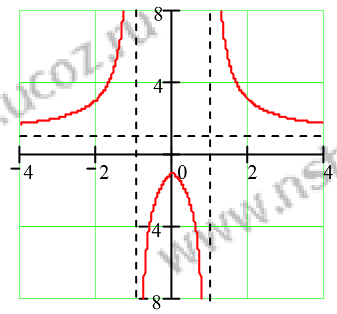
## Вариант № 16

**1.** Найти область определения функции : $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

Область определения данной функции определяется двумя неравенствами: $16-x^2\ge 0$ и $\sin x\ge 0$. Из второго неравенства следует, что должно выполняться неравенство $2k\pi\le x\le(2k+1)\pi$, где $k$ – любое целое число. Из первого неравенства находим, что $16-x^2\ge 0$, если $-4\le x\le 4$. При $k=-1$ получим $x\in[-4,-\pi]$. При $k=0$ получим $x\in[0,\pi]$. При других значениях $k$ неравенства не имеют общих решений.

**Ответ:** $x\in[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

**2.** Построить график функции: $y=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$.

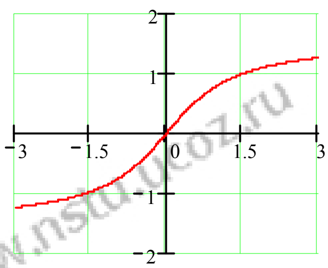


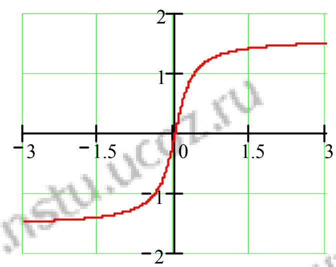

Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точек $x=1$ и $x=-1$. Преобразуем функцию: $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ если $x\ge 0$ и $y=\dfrac{-x+1}{-x-1}$ если $x<0$. Или $y=\dfrac{|x|-1+2}{|x|-1}=1+\dfrac{2}{|x|-1}$. Функция чётная, прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой. Достаточно построить график (по точкам) для $x\ge 0$, затем отобразить полученную часть графика зеркально относительно оси ОУ.

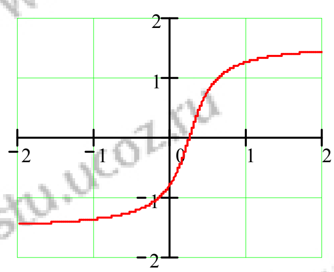
**Ответ:** График представлен на рисунке.

**3.** Построить график функции: $y=arctg(4x-1)$.

Область определения функции – вся числовая ось: $x\in(-\infty,\infty)$. Преобразуем функцию: $y=arctg(4x-1)=arctg[4(x-1/4)]$. Строим сначала $arctg\,x$. Затем «сжимаем» график в четыре раза по оси ОХ и сдвигаем его по оси ОХ на четверть единицы вправо.

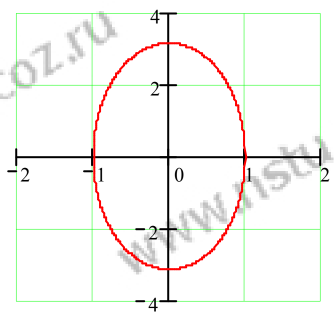



Получим график данной функции. **Ответ:** Последовательность построения представлена на рисунках.

**4.** Построить график функции: $y=\begin{cases}x=\cos t\\ y=\pi\sin t\end{cases}$.

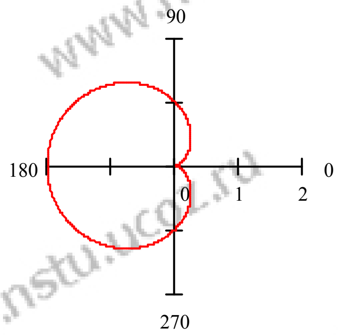



Исключим параметр $t$: $y=\pi\sin t=\pm\pi\sqrt{1-\cos^2 t}$. Или $y=\pm\pi\sqrt{1-x^2}$. Преобразуя, получим уравнение эллипса с центром в начале координат, с малой полуосью 1 и с большой полуосью $\pi$: $x^2+y^2/\pi^2=1$.

**Ответ:** График представлен на рисунке.

**5.** Построить график функции: $\rho=1-\cos\varphi$.

Поскольку $\rho \ge 0$, то функция существует для тех значений $\varphi$, для которых $\cos\varphi \le 1$. Это наблюдается при всех значениях $\varphi$. Функция возрастает от 0 до 2 (при $\varphi = \pi$), затем убывает от 2 до 0. Вертикальная ось пересекается графиком в точках (π/2, 1) и (3π/2, 1). Можно перейти к декартовым координатам. Тогда получим уравнение $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}) - x$. **Ответ:** график представлен на рисунке.




**6.** Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$.

Возведём все скобки в степени и приведём подобные:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 18n^2 + 108n + 216 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1}{4n^2 + 12n + 9 + n^2 + 8n + 16} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{15n^2 + 105n + 215}{5n^2 + 20n + 25} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 21n^{-1} + 43n^{-2}}{1 + 4n^{-1} + 5n^{-2}} = 3.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2} = 3$.

**7.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Разлагаем числитель и знаменатель на простые множители: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 (x+1)}{(x-1)^2 (x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{2}{3}$.

**8.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}$ (неопределённость вида (0/0)).

Вычислим предел, используя замену переменной:

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2} = \left| \begin{matrix} x - 6 = t^3, \ \text{если} \ \ x \to -2, \\ \text{то} \ \ t \to -2 \end{matrix} \right| = \lim_{t\to -2} \frac{t+2}{t^3 + 8} = \lim_{t\to -2} \frac{t+2}{(t+2)(t^2 - 2t + 4)} =$$

$$= \lim_{t\to -2} \frac{1}{t^2 - 2t + 4} = \frac{1}{12}.$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2} = \dfrac{1}{12}$.

**9.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Воспользуемся формулой $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ и первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1: \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 (3x/2) \cos 2x}{x \sin 2x} = -\frac{9}{4} \lim_{x\to 0} \left[ \frac{\sin \frac{3x}{2}}{3x/2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{3x/2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \right] =$$

$$-\frac{9}{4} \left[ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x/2)}{3x/2} \right]^2 \cdot (\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x})^{-1} = -\frac{9}{4}$$ **Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x} = -\dfrac{9}{4}$.

**10.** Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \left( \dfrac{2n^2 + 7n - 1}{2n^2 + 3n - 1} \right)^n$ (неопределённость вида $(1^\infty)$).

Приведём предел ко второму замечательному пределу: $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-1+4n}{2n^2+3n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{2n^2+3n-1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{2n^2+3n-1}\right)^{\frac{2n^2+3n-1}{4n}\cdot\frac{4n^2}{2n^2+3n-1}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{2n^2+3n-1}\right)^{\frac{2n^2+3n-1}{4n}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2+3n-1}}=e^2,$$ так как

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{2n^2+3n-1}=2$. **Ответ:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^n=e^2$.

**11.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^\pi-e^x}{\sin 5x-\sin 3x}$ (неопределённость вида (0/0)).

Сделаем замену переменной, затем воспользуемся эквивалентными величинами: $x-\pi=t,\ x=t+\pi,\ \textit{если}\ x\to\pi,\ \textit{то}\ t\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^\pi-e^x}{\sin 5x-\sin 3x}=$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^\pi-e^{t+\pi}}{\sin(5t+5\pi)-\sin(3t+3\pi)}=\lim_{t\to0}\frac{e^\pi(e^t-1)}{\sin 5t-\sin 3t}=\left|e^t-1\sim t,\ \ \sin at\sim at\right|=\lim_{t\to0}\frac{e^\pi t}{5t-3t}=\frac{e^\pi}{2}\ |$$

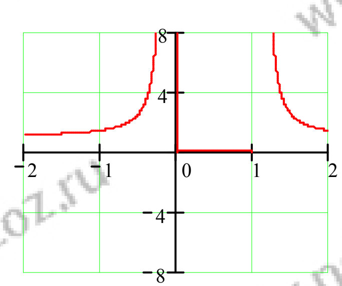
**Ответ:** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^\pi-e^x}{\sin 5x-\sin 3x}=\dfrac{e^\pi}{2}$.

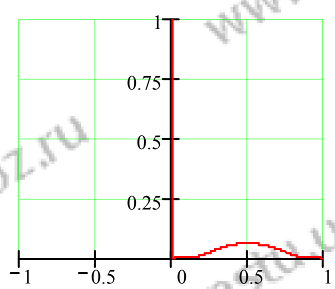
**12.** Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=2^{\frac{1}{x(x-1)}}$.

Область определения: $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$. В области определения функция является непрерывной (как элементарная функция). Исследуем поведение функции в граничных точках области определения: $\lim\limits_{x\to0-0}2^{\frac{1}{x(x-1)}}=2^\infty=\infty,\ \lim\limits_{x\to0+0}2^{\frac{1}{x(x-1)}}=2^{-\infty}=0,\ \lim\limits_{x\to1-0}2^{\frac{1}{x(x-1)}}=2^{-\infty}=0,\ \lim\limits_{x\to1+0}2^{\frac{1}{x(x-1)}}=2^\infty=\infty$. Таким образом, в точках $x$=0 и $x$=1 функция имеет разрывы второго рода. Для построения эскиза графика функции рассмотрим поведение функции в бесконечности: $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{\frac{1}{x(x-1)}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{x(x-1)}}=2^0=1$.

**Ответ:** В точках $x$=0 и $x$=1 функция имеет разрывы второго рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунках. На втором рисунке показано поведение функции в интервале (0, 1) в более крупном масштабе.



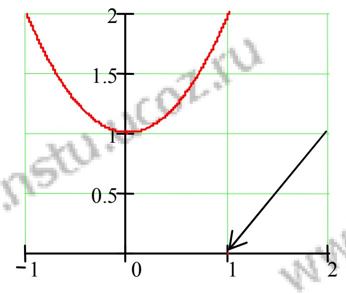

**13.** Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y=\begin{cases}x^2+1, & x\le1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$.

Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$. Ось ОХ разбивается на два интервала, на каждом из которых функция $f(x)$ совпадает с одной из указанных непрерывных функций. Поэтому точкой разрыва может быть только точка, разделяющая интервалы. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (x^2 + 1) = 2, \quad \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (x - 1) = 0,$

. Таким образом, в точке $x$=1 функция терпит разрыв первого рода. Величина скачка функции в точке $x$=1 равна -2.

**Ответ:** В точке $x$=1 функция имеет разрыв первого рода, в остальных точках она непрерывна. Эскиз графика представлен на рисунке.




**14.** Исходя из определения производной, найти $f'(0)$:

$f(x) = x^2 \cdot \cos^2(11/x),\ x \neq 0,\ f(0) = 0$.

По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Заменим $\Delta x$ на $x$-$x_0$:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Но $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. В данном случае $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cdot \cos^2(11/x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} [x \cdot \cos^2(11/x)] = 0$, так как $|\cos(11/x)| \leq 1$ всегда.

**Ответ:** $f'(0) = 0$.

**15.** Найти производную показательно-степенной функции: $y = x^{\sin x^3}$. Прологарифмируем функцию: $\ln y = \sin x^3 \ln x$. Берём производную, как производную неявной функции: $\dfrac{y'}{y} = 3x^2 \cos x^3 \ln x + \dfrac{\sin x^3}{x}$. Подставляем сюда $y$: $y' = (3x^2 \cos x^3 \ln x + \dfrac{\sin x^3}{x}) \cdot x^{\sin x^3}$.

**Ответ:** $y' = (3x^2 \cos x^3 \ln x + \dfrac{\sin x^3}{x}) \cdot x^{\sin x^3}$.

**16.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке, вычислить $y''_{xx}$:

$$\begin{cases} x = t\sin t + \cos t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases} \qquad t = \frac{\pi}{3}.$$

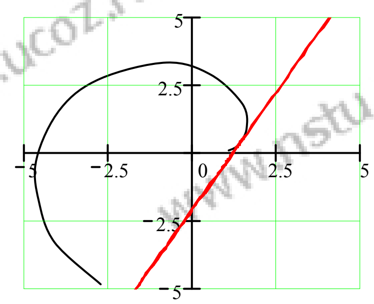
Уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ имеют вид $y = y_0 + y'_x(x_0) \cdot (x - x_0)$ и $y = y_0 - (1/y'_x(x_0)) \cdot (x - x_0)$, где $x_0$ и $y_0$ - координаты точки касания. Вычислим сначала эти координаты:

$x_0 = x(\pi/3) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$, $y_0 = y(\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$. Найдём производные $y'_x$ и $y''_{xx}$: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} =$

$= \dfrac{\cos t - \cos t + t\sin t}{\sin t + t\cos t - \sin t} = tg\,t$. Тогда $y'_x(\pi/3) = \sqrt{3}$. Далее,

$y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\dfrac{(tg\,t)'}{(t\sin t + \cos t)'} =$

$= \dfrac{1}{\cos^2 t \cdot (\sin t + t\cos t - \sin t))} = \dfrac{1}{t\cos^3 t}$, следовательно,



$y''_x(\pi/3) = \dfrac{24}{\pi}$. Таким образом, уравнение касательной $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cdot(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}})$, урав-

нение нормали $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}})$. Или $3\sqrt{3}x - 3y - 2\pi = 0$ и $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$.

**Ответ:**

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right),\ y'_x(x_0) = \sqrt{3},$$

$$y''_x(x_0) = \frac{24}{\pi},\ \begin{cases} 3\sqrt{3}x - 3y - 2\pi = 0 & \textit{касательная} \\ x + \sqrt{3}y - 2 = 0 & \textit{нормаль} \end{cases}.$$

**17.** Функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $x^2 + x\sin y - e^y = 3$, принимает в точке $x_0 = 2$ значение $y_0 = 0$. Найти $y'_x$, $y''_{xx}$, $y'_x(x_0)$, $y''_{xx}(x_0)$.

Дифференцируем уравнение по $x$, предполагая, что $y = y(x)$: $2x + \sin y + xy'\cos y - e^y y' = 0$. Из этого равенства находим: $y' = -\dfrac{2x + \sin y}{x\cos y - e^y}$. Находим вторую производную: $y'' = -\dfrac{(2 + y'\cos y)(x\cos y - e^y) - (\cos y - xy'\sin y - e^y y')(2x + \sin y)}{(x\cos y - e^y)^2}$.

Вычислим производные в точке: $x_0 = 2$ $y'(2) = -4,\ y''(2) = 22$. **Ответ:** $y' = -\dfrac{2x + \sin y}{x\cos y - e^y}$,

$$y'' = -\frac{(2 + y'\cos y)(x\cos y - e^y) - (\cos y - xy'\sin y - e^y y')(2x + \sin y)}{(x\cos y - e^y)^2},\ y'(2) = -4,\ y''(2) = 22.$$

**18.** Вычислить приближённое значение функции в заданной точке с помощью дифференциала: $y = x^7,\ x = 2{,}002$.

По определению дифференциала $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + dy(x_0) + o(\Delta x)$ или, в других обозначениях, $y(x) = y(x_0) + dy(x_0) + o((x - x_0)),\ \Delta x = dx = x - x_0$. Отсюда получаем формулу для приближённых вычислений: $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$. В данном случае $x_0 = 2,\ y(x_0) = y(2) = 128,\ y' = 7x^6,\ y'(x_0) = y'(2) = 448,\ \Delta x = 0{,}002$. Тогда $y(2{,}002) \approx 128 + 448\cdot 0{,}002 = 128{,}896$. **Ответ:** $y \approx 128{,}896$

**19.** Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -1/2+0}(2x+1)^{\ln^{-1}(1-e^{-2x-1})}$.

Это неопределённость вида $(0^0)$. Преобразуем предел:

$\lim\limits_{x\to -1/2+0}(2x+1)^{\ln^{-1}(1-e^{-2x-1})} = \lim\limits_{x\to -1/2+0} e^{\ln^{-1}(1-e^{-2x-1})\cdot\ln(2x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to -1/2+0}[\ln^{-1}(1-e^{-2x-1})\cdot\ln(2x+1)]}$. Найдём предел в показателе степени: $\lim\limits_{x\to -1/2+0}\dfrac{\ln(2x+1)}{\ln(1-e^{-2x-1})} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to -1/2+0}\dfrac{(\ln(2x+1))'}{(\ln(1-e^{-2x-1}))'} =$

$$= \lim_{x\to -1/2+0}\frac{2(1-e^{-2x-1})}{2(2x+1)e^{-2x-1}} = \lim_{x\to -1/2+0}\frac{2e^{-2x-1}}{2e^{-2x-1} + 2(2x+1)e^{-2x-1}} = \lim_{x\to -1/2+0}\frac{1}{2(x+1)} = 1.$$

Следовательно,

$\lim\limits_{x\to -1/2+0}(2x+1)^{\ln^{-1}(1-e^{-2x-1})} = e^1 = e$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to -1/2+0}(2x+1)^{\ln^{-1}(1-e^{-2x-1})} = e$.

**20.** Вычислить предел с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\pi}(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\pi}{\pi - x})$.

Это неопределённость вида (∞−∞): $\lim\limits_{x\to\pi}(\frac{1}{\sin x}-\frac{\pi}{\pi-x})=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\pi-x-\pi\sin x}{(\pi-x)\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-1-\pi\cos x}{-\sin x+(\pi-x)\cos x}=\infty$. **Ответ:** $\lim\limits_{x\to\pi}(\frac{1}{\sin x}-\frac{\pi}{\pi-x})=\infty$.

**21.** Многочлен по степеням $x$ представить в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$: $f(x)=x^4-3x^3$, $x_0=2$.

Запишем формулу Тейлора для многочлена четвёртой степени: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$.

Найдём все производные: $f'(x)=4x^3-9x^2$, $f''(x)=12x^2-18x$, $f'''(x)=24x-18$, $f^{(4)}(x)=24$. Тогда $f(2)=-8$, $f'(2)=-4$, $f''(2)=12$, $f'''(2)=30$, $f^{(4)}(2)=24$. Подставив это в формулу, получим: $f(x)=-8-4(x-2)+6(x-2)^2+5(x-2)^3+(x-2)^4$.

**Ответ:** $f(x)=-8-4(x-2)+6(x-2)^2+5(x-2)^3+(x-2)^4$.

**22.** Найти многочлен, приближающий заданную функцию $f(x)$ в окрестности точки $x_0$ с точностью до $o((x-x_0)^3)$: $f(x)=\sin\ln x$, $x_0=e^{\pi/6}$.

Применяем формулу Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Вычисляем последовательно: $f(e^{\pi/6})=1/2$, $f'(x)=x^{-1}\cos\ln x$, $f'(e^{\pi/6})=e^{-\pi/6}\sqrt{3}/2$,

$f''(x)=-x^{-2}\cos\ln x-x^{-2}\sin\ln x=-x^{-2}(\sin\ln x+\cos\ln x)$, $f''(e^{\pi/6})=-e^{-\pi/3}(\sqrt{3+1})/2$,

$f'''(x)=2x^{-3}(\sin\ln x+\cos\ln x)+x^{-3}(\sin\ln x-\cos\ln x)$, $f'''(e^{\pi/6})=e^{-\pi/2}(3+\sqrt{3})/2$.

**Ответ:**

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi/6}\sqrt{3}}{2}(x-e^{\pi/6})-\frac{e^{-\pi/3}(\sqrt{3}+1)}{4}(x-e^{\pi/6})^2+\frac{e^{-\pi/2}(3+\sqrt{3})}{12}(x-e^{\pi/6})^3+o((x-e^{e^{\pi/6}})^3)$$

**23.** Исследовать поведение функции в окрестности точки с помощью формулы Тейлора: $f(x)=\ln(x+3)-\sin(x+2)+x^2/2+2x$, $x_0=-2$.

Найдём значения функции и её первых трёх производных в заданной точке: $f(-2)=-2$, $f'(x)=\frac{1}{x+3}-\cos(x+2)+x+2$, $f'(-2)=0$, $f''(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}+\sin(x+2)+1$, $f''(-2)=0$, $f'''(x)=\frac{2}{(x+3)^3}+\cos(x+2)$, $f'''(-2)=3$. По формуле Тейлора $f(x)=-2+(x+2)^3/2+o((x+2)^3)$. **Ответ:** В окрестности точки (-2, -2) функция ведёт себя как степенная функция третьей степени. Точка (-2, -2) является точкой перегиба: слева - интервал выпуклости, справа - интервал вогнутости.

**24.** Вычислить предел с помощью формулы Тейлора: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{1+x^2}-\cos(\sqrt{2}x)\right)/x^3$.

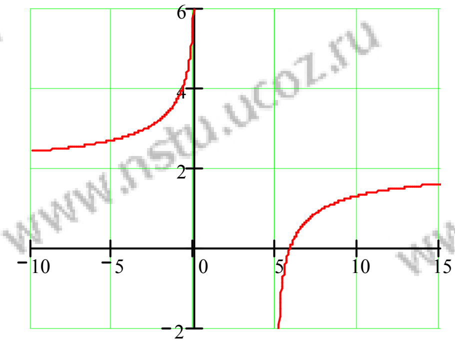
По формуле Тейлора $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^3)$. Далее,

$\cos(\sqrt{2}x)=1-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)$. Подставим это в предел: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{1+x^2}-\cos(\sqrt{2}x)\right)/x^3=$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x^3}\cdot(1-x^2+x^4-1+x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^3))\right]=\lim\limits_{x\to0}(\frac{x^4}{6x^3}-\frac{o(x^3)}{x^3})=0$.

**Ответ:** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\cos(\sqrt{2}x)\right)/x^3=0$.

**25.** Найти асимптоты и построить эскиз графика функции: $y=\ln\dfrac{x-5}{x}+2$.




Область определения функции: $\dfrac{x-5}{x}>0\Rightarrow x>5,\ x<0\Rightarrow x\in(-\infty,\,0)\cup(5,\,\infty)$.

Функция непрерывна в каждой точке области определения. Найдём односторонние пределы в граничных точках области определения:

$$\lim_{x\to -0-0}\left(\ln\frac{x-5}{x}+2\right)=\infty,\quad \lim_{x\to 5+0}\left(\ln\frac{x-5}{x}+2\right)=\infty.$$

Отсюда следует, что прямые $x=0$ и $x=5$ являются вертикальными асимптотами. Исследуем функцию при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\ln\dfrac{x-5}{x}+2\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\dfrac{x-5}{x}+2\right)=2$ , так как $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x-5}{x}=\ln 1=0$ . Следовательно, прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой. Очевидно, что других асимптот нет.

**Ответ:** Эскиз графика представлен на рисунке.

**26.** Провести полное исследование поведения функции и построить её график: $y=-xe^{\frac{1}{2x^2}}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty,\,0)\cup(0,\,\infty)$. 2. Функция нечётна, периодичность отсутствует. 3. Функция имеет разрыв в точке $x=0$. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва:

$$\lim_{x\to 0-0}\left(-xe^{\frac{1}{2x^2}}\right)=-\lim_{x\to 0-0}\frac{e^{\frac{1}{2x^2}}}{1/x}=\left|\begin{array}{l}1/x=t,\\ x\to 0-0\Rightarrow t\to-\infty\end{array}\right|=-\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{t}=-\lim_{t\to-\infty}\frac{te^{\frac{1}{2}t^2}}{1}=\infty.$$

Аналогично, $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(-xe^{\frac{1}{2x^2}}\right)=-\infty$. Таким образом, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-xe^{\frac{1}{2x^2}}\right)=\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-xe^{\frac{1}{2x^2}}\right)=-\infty$. Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-xe^{\frac{1}{2x^2}}/x\right)=-\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{2x^2}}=-1,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=-\lim_{x\to\pm\infty}[x(e^{\frac{1}{2x^2}}-1)]=$$

$$=\left|e^{\frac{1}{2x^2}}-1\approx\frac{1}{2x^2}\ \text{при}\ \frac{1}{2x^2}\to 0\right|=-\lim_{x\to\pm\infty}[x\cdot\frac{1}{2x^2}]=0.$$ Следовательно, прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой.

5. Первая производная $y'=[-xe^{\frac{1}{2x^2}}]'=-e^{\frac{1}{2x^2}}+x^{-2}\cdot e^{\frac{1}{2x^2}}=\dfrac{1-x^2}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{2x^2}}$. Производная обращается в нуль в точках $x=-1$ и $x=1$. При $x<-1$ производная отрицательна, при $-1<x<0$ производная положительна. Следовательно, точка $x=-1$ является точкой минимума, причём $f(-1)=\sqrt{e}$. При $0<x<1$ производная положительна, при $x>1$

производная отрицательна. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой максимума, причём $f(1) = -\sqrt{e}$.

6. Вторая производная:

$$y'' = \left( \frac{1-x^2}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \right)' = \frac{-2x^3 - 2x(1-x^2)}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} -$$

$$-\frac{1-x^2}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \cdot x^{-3} = -\frac{1+x^2}{x^5} \cdot e^{\frac{1}{2x^2}}.$$ Вторая производная в нуль не обращается. В точке $x = 0$ вторая производная не существует. Имеем два интервала: интервал $(-\infty, 0)$ и интервал $(0, \infty)$. Производная $y'' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ и $y'' < 0$ при $x \in (0, \infty)$. Следовательно, в интервале $(-\infty, 0)$ график функции вогнутый, а в интервале $(0, \infty)$ - выпуклый. Точек перегиба нет. 7. График функции не пересекает осей координат. **Ответ:** График функции представлен на рисунке, минимум функции - в точке $(-1, \sqrt{e})$, максимум функции – в точке $(1, -\sqrt{e})$.