3}}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. 2. Чётность, нечётность, периодичность отсутствуют, функция положительна в области определения 3. Функция имеет разрыв в точке $x=0$. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

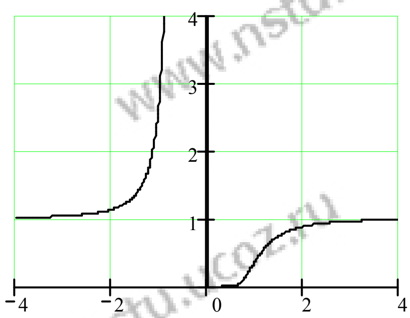
$\lim\limits_{x\to0-0}e^{-\frac{1}{x^3}}=e^{\infty}=\infty,\ \lim\limits_{x\to0+0}e^{-\frac{1}{x^3}}=e^{-\infty}=0$. Таким образом, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\frac{1}{x^3}}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x^3}}=1$. Следовательно, прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой. Очевидно, что других асимптот нет.

5. Первая производная $y'=[e^{-\frac{1}{x^3}}]'=3x^{-4}\cdot e^{-\frac{1}{x^3}}$. Производная в нуль не обращается. Производная остаётся положительной на всей числовой оси. Следовательно, в области определения функция монотонно возрастает и экстремумов не имеет.

6. Вторая производная:

$$y''=\left(3x^{-4}\cdot e^{-\frac{1}{x^3}}\right)'=-12x^{-5}\cdot e^{-\frac{1}{x^3}}+9x^{-8}\cdot e^{-\frac{1}{x^3}}=3e^{-\frac{1}{x^3}}(3-4x^3)x^{-8}$$



. Вторая производная обращается в нуль в точке $x=\sqrt[3]{3/4}$. В точке $x=0$ вторая производная не существует. Имеем три интервала: в интервале $(-\infty,0)$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости графика функции, в интервале $(0,\sqrt[3]{3/4})$ производная $y''>0$ - интервал вогнутости, в интервале $(\sqrt[3]{3/4},\infty)$ производная $y''<0$ - интервал выпуклости графика функции. Точка перегиба - $x=\sqrt[3]{3/4}$. 7. График функции не пересекает осей координат, во всех точках $f(x)>0$.

Ответ: График функции представлен на рисунке, экстремумов нет. Точка перегиба - $(\sqrt[3]{3/4},e^{-4/3})$.