Вариант 1

Задача 1. *Вычислить значение функции (ответ дать в алгебраической форме):*

а) $\mathrm{Arsh}3$; б) $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)$

<u>Решение</u>. а). Будем вычислять Arsh3 по формуле $\mathrm{Arsh}(z)=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$. В данном примере z=3, следовательно, $\mathrm{Arsh}\,3=\mathrm{Ln}(3\pm\sqrt{10})$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z)=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)$. В данном случае у функции Ln(z) имеется два значения z: $z_1=3+\sqrt{10}$ и $z_2=3-\sqrt{10}$. Найдём модули и аргументы этих чисел: $|z_1|=3+\sqrt{10}$, $\varphi_1=\arg z_1=0$, $|z_2|=\sqrt{10}-3$, $\varphi_2=\arg z_2=\pi$, так как $3-\sqrt{10}<0$. Таким образом $\mathrm{Arsh}\,3=\mathrm{Ln}(3+\sqrt{10})=\ln(3+\sqrt{10})+2k\pi i$ и $\mathrm{Arsh}\,3=\mathrm{Ln}(3-\sqrt{10})=\ln(\sqrt{10}-3)+\pi i(1+2k)$.

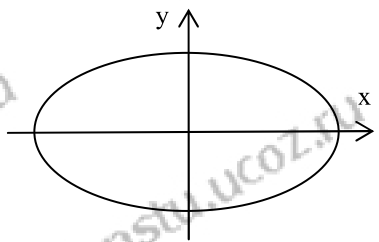
б). Воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}(z)=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)$. В данном случае $z=\sqrt{3}+i$. Найдём модуль и аргумент этого числа: $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ $\quad \varphi=\arg z=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$ (первая четверть). Таким образом $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)=\ln(2)+i(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi)=\ln(2)+i\pi(\dfrac{1}{6}+2k)$.

<u>Ответ</u>. а) $\mathrm{Arsh}\,3=\begin{cases}\ln(3+\sqrt{10})+2k\pi \\ \ln(\sqrt{10}-3)+\pi i(1+2k)\end{cases}$; б) $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)=\ln 2+i\pi(\dfrac{1}{6}+2k)$.

Задача 2. *Выяснить геометрический смысл соотношения. Сделать чертёж.*

$$|z-2|+|z+2|=5.$$

<u>Решение</u>. Так как z=x+iy, то данное соотношение имеет вид: $|x-2+iy|+|x+2+iy|=5$. ли $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5$. Перенесём второй корень в правую часть равенства и возведём обе части в квадрат. Получим:



$x^2-4x+4+y^2=25-10\sqrt{(x+2)^2+y^2}+x^2+4x+4+y^2$.

Или $10\sqrt{(x+2)^2+y^2}=25-8x$. Возведём ещё раз в квадрат: $100x^2+400x+400+100y^2=625+400x+64x^2$.

Или $36x^2+100y^2=225$.

Поделив всё равенство на правую часть, получим каноническое уравнение эллипса с фокусами на действительной оси: $\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{4y^2}{9}=1$.

<u>Ответ</u>. Данное соотношение представляет уравнение эллипса $\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{4y^2}{9}=1$.

Задача 3. *Решить уравнение*: $\sin z+\cos z=i$.

<u>Решение</u>. Перейдём к гиперболическим функциям: $\sin z=-i\cdot\mathrm{sh}(iz)$, $\cos z=\mathrm{ch}(iz)$.

Получим уравнение $-i\cdot\mathrm{sh}(iz)+\mathrm{ch}(iz)=i$. Или $-i\cdot\dfrac{1}{2}(e^{iz}-e^{-iz})+\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=i$. Умножим уравнение на $2e^{iz}$. Тогда уравнение примет вид: $(1-i)e^{2iz}-2ie^{iz}+1+i=0$. Введём обозначение $V=e^{iz}$. Найдём корни квадратного уравнения $(1-i)V^2-2iV+1+i=0$:

$$V=\frac{2i+\sqrt{(2i)^2-4(1-i)(1+i)}}{2(1-i)}=\frac{2i\pm i\cdot 2\sqrt{3}}{2(1-i)}=\frac{(1\pm\sqrt{3})i}{1-i}=\frac{(1\pm\sqrt{3})i(1+i)}{1^2-i^2}=\frac{(1\pm\sqrt{3})(i-1)}{2}.$$

Таким образом, имеем два корня: $V_1=\dfrac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$, $\quad V_2=\dfrac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

Найдём модули и аргументы этих чисел:

$$|V_1| = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_1 = \arg V_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad |V_2| = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \arg V_2 = -\frac{\pi}{4}.$$

Так как $V=e^{iz}$, то $iz=\mathrm{Ln}V$ или $z=-i\cdot\mathrm{Ln}V$. Далее воспользуемся формулой $\mathrm{Ln}V = \ln|V| + i(\varphi + 2k\pi)$. Получим:

$z_1 = -i\cdot \mathrm{Ln}V_1 = -i[\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)] = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\cdot\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Аналогично,

$z_2 = -i\cdot \mathrm{Ln}V_2 = -i[\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)] = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\cdot\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Эти решения можно объединить: $z = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\cdot\ln\frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $z = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\cdot\ln\frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{2}}$.

)

Задача 5. *Восстановить аналитическую функцию по заданной действительной части её*:

$\mathrm{Re} f(z) = u = Ax^2 - y^2 + xy$, *если* f(0)=i.

Решение. Чтобы функция u(x,y) бала действительной частью аналитической функции нужно, чтобы она была гармонической, т.е. её лапласиан Δu был бы равен нулю: $\Delta u=0$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Проверим выполнение этого условия, для чего найдём производные второго порядка от u по *x* и по *y*: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2A$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$.

Чтобы лапласиан Δu был равен нулю, нужно положить A=1. Таким образом, функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ является гармонической. Восстановим мнимую часть v(x,y) функции f(z)=u(x,y)+iv(x,y), пользуясь условиями Даламбера-Эйлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Из первого условия получаем: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$. Тогда $v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + \varphi(x)$, или $v(x,y) = \int (2x+y)dy + \varphi(x) = 2xy + \frac{y^2}{2} + \varphi(x)$. Производная по *x* от этого выражения равна $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$. С другой стороны по второму условию Даламбера-Эйлера $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x$. Приравнивая эти выражения, получим: $2y + \varphi'(x) = 2y - x$. Отсюда $\varphi'(x) = -x$. Или $\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + C$. Таким образом, $v(x,y) = 2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + C$. Тогда $f(z) = x^2 - y^2 + xy + i\cdot(2xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C)$. Перейдём к переменной z:

$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 - \frac{i}{2}\cdot(x^2 + 2ixy - y^2 - 2C) = (x+iy)^2(1 - \frac{i}{2}) + iC = z^2(1-\frac{i}{2}) + iC$.

Воспользуемся дополнительным условием f(0)=i. В данном случае f(0)=iC. Т.е. C=1.

Ответ. $f(z) = z^2(1-\frac{i}{2}) + i = x^2 - y^2 + xy + i\cdot(2xy + \frac{y^2 - x^2}{2} + 1)$.

Задача 6. *Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2.*

$$\int_C \bar{z}\cdot \operatorname{Re} z\,dz; \qquad C:\ y = x^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = -1 + i.$$

Решение. Вычислим интеграл, сводя его к криволинейным интегралам второго рода по формуле $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$. В данном случае f(z)=(x-iy)x или $f(z) = x^2 - ixy$.

Значит $\int_C f(z)dz = \int_C x^2dx + xydy + i\int_C x^2dy - xydx$. Примем x за параметр. Тогда $y=x^2$, dy=2xdx.

Начальной точке $z_1=0$ соответствует значение x=0, конечной $z_2=-1+i$ – значение x=-1.

Следовательно, $\int_C \bar{z}\cdot \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^{-1}(x^2 + 2x^4)dx + \int_0^{-1}(2x^3 - x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}\right]\Big|_0^{-1} + i\frac{x^4}{4}\Big|_0^{-1} = -\frac{11}{15} + \frac{i}{4}$.

Ответ. $\int_C \bar{z}\cdot \operatorname{Re} z\,dz = -\frac{11}{15} + \frac{i}{4}$.

Задача 7. *Вычислить интеграл от аналитической функции* $\int_1^{1+i}(3z^2 + z + 1)dz$.

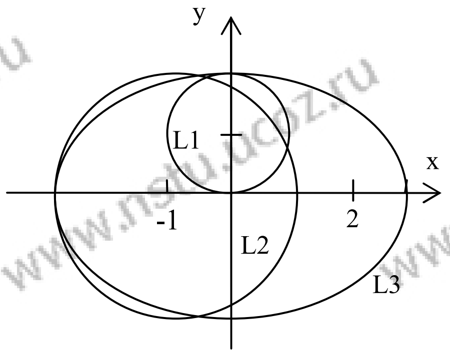
Решение. Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^{1+i}(3z^2 + z + 1)dz = \left(z^3 + \frac{z^2}{2} + z\right)\Big|_1^{1+i} = (1+i)^3 + \frac{(1+i)^2}{2} + 1 + i - 1 - \frac{1}{2} - 1 =$$

$$= 1 + 3i - 3 - i + \frac{1 + 2i - 1}{2} + i - \frac{3}{2} = 4i - \frac{7}{2}.$$

Ответ. $\int_1^{1+i}(3z^2 + z + 1)dz = 4i - \frac{7}{2}$.

Задача 8. *Найти интеграл, используя интегральную формулу Коши, по контурам L_1, L_2, L_3.* $\int_L \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)}$, 1) $L_1: |z - i| = 1$, 2) $L_2: |z+1| = 2$, 3) $L_3: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.



Решение. 1). Подынтегральная функция аналитична всюду, за исключением точек z=-1 и z=2. В круге $|z - i| \le 1$ подынтегральная функция аналитична.

Следовательно, $I_1 = \int_{L_1} \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)} = 0$. 2). В круге $|z+1| \le 2$ есть одна особая точка z=-1. Тогда по интегральной формуле Коши

$$I_2 = \int_{L2} \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)} = \int_{L2} \frac{\frac{e^z}{z-2}dz}{(z+1)^2} = \frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z-2}\right]_{z=-1} =$$

$$= 2\pi i\cdot\left[\frac{e^z(z-2) - e^z}{(z-2)^2}\right]_{z=-1} = -\frac{8\pi i}{9e}.$$

3). Внутри области $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1$ расположены обе особые точки. Поэтому применим теорему Коши для многосвязной области:

$I_3 = \int_{L3} \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)} = \int_{l_1} \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)} + \int_{l_2} \frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)}$, где l_1 - окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z=-1, а l_2 - окружность малого радиуса с центром в точке z=2. Первый интеграл в этой сумме совпадает с I_2. Вычислим второй интеграл по интегральной формуле Коши:

$$\int\limits_{l_2}\frac{e^z dz}{(z+1)^2(z-2)}=\int\limits_{L2}\frac{\frac{e^z}{(z+1)^2}dz}{z-2}=2\pi i\cdot\left[\frac{e^z}{(z+1)^2}\right]_{z=2}=\frac{2\pi i}{9}\cdot e^2.$$ Тогда

$$I_3=-\frac{8\pi i}{9e}+\frac{2\pi i}{9}\cdot e^2=\frac{2\pi i}{9e}(e^3-4).$$

Ответ. $I_1=0,\quad I_2=-\frac{8\pi i}{9e},\quad I_3=\frac{2\pi i}{9e}(e^3-4).$

Задача 9. *Разложить функцию в ряд Лорана в областях.*

$\frac{z+1}{z^2-z-20}$, 1) $4<|z|<5$ 2) $|z|>5$ 3) $0<|z-4|<9$.

Решение. Корнями уравнения $z^2-z-20=0$ являются числа $z_1=5$ и $z_2=-4$. Разложим эту дробь на простые дроби: $\frac{z+1}{z^2-z-20}=\frac{A}{z-5}+\frac{B}{z+4}=\frac{A(z+4)+B(z-5)}{(z-5)(z+4)}$. Или

$A(z+4)+B(z-5)=z+1$. При z=5 получим 9A=6, т.е. A= 2/3. Если z=-4, то -9B=-3, т.е. B=1/3. Следовательно, $\frac{z+1}{z^2-z-20}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+4}$. 1). В кольце $4<|z|<5$ имеем

$\frac{4}{|z|}<1$ и $\frac{|z|}{5}<1$. Тогда дробь можно представить следующим образом:

$\frac{z+1}{z^2-z-20}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5(1-\frac{z}{5})}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{4}{z})}$. Воспользуемся формулой для бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+...+q^n+...$, где $|q|<1$. В первой дроби q=z/5, во второй дроби q=-4/z. Следовательно,

$\frac{z+1}{z^2-z-20}=\frac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{n-1}}{z^n}-\frac{2}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. 2). В кольце $|z|>5$ выполняются неравенства $\frac{4}{|z|}<1$ и $\frac{5}{|z|}<1$. Следовательно, $\frac{z+1}{z^2-z-20}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{5}{z})}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{4}{z})}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5^n+(-1)^n4^n}{z^{n+1}}$.

3) $0<|z+4|<9\Rightarrow\frac{z+4}{9}<1;$

$$\frac{z+1}{z^2-z-20}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{9\left(1-\frac{z+4}{9}\right)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+4}=-\frac{2}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+4)^n}{9^{n+1}}+\frac{1}{3}\cdot\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{4^{n+1}}$$

$$\frac{z+1}{z^2-z-20}=-\frac{2}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{(z+4)^n}{9^{n+1}}+\frac{1}{3}\cdot\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{4^{n+1}}$$

Ответ. 1). $\frac{z+1}{z^2-z-20}=\frac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{n-1}}{z^n}-\frac{2}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. в кольце $4<|z|<5$.

2). $\frac{z+1}{z^2-z-20}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 5^n+(-1)^n4^n}{z^{n+1}}$ в кольце $|z|>5$.

3). $\dfrac{z+1}{z^2-z-20}=-\dfrac{2}{3}\sum_{1}^{\infty}\dfrac{(z+4)^n}{9^{n+1}}+\dfrac{1}{3}\cdot\sum_{1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{4^{n+1}}$ в кольце 0<|z+4|<9.

Задачи 10-11. *Вычислить интегралы с помощью вычетов.*

10. $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{z-1}{(z^3+1)z}dz$ **11.** $\int\limits_{|z-1|=1} ze^{\frac{z}{z-1}}dz$

Решение. **10.** Разложим подынтегральную функцию на простые дроби. Знаменатель представляется в виде $(z^3+1)z=z(z+1)(z^2-z+1)$. Следовательно,

$\dfrac{z-1}{(z^3+1)z}=\dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z+1}+\dfrac{Cz+D}{z^2-z+1}$. Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители правой и левой части, получим: $A(z+1)(z^2-z+1)+Bz(z^2-z+1)+z(Cz+D)(z+1)=z-1$. Полагая z=0, находим A=-1. Полагая z=-1, находим B=2/3. Для определения C и B приравняем коэффициенты при z^3 и z^2 в правой и левой части равенства. Получим систему уравнений:

$\begin{cases}A+B+C=0\\-B+C+D=0\end{cases}$ Решая систему, находим: C=1/3, D=1/3. Таким образом,

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z-1}{(z^3+1)z}dz=-\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z}dz+\frac{2}{3}\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{z+1}dz+\frac{1}{3}\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{z^2-z+1}dz=2\pi i(-1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{z^2-z+1}dz.$$

Два первых интеграла сразу вычислены по формуле Коши, третий интеграл найдём с помощью вычетов. Полюсами подынтегральной функции являются значения

$z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Заметим, что $z_1-z_2=\sqrt{3}i$. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_1}\frac{z+1}{z^2-z+1}=\lim_{z\to z_1}[(z-z_1)\frac{z+1}{(z-z_1)(z-z_2)}]=\lim_{z\to z_1}\frac{z+1}{(z-z_2)}=\frac{z_1+1}{(z_1-z_2)}=\frac{3-\sqrt{3}i}{2\cdot\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}+i}{2i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2}\frac{z+1}{z^2-z+1}=\lim_{z\to z_2}[(z-z_2)\frac{z+1}{(z-z_1)(z-z_2)}]=\lim_{z\to z_2}\frac{z+1}{(z-z_1)}=\frac{z_2+1}{(z_2-z_1)}=\frac{3-\sqrt{3}i}{-2\cdot\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}-i}{-2i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Получим окончательно:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z-1}{(z^3+1)z}dz=2\pi i(-1+\frac{2}{3})+\frac{1}{3}\cdot 2\pi i\sum_{k=1}^{2}\operatorname*{Res}_{z_i}\frac{z+1}{z^2-z+1}=-\frac{2\pi i}{3}+\frac{2\pi i}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)=0.$$

11. Подынтегральная функция имеет существенно особую точку z=1. Поэтому для вычисления вычета относительно этой точки следует разложить функцию в ряд Лорана.

Представим подынтегральную функцию в виде: $ze^{\frac{z}{z-1}}=z\cdot e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$ и воспользуемся разложением в ряд функции e^w по степеням w: $e^w=1+w+\dfrac{w^2}{2!}+\dfrac{w^3}{3!}+...+\dfrac{w^n}{n!}+...$ Полагая

$w=\dfrac{1}{z-1}$, найдём разложение данной функции:

$$z\cdot e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}=e\cdot z(1+\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}...+\frac{1}{n!(z-1)^n}+...)=$$
$$=e\cdot(z+\frac{z}{(z-1)}+\frac{z}{2!(z-1)^2}+\frac{z}{3!(z-1)^3}...+\frac{z}{n!(z-1)^n}+...).$$

Воспользуемся соотношением $\dfrac{z}{(z-1)^n}=\dfrac{z-1+1}{(z-1)^n}=\dfrac{1}{(z-1)^{n-1}}+\dfrac{1}{(z-1)^n}$. Учитывая это,

получим:

$z\cdot e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}=e\cdot[(z-1)+2+\frac{3}{2}\frac{1}{(z-1)}+\frac{2}{3}\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{6}{5}\frac{z}{(z-1)^3}...]$. Вычет данной функции равен коэффициенту при $(z-1)^{-1}$ в данном разложении, т.е. $\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{1}[ze^{\frac{z}{z-1}}]=\frac{3}{2}e$. Следовательно.

$$\int\limits_{|z-1|=1} ze^{\frac{z}{z-1}}dz=2\pi i\cdot\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{1}[ze^{\frac{z}{z-1}}]=2\pi i\cdot\frac{3}{2}e=3\pi ei.$$

Ответ. 10. $\int\limits_{|z|=2}\frac{z-1}{(z^3+1)z}dz=0.$ 11. $\int\limits_{|z-1|=1} ze^{\frac{z}{z-1}}dz=3\pi ei.$

Задача 12. *Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Решение. В данном случае в верхней полуплоскости расположены два полюса z=i и z=3i функции $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}=2\pi i(\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}+\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{3i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}).$

$$\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)z^2}{(z+i)(z-i)(z^2+9)}=\frac{i^2}{2i(i^2+9)}=\frac{-1}{2i\cdot 8}=\frac{1}{16}i.$$

$\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{3i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}=\lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)z^2}{(z+3i)(z-3i)(z^2+1)}=\frac{9i^2}{6i(9i^2+1)}=\frac{-3}{-2i\cdot 8}=-\frac{3}{16}i.$ Следовательно.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}=2\pi i(\frac{1}{16}i-\frac{3}{16}i)=-\frac{\pi}{4}i^2=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)}=\frac{\pi}{4}.$

Задача 13. *Вычислить интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.*

$\int\limits_C\frac{dz}{\sqrt{1-z}}$, где C прямая, z_1=-i, z_2=i, $\sqrt{1-i}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Решение. Рассмотрим функцию $\sqrt{1-z}=|1-z|\cdot[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}]$. Рассматривается та ветвь функции, для которой в точке i величина $\sqrt{1-z}$ будет принимать заданное значение. С одной стороны $\sqrt{1-i}=\sqrt{2}\cdot[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}]$. С другой стороны $\sqrt{1-i}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}\right)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$. Сравнивая эти выражения, приходим к выводу, что указанной ветви функции соответствует значение k=0. Следовательно, данная ветвь функции имеет уравнение $\sqrt{1-z}=|1-z|\cdot[\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}]$.

Таким образом,

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = 2\sqrt{1-z}\Big|_{-i}^{i} = 2\cdot[\sqrt{1-i}-\sqrt{1+i}] =$$

$$= 2\cdot[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}) - \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) = -2\sqrt{2}i\sin\frac{\pi}{8} = 4\sqrt{2}\,i\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} = 2\sqrt{2}\,i\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

<u>Ответ</u>. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = 2\sqrt{2}\,i\sqrt{\sqrt{2}-1}$.